

Etude de modèles de fermeture au second ordre et
contribution à la résolution numérique des écoulements
turbulents compressibles

Thèse présentée devant l'Ecole Central de Lyon
pour obtenir le titre de Docteur (spécialité: thermique et énergétique)
par Markus Uhlmann

Soutenue le 17 Avril 1997

Résumé

Ce travail de thèse contribue au développement d’une méthode de calcul des écoulements turbulents à haute vitesse. L’approche statistique à l’aide d’une fermeture au second ordre pour le tenseur de Reynolds est choisie. Nous étudions les modèles existants pour les effets de compressibilité, par rapport à la théorie de réalisabilité, et par l’évaluation directe en s’appuyant sur des données d’expérience et de DNS.

La partie hyperbolique, non-conservative du système d’équations (effets de convection et de production) est analysée en temps que problème de Riemann. Deux nouvelles méthodes de caractéristiques pour la résolution du système sont proposées et comparées à une technique de découplage utilisée dans la littérature. Nous montrons que les méthodes “couplées” permettent une meilleure prise en compte des ondes caractéristiques associées à ce système.

Le calcul avec le système complet, dans le cas d’un écoulement homogène cisailé, montre l’insuffisance des modèles actuels à prendre en compte l’effet combiné des processus énergétiques et structurels de la compressibilité. Une modification du modèle pour la corrélation pression-déformation en fonction du nombre de Mach de distorsion (CCM) permet une amélioration de la prédiction des composantes diagonales de l’anisotropie.

Les prédictions du champ moyen pour des couches de mélange, jusqu’à une valeur du nombre de Mach convectif de $M_c = 0.7$, sont en accord satisfaisant avec l’expérience même dans le cas où les corrections de compressibilité ne sont pas utilisées. La correction structurelle (CCM) permet, elle, de capter de manière qualitative l’influence du nombre de Mach sur l’anisotropie diagonale, observée dans l’expérience.

Les calculs d’écoulements pariétaux à grande vitesse montrent l’avantage d’un modèle de transport pour les tensions turbulentes quand on s’intéresse à un champ de déformation complexe. Cependant, la méthode développée ici, utilisant une approche par lois de parois, reste limitée pour la représentation des zones décollées.

mots clés: *turbulence, effets de compressibilité, fermeture au second ordre, système hyperbolique non-conservatif, solveur de Riemann approché, onde de choc*

Abstract

The present study is a contribution towards a calculation method for high-speed turbulent flow. We are focusing our attention on second-moment closures for the Reynolds stress tensor. Existing compressibility models are investigated with respect to realizability and by individual comparison with available experimental and DNS data.

The hyperbolic part of the system of transport equations for the mean quantities and the turbulent stresses (including production terms) under non-conservative form is analysed and the Riemann problem is solved using approximative jump relations assuming a linear path across shock waves. Two numerical methods, based on a characteristic decomposition of fluxes (or variables, respectively) of the coupled system, are proposed and compared to an essentially Euler-based decoupling technique. The approach that accounts for the direct coupling of mean and turbulent variables is shown to give a better representation of additional characteristic waves.

The calculation of homogeneous shear flow at high Mach number shows that existing Reynolds stress transport models cannot account correctly for the combined energetic and structural effects of compressibility. An adapted model for the deviatoric part of the pressure-strain correlation as a function of distortion Mach number (CCM) gives improved predictions of diagonal anisotropy levels.

The predictions for the spread rate of a plane mixing layer up to a convective Mach number of $M_c = 0.7$ agree with experimental values without using specific compressibility models. The compressibility-related pressure-strain correction (CCM) allows to account for the experimentally observed increase in diagonal anisotropy at high M_c in a qualitative manner.

Calculations of high-speed wall-bounded flows demonstrate the merits of a Reynolds stress transport model in the case of complex strain fields. However, the use of wall functions constitutes a severe limitation in a massively separated flow.

key words: *turbulence, effects of compressibility, second-moment closure, hyperbolic systems under non-conservative form, approximate Riemann solver, shock wave*

Je remercie M. Denis Jeandel, directeur de thèse, de m'avoir orienté dans mes recherches.

Pour sa disponibilité, son aide précieuse et la bonne ambiance de travail qu'il a su créer, mes sincères remerciements s'adressent à M. Gilles Brun qui a encadré cette étude.

J'exprime ma plus profonde reconnaissance aux deux rapporteurs, MM. Jean Paul Dussauge et Rainer Friedrich, pour l'attention qu'ils ont apporté à ce travail.

Je tiens à souligner l'importance de la collaboration avec M. Jean-Marc Hérard (EDF, Chatou) pour mon travail de thèse, notamment en ce qui concerne le sujet de réalisabilité et l'analyse du système hyperbolique.

J'exprime également ma gratitude aux membres du jury qui ont accepté d'examiner ce travail: MM. Jean Pierre Bertoglio, Claude Cambon et William P. Jones.

Je remercie les chercheurs qui ont mis à disposition leurs bases de données de simulation numérique directe et qui m'ont aidé avec l'analyse statistique: Claude Cambon et Agnes Simone (LMFA), Prof. S. Sarkar (University of California, San Diego), Dr. M. Rogers (NASA Ames), Prof. G. Blaisdell (Purdue University).

Schließlich richtet sich mein Dank an die mich multinational unterstützenden Herren: Hirschbiegel, Reuther, Sattler und Schmitz.

Table des matières

Introduction	1
1 Etude bibliographique	3
1.1 Les équations instantanées	3
1.2 Formulation statistique	4
1.3 Discussion des termes inconnus	5
1.4 Fermeture du second ordre pour la tension turbulente	7
1.4.1 L'équation de transport de la tension de Reynolds	8
1.4.2 La corrélation entre pression et déformation pour un fluide incompressible	9
1.4.3 La corrélation entre pression et déformation pour un fluide compressible	13
1.4.4 La dissipation turbulente	17
1.4.5 Les termes de transport diffusifs	21
1.4.6 Les corrélations avec la densité	25
1.5 La réalisabilité de la fermeture du second ordre	28
1.5.1 Les contraintes fondamentales de la réalisabilité	29
1.5.2 Les contraintes concernant la formulation du modèle	30
1.5.3 La conformité de l'approche avec la réalisabilité	32
1.6 Fermeture du premier ordre pour la tension turbulente	34
1.6.1 Existence d'une relation constitutive	34
1.6.2 La relation constitutive pour la tension de Reynolds	34
1.6.3 Détermination des échelles de la turbulence	37
2 Résolution numérique	38
2.1 La formulation du problème — généralités	41
2.2 Traitement du système de convection	42
2.2.1 Le problème de Riemann	45
2.2.2 Un solveur de Riemann approché pour le système non-conservatif	48
2.2.3 Un solveur de Riemann approché pour le pseudo-système de convection	51
2.2.4 Tests quasi-monodimensionnels des solveurs numériques	53
2.2.5 Augmentation de la précision spatiale	56
2.2.6 La situation multi-dimensionnelle	57

2.3	Traitement des termes visqueux	59
2.3.1	Le vecteur des flux	60
2.3.2	Les termes sources	60
2.4	Une méthode de résolution implicite	61
2.4.1	Construction du résidu implicite linéarisé	61
2.4.2	Prépondérance des flux convectifs	62
2.4.3	Précision spatiale	63
2.4.4	Couplage entre les équations	63
2.4.5	Résolution itérative du système linéaire	65
2.4.6	Quelques remarques sur la convergence de la méthode implicite	65
2.5	Traitement des conditions aux limites	66
2.5.1	La formulation du bilan à la frontière	67
2.5.2	Les frontières libres	68
2.5.3	Le traitement des parois solides	69
2.5.4	Une condition de périodicité	73
3	Etude des écoulements turbulents homogènes	74
3.1	La motivation pour l'étude des écoulements homogènes	74
3.2	Ecoulement homogène cisaillé d'un fluide incompressible	75
3.2.1	Caractéristiques de l'écoulement	75
3.2.2	Comportement des modèles du second ordre	77
3.3	L'écoulement homogène cisaillé d'un fluide compressible	79
3.3.1	Tendances observées dans les simulations directes	80
3.3.2	Prédictions avec la fermeture du second ordre	86
3.4	Conclusion	89
4	Etude des écoulements inhomogènes, libres	91
4.1	Introduction	91
4.2	La couche de mélange en régime incompressible	91
4.2.1	Présentation du cas test	92
4.2.2	Résultats des calculs	93
4.2.3	Conclusion	95
4.3	La couche de mélange en régime compressible	96
4.3.1	Influence de la compressibilité sur le développement de l'écoulement	96
4.3.2	Les approches pour expliquer la stabilisation de la couche de mélange	99
4.3.3	L'analogie entre le cisaillement homogène et la couche de mélange	100
4.3.4	Les études numériques précédentes	101
4.3.5	Les calculs effectués avec nos fermetures du second ordre	102
4.3.6	Conclusion	106
5	Ecoulements compressibles et parois	108

5.1	Introduction	108
5.2	La couche limite générique	109
5.2.1	L'écoulement en régime incompressible	109
5.2.2	L'écoulement supersonique	110
5.3	La couche limite sous l'influence d'un gradient de pression adverse	113
5.3.1	Considérations préliminaires	113
5.3.2	Le cas simulé numériquement	114
5.3.3	Résultats du calcul	115
5.3.4	Conclusion	115
5.4	Interaction entre onde de choc et couche limite	116
5.4.1	Considérations préliminaires	116
5.4.2	Le cas simulé numériquement	117
	Conclusion	122
	Bibliographie	125
	Figures	138
	A Les modèles de pression-déformation utilisés	263
	B Détermination des coefficients de la diffusion	266
	C Remarques sur la réalisabilité	267
C.1	Caractérisation entropique	267
C.2	La réalisabilité forte des équations exactes	268
C.3	Conformité des propositions	269
C.3.1	Les corrélations avec la pression	269
C.3.2	La dissipation	270
C.3.3	Le flux de masse	272
	D Analyse du système convectif	273
D.1	Les matrices du système	273
D.2	Positivité du déterminant de la tension de Reynolds	274
D.3	Diagonalisation du système de convection	274
D.4	Chemin linéaire	278
D.5	Solution des relations de saut	279
D.6	Coefficients de projection	280
D.7	La diagonalisation du pseudo-système de convection	281
D.8	La moyenne de Roe	282
	E Quelques détails numériques	284
E.1	Matrice implicite pour un scalaire passif	284

E.2	Solution des relations de compatibilité	285
E.3	Les flux à la paroi solide	286
E.4	Vérification numérique de la réalisabilité	287
F	Passage d'un tourbillon au travers de la frontière	288
F.1	Champ initial	288
F.2	Paramètres du calcul	289
F.3	Résultats	289
F.4	Conclusions du calcul	290
G	La condition d'entrée pour le taux de dissipation	295
H	Le flux de masse turbulent dans une couche de mélange	299
H.1	Estimation de l'importance des expressions dans les équations moyennes	299
H.2	Test des modèles	300
H.2.1	Le modèle algébrique isotrope	300
H.2.2	Le modèle algébrique non-isotrope	300
I	Interaction: onde de choc et turbulence	301
I.1	Introduction	301
I.2	Le cas simulé numériquement	301
I.3	Comparaison: calcul statistique – simulation directe	302

Nomenclature

$a_{0...9}$	coefficients du modèle pour la pression-déformation
a_{ij}^{ki}	fonction tensorielle associée à la partie rapide de la corrélation pression-déformation
A	matrice du système hyperbolique
$\mathcal{A}$	matrice linéarisée du système de convection et de production
$\mathcal{A}_{ij}$	fonction tensorielle associée à la partie lente de la pression-déformation
b	épaisseur de la couche de mélange
b'_{mn}, b_{mn}	anisotropie du tenseur de Reynolds exprimée en moyenne de Reynolds, moyenne de Favre
c_f	coefficient de frottement pariétal
c_p, c_v	chaleurs massiques à pression, volume constant
$C_6, C_{\Delta m}, C_{R1}, C_{R2}, C_{HN}, C_D, C_L, C_s, C_e, C_{\tau 1}, C_{\tau 2}, C_{\tau 3}, C_{\tau 4}$	constantes des modèles pour différents termes inconnus
C_i	cellule discrète (volume fini)
$C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, C_{\varepsilon 3}$	coefficients de l'équation modèle de la dissipation turbulente
C_μ	coefficient de viscosité de la turbulence
d	distance de la paroi au premier nœud du maillage
d_{ij}	anisotropie de la dissipation turbulente
$\mathcal{D}$	domaine d'intégration
e	énergie interne
e_T	énergie totale
$\vec{F}$	vecteur des flux convectifs
$\mathcal{F}_{ij}$	fonction de flux numérique entre deux points P_i et P_j
G	contribution de la production turbulente à la matrice du système
$\vec{H}$	vecteur des expressions associées à la production de turbulence
H_t	enthalpie totale
$\overline{\overline{I}}$	matrice d'identité
I_R^i	invariant de Riemann
$II', III'; II, III; II_b, III_b$	invariants de l'anisotropie du tenseur de Reynolds exprimés en moyenne de Reynolds (1.29); moyenne de Favre (A.2); forme alternative (A.3)
I_A, II_A, III_A	invariants du modèle de Ristorcelli (1.94)
I_R, II_R, III_R	invariants du tenseur de Reynolds (paragraphe 1.5.1)

J	matrice jacobienne du “pseudo-système” de convection
k	énergie cinétique turbulente
Kn	nombre de Knudsen
l	longueur caractéristique
$\vec{l}$	vecteur propre à gauche
L	matrice de passage entre variables primitives et variables caractéristiques
L_x, L_y	dimensions du domaine d’intégration suivant l’axe x , l’axe y
$\mathcal{L}_i$	onde caractéristique
M	matrice de passage entre variables conservatives et variables primitives
M_∞, M_{Euler}	nombre de Mach moyen
M_1, M_2	nombres de Mach spécifiques du système de convection et production
M_t, M^*	nombres de Mach de la turbulence (3.13), (2.12)
$\mathcal{M}_{ijkl}$	fonction tensorielle associée à la partie rapide de la pression-déformation
n	coefficient polytropique
$\vec{n}_{ij}$	vecteur unitaire normal associé au segment entre les points P_i et P_j
N	nombre de nœuds du maillage
p	pression statique
P_i	point discret du maillage
$\vec{P}, \vec{V}, \vec{Y}$	vecteur des variables primitives (2.5), (D.24), (2.46)
P_{ij}	tenseur de production du mouvement turbulent par le champ moyen
$\mathcal{P}$	tenseur de production normalisé (3.5)
Pr	nombre de Prandtl
Pr_t	nombre de Prandtl turbulent
q_i	flux de chaleur dans la direction x_i
$\vec{Q}$	vecteur des variables “pseudo-conservatives”
Q_{ij}	valeur des variables “pseudo-conservatives” à l’interface entre P_i et P_j
$\vec{r}$	vecteur propre à droite
R	constante d’un gaz parfait
$\vec{R}$	vecteur des flux visqueux et thermiques
R_{ij}	composante ij de la corrélation double de vitesses
$\mathcal{R}$	matrice de diagonalisation du système de convection et de production
Res	résidu d’un pas itératif
Re, Re_θ	nombres de Reynolds
Re_l, Re_t	nombres de Reynolds de la turbulence
s^*, s	fonction d’entropie instantanée, moyenne
$\bar{s}_{ij}, s_{ij}$	partie symétrique de la déformation en moyenne de Reynolds, Favre
S	taux de cisaillement
$\vec{S}$	vecteur des termes sources
$S_{\varepsilon 1}, S_{\varepsilon 2}$	termes sources de dilatation de l’équation de la dissipation turbulente
S_{ij}	tenseur de déformation
t	temps physique

Δt	pas de temps discret
T	température; matrice de rotation du repère (annexe D)
T_t	température totale
T_i	élément fini
$\mathcal{T}_{ijk}$	somme des termes de transport turbulent du tenseur de Reynolds
$u_i; (u, v, w)$	composantes du vecteur de vitesse
u_τ	vitesse de frottement
u_c	vitesse de van Driest
V_{C_i}	volume de la cellule C_i
$\vec{W}$	vecteur des variables caractéristiques
$x_i; (x, y, z)$	coordonnées cartésiennes
X_{ij}	somme des termes de redistribution du tenseur de Reynolds
y^+	coordonnée caractéristique de la paroi
Y	somme des termes de transfert d'énergie du tenseur de Reynolds
Y_P	rapport entre transfert d'énergie cinétique turbulente et sa production
$\vec{z}$	vecteur paramétrique

Symboles grecs

γ	rapport des chaleurs massiques ($\gamma \equiv c_p/c_v$)
Γ	frontière du domaine d'intégration
δ	épaisseur de la couche de mélange (chapitre 4); épaisseur de la couche limite (chapitre 5)
δ_{ij}	symbole de Kronecker
ϵ_{ijkl}	tenseur de permutation
$\overline{\epsilon}_{ij}, \hat{\epsilon}_{ij}, \epsilon_{ij}$	tenseur de dissipation turbulente en régime incompressible, exprimée par la moyenne de Reynolds, exprimée par la moyenne de Favre
$\overline{\epsilon}, \epsilon$	taux de dissipation turbulente en régime incompressible, en régime compressible (moyenne de Favre)
η	rapport entre l'échelle de temps de déformation symétrique et l'échelle de temps turbulent (chapitre 1); coordonnée transversale normalisée de la couche de mélange (chapitre 4)
θ	échelle de temps caractéristique des grands échelles de la turbulence
κ	constante de von Kármán
λ	conductivité de chaleur
λ_i	valeurs propres du système hyperbolique (chapitre 2)
Λ	matrice diagonale des valeurs propres du système de convection et de production (chapitre 2); taux de croissance temporelle de l'énergie cinétique turbulente (chapitre 3)
μ, ν	viscosité dynamique, cinématique
μ_t	viscosité turbulente

ξ	rapport entre l'échelle de temps de déformation antisymétrique et l'échelle de temps turbulent
Π_{ij}^r, Π_{ij}^s	partie rapide, lente du tenseur symétrique de pression-déformation
Π_1, Π_2, Π_3	invariants de la déformation moyenne
ρ	masse volumique
$\sigma_\varepsilon, \sigma_R$	constante du modèle de diffusion de la dissipation, du tenseur de Reynolds
σ_ρ	nombre de Schmidt du modèle isotrope pour le flux de masse turbulent
σ	vitesse de déplacement d'une discontinuité
τ_{ij}	tenseur des contraintes visqueuses
τ_a	échelle de temps acoustique
τ_d	échelle de temps de déformation moyenne
τ_t	échelle de temps turbulent
τ_w	contrainte pariétale
ϕ_i	fonction de base de la représentation par éléments finis
ϕ_{ij}^r, ϕ_{ij}^s	partie rapide, lente de la corrélation entre pression et déformation
Φ	fonction de dissipation (annexe C)
ψ_i	fonction caractéristique de la cellule C_i
Ψ	fonction "limiteur" (chapitre 2); fonction de courant (chapitre 5 et annexe F)
$\bar{\omega}_{ij}, \omega_{ij}$	partie antisymétrique de la déformation en moyenne de Reynolds, Favre
Ω	volume d'intégration
Ω_i	vitesse de rotation

Abréviations

CFL	critère de Courant-Friedrichs-Levy
DNS	<i>direct numerical simulation</i>
FDS	<i>flux-difference-splitting</i>
FLT	modèle de pression-déformation de Fu, Launder et Tselepidakis (A.3)
FLT-EL	modèle de pression-déformation de El-Baz et Launder (1.40)
LRR	modèle de pression-déformation de Launder, Reece et Rodi (A.1)
LRR-CCM	modèle de pression-déformation d'après Cambon, Coleman et Mansour (3.33)
MUSCL	<i>monotone upstream extrapolation for scalar conservation laws</i>
RDT	<i>rapid distortion theory</i>
SL90	modèle de pression-déformation de Shih et Lumley (A.4)
SSG	modèle de pression-déformation de Sarkar, Speziale et Gatski (A.2)
SZL	relation constitutive de Shih, Zhu et Lumley (1.118)
VDS	<i>variable-difference-splitting</i>

Notations

$\overline{()}$	moyenne d'ensemble (également $\langle () \rangle$); moyenne arithmétique dans le chapitre 2
$\widetilde{()}$	moyenne d'ensemble pondérée par la masse volumique
$()'$	fluctuation
$()''$	fluctuation associée à la moyenne pondérée par la masse volumique
$()^C$	compressible
$()^I$	incompressible
$()_s$	solénoïdal
$()_d$	dilatationnel
$()^{\rho v}$	à masse volumique variable
$()_{,k}$	dérivée spatiale dans la direction x_k
$()_{(\alpha)}$	axe principal – vecteur propre
$()_r, ()_l$	états à droite, gauche d'une discontinuité
$()_R, ()_L$	états à droite, gauche de la discontinuité initiale du problème de Riemann
$()^{dev}$	partie déviatrice
$()^n$	étape temporelle n
$()_w$	pariétal
$[]$	saut d'une expression

Introduction

L'étude des écoulements turbulents à haut nombre de Mach est motivée par de nombreuses applications industrielles, en particulier dans le secteur aéronautique. Dans des écoulements supersoniques en aérodynamique externe, les paramètres globaux (e.g. coefficients de frottement et pression) sont souvent très sensibles à la structure du champ des fluctuations turbulentes [1]. Une autre configuration d'intérêt particulier est l'écoulement dans un moteur à flux continu avec une chambre de combustion supersonique où le processus de mélange entre les gaz est étroitement lié aux caractéristiques de la turbulence [2]. Une méthode de prédiction pour ce type d'écoulement doit donc permettre la représentation adéquate des caractéristiques du mouvement turbulent soumis aux effets de compressibilité.

Dans l'optique de l'application à des écoulements inhomogènes à grands Reynolds dans des géométries complexes, une description statistique de la turbulence reste à l'heure actuelle indispensable induisant un besoin de modélisation de moments statistiques inconnus [3]. Dans cette étude, la modélisation est effectuée en s'appuyant sur des équations de transport du tenseur de Reynolds. En régime incompressible, des méthodes de calcul à l'aide de modèles de fermeture au second ordre ont acquis un certain degré de maturité qui se manifeste par de bonnes prédictions de divers écoulements [4, 5, 6]. Quand on passe à des nombres de Mach plus élevés, on est confronté à des phénomènes de compressibilité qui constituent une complexité supplémentaire quant à la modélisation de la turbulence et à la résolution numérique du système d'équations. Ces deux sujets d'étude sont simultanément approfondis dans le cadre de ce mémoire. Un travail particulier a été notamment réalisé sur le couplage des deux aspects.

Par définition, les effets de compressibilité deviennent significatifs lorsque les variations de la vitesse sont importantes par rapport à la vitesse du son. Dans ces situations, les variations du volume d'un élément de fluide (dilatation ou compression) sont associées à des variations de pression. Ceci est à distinguer d'autres mécanismes responsables de variations de masse volumique, par exemple le transfert de chaleur ou le mélange de différents gaz [2], qui peuvent éventuellement se superposer aux effets du nombre de Mach.

Un autre trait fondamental des écoulements compressibles est la présence d'ondes se déplaçant à vitesse finie dans le fluide en mouvement ce qui implique un caractère directionnel de propagation de l'information notamment au niveau des fluctuations de pression.

Pour ce qui concerne plus particulièrement les caractéristiques turbulentes de l'écoulement, ces deux effets (dilatation et rôle de la pression) se traduisent par des processus de transfert énergétique réversibles (exprimé par la corrélation entre pression et dilatation) ou irréversibles (dissipation dilatationnelle) et par des processus structuraux (modification de l'anisotropie du tenseur de Reynolds, par exemple).

Certains phénomènes de compressibilité de la turbulence ont été identifiés dans des cas d'écoulement homogène au moyen de simulations numériques directes [7, 8, 9] et dans des cas d'écoulement inhomogène de type couche de mélange par voies expérimentale [10, 11, 12] ou numérique [13, 14]. Cette dernière technique a contribué à la compréhension des phénomènes et a tout particulièrement aidé à la mise au point des modèles. Afin d'évaluer la performance de ces modèles pour des écoulements à cisaillement dominant, un ensemble de configurations de complexité croissante

(cisaillement homogène, zone de mélange inhomogène, couche limite avec ou sans perturbations supplémentaires) est étudié dans ce travail. Notre analyse est surtout guidée par la comparaison entre les prédictions des modèles et les données d'expérience (physique ou numérique).

Certaines contraintes fondamentales, portant sur les corrélations inconnues, peuvent être déduites directement des équations exactes. Ces conditions, dites de "réalisabilité", constituent un outil qui a aidé au développement de modèles consistants du second ordre en régime incompressible [15, 16] et pour un mélange de gaz à basse vitesse [17]. Il nous semble important de formuler l'ensemble des relations de réalisabilité pour un fluide compressible et de discuter leurs implications pour chacune des corrélations à modéliser.

L'application des modèles de fermeture au second ordre à des situations variées et parfois complexes impose la mise en œuvre d'une méthode de résolution numérique robuste et précise. Le système d'équations aux dérivées partielles couplées issu de la modélisation renferme simultanément des opérateurs de type hyperbolique et elliptique. Il apparaît que la dominante hyperbolique du système (renforcée en supersonique) nécessite de mettre en évidence le plus explicitement possible les éléments fondamentaux du système de caractéristiques. Celui-ci a été ici obtenu en retenant essentiellement la partie Euler des équations de Navier-Stokes moyennées statistiquement, et la partie convection production des équations du tenseur de Reynolds. Des choix seront à faire quant à la prise en compte des moments statistiques d'ordre deux dans la résolution numérique par la méthode des caractéristiques.

- Le premier chapitre de ce mémoire présente une revue bibliographique des modèles de fermeture au second ordre, en particulier dans le cas à haut nombre de Mach. La théorie de la réalisabilité est appliquée à la situation particulière d'un fluide compressible.
- Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du système hyperbolique de convection et de production issu de la fermeture au second ordre. Le développement d'une méthode de résolution numérique pour le système d'équations complet sur maillage non-structuré est présenté. Différents tests de validation sont documentés.
- Nous étudions ensuite dans le troisième chapitre l'influence du nombre de Mach sur un écoulement homogène cisailé. Des bases de données de simulation numérique directe sont utilisées pour l'évaluation a priori de modèles pour la corrélation pression-déformation et pour la comparaison avec les résultats de nos calculs avec différents modèles de compressibilité.
- Dans le chapitre 4 nous présentons nos résultats de calculs de la zone de mélange à différentes valeurs du nombre de Mach convectif. Nous nous intéressons en particulier à la capacité des fermetures au second ordre de prédire les tendances observées dans l'expérience en ce qui concerne le taux d'épanouissement et l'anisotropie du tenseur de Reynolds.
- Enfin, l'étude des écoulements pariétaux sera abordée dans le chapitre 5, d'abord par le calcul des couches limites établies dans différents régimes du nombre de Mach. Nous présentons ensuite des résultats du calcul d'une couche limite soumise à un système d'ondes de compression avant de conclure avec l'étude d'un cas d'interaction forte entre une couche limite et une onde de choc oblique.

Chapitre 1

Etude bibliographique

1.1 Les équations instantanées

Nous considérons des situations où la plus petite échelle macroscopique de l'écoulement (associée aux structures de Kolmogorov) est beaucoup plus grande que la plus grande échelle microscopique du fluide (libre parcours moyen des molécules). L'inverse du rapport entre ces deux dimensions caractéristiques est exprimé par le nombre de Knudsen Kn [18]. Nous supposons donc un nombre de Knudsen suffisamment élevé ($Kn \gg 1$) pour permettre une description du processus macroscopique par l'approche d'un milieu continu. Nous utilisons ainsi les équations de Navier-Stokes.

Soient x_i les coordonnées cartésiennes avec les indices $i = 1, 2, 3$, t le temps, u_i la composante de la vitesse dans la direction x_i , ρ la masse volumique, p la pression, e_T l'énergie totale, T la température, μ la viscosité dynamique, ν la viscosité cinématique ($\nu \equiv \mu/\rho$), λ la conductivité thermique et c_p et c_v les chaleurs massiques respectives à pression et à volume constant. On utilisera les notations $\partial_t \equiv \partial()/\partial t$ et $(\cdot)_{,j} \equiv \partial()/\partial x_j$ pour les dérivées partielles; d_t est l'opérateur convectif $d_t \equiv \partial_t(\cdot) + u_k(\cdot)_{,k}$; δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker; les indices répétés impliquent une sommation sauf quand il s'agit des indices grecs.

La forme instantanée des équations de bilan de masse, du vecteur de quantité de mouvement et d'énergie totale est la suivante [19]:

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho) + (\rho u_j)_{,j} &= 0 \\ \partial_t(\rho u_i) + (\rho u_i u_j + \delta_{ij} p)_{,j} &= (\tau_{ij})_{,j} \\ \partial_t(\rho e_T) + (\rho e_T u_j + u_j p)_{,j} &= (u_i \tau_{ij} - q_j)_{,j} \end{aligned} \quad . \quad (1.1)$$

Pour un fluide newtonien, le tenseur des contraintes moléculaires est une fonction linéaire de la déformation S_{ij} :

$$\tau_{ij} = \mu S_{ij} = \mu \left(u_{i,j} + u_{j,i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} u_{k,k} \right) \quad . \quad (1.2)$$

Le flux de chaleur est exprimé par la loi de Fourier:

$$q_i = -\lambda T_{,i} \quad . \quad (1.3)$$

L'énergie totale est définie par la somme de l'énergie interne e et de l'énergie cinétique:

$$e_T = e + \frac{1}{2} u_i u_i = c_v T + \frac{1}{2} u_i u_i \quad . \quad (1.4)$$

Le fluide est supposé parfait avec la loi d'état suivante:

$$p = \rho (\gamma - 1) c_v T \quad , \quad (1.5)$$

où γ est le rapport entre les chaleurs massiques. Les coefficients thermodynamiques c_v , c_p , γ sont pris constants. La viscosité est obtenue par la loi de Sutherland [19]:

$$\frac{\mu}{\mu_{ref}} = \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^\alpha \frac{T_{ref} + S}{T + S} \quad , \quad (1.6)$$

avec $\alpha = 1.5$ et $S = 110K$ pour l'air. La conductivité thermique est reliée à la viscosité par un nombre de Prandtl constant

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} \quad , \quad (1.7)$$

qui prend la valeur 0.7 pour l'air.

1.2 Formulation statistique

L'appréhension des écoulements turbulents pleinement développés confronte aujourd'hui encore le chercheur et l'ingénieur au problème du large spectre des échelles spatiales et temporelles en présence. L'approche statistique reste ainsi encore particulièrement précieuse dans la mesure où elle permet d'accéder à des grandeurs moyennes dont la régularité spatiale et temporelle est plus grande. La non-linéarité des équations de Navier-Stokes reporte alors les difficultés de simulation sur les moments statistiques avec la nécessité de faire intervenir des modèles assurant une fermeture à un ordre approprié de la chaîne infinie des équations de moments.

L'approche directe des équations de Navier-Stokes est par ailleurs aujourd'hui en très grand progrès, du fait du développement des algorithmes performants mais aussi surtout du fait de l'accroissement considérable de la puissance des moyens de calcul. On peut alors en principe rejoindre l'analyse statistique en effectuant des moyennes sur un ensemble de réalisations d'expériences numériques. Il en résulte une possibilité de confronter le modèle statistique aux résultats de la simulation directe qui, de fait, se substitue à l'expérience de laboratoire difficile à réaliser dans certaines circonstances.

Par la suite, on rappelle brièvement les opérations qui mènent aux équations statistiques avant de discuter le problème de fermeture.

On peut définir une moyenne d'ensemble d'une grandeur ϕ comme la moyenne d'un nombre N de réalisations indépendantes,

$$\bar{\phi}(x_i, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi_n(x_i, t) \quad , \quad (1.8)$$

où ϕ_n est la valeur de ϕ déterminée lors d'une réalisation particulière n . L'hypothèse d'ergodicité [20] permet d'obtenir la moyenne $\bar{\phi}$ par une moyenne temporelle dans un écoulement statistiquement stationnaire ou par une moyenne spatiale dans un écoulement homogène. Toute variable ϕ peut être décomposée en valeur moyenne et fluctuation (décomposition de Reynolds):

$$\phi(x_i, t) = \bar{\phi}(x_i, t) + \phi'(x_i, t) \quad , \quad (1.9)$$

avec $\overline{\phi'} = 0$. Dans le cadre des écoulements compressibles, une moyenne pondérée par la masse volumique est souvent utilisée:

$$\tilde{\phi}(x_i, t) = \frac{\bar{\rho} \phi}{\bar{\rho}} \quad , \quad (1.10)$$

ce qui donne la décomposition suivante

$$\phi(x_i, t) = \tilde{\phi}(x_i, t) + \phi''(x_i, t) \quad , \quad (1.11)$$

où la moyenne de la fluctuation n'est pas identiquement nulle $\overline{\phi''} \neq 0$.

Par une combinaison des deux moyennes, les équations résultantes peuvent être considérablement simplifiées par rapport à une formulation qui porte uniquement sur la décomposition de Reynolds. Cette méthode, dite décomposition de Favre [21], consiste à décomposer la pression et la masse volumique en une moyenne centrée selon (1.9) et à décomposer toute autre grandeur (vitesse, énergie, température) en moyenne pondérée par la masse volumique selon (1.11).

Introduisant l'hypothèse que les fluctuations de la viscosité et de la conductivité de chaleur sont négligeables, la forme ouverte du système des équations de Navier-Stokes statistiquement moyennées au sens de Reynolds est la suivante:

$$\begin{aligned}
\partial_t(\bar{p}) + (\bar{p}\tilde{u}_j)_{,j} &= 0 \\
\partial_t(\bar{p}\tilde{u}_i) + (\bar{p}\tilde{u}_i\tilde{u}_j + \delta_{ij}\bar{p})_{,j} &= (\mu\tilde{S}_{ij})_{,j} \\
&\quad + (\mu\tilde{S}_{ij}'' - \bar{p}\tilde{u}_i''\tilde{u}_j'')_{,j} \\
\partial_t(\bar{p}\tilde{e}_T) + (\bar{p}\tilde{e}_T\tilde{u}_j + \tilde{u}_j\bar{p})_{,j} &= (\tilde{u}_i\mu\tilde{S}_{ij} + \lambda\tilde{T}_{,j})_{,j} \\
&\quad - (\bar{p}\tilde{e}_T''\tilde{u}_j'' + \bar{p}\tilde{u}_i''\tilde{u}_j'')_{,j} \\
&\quad - (\frac{1}{2}\bar{p}\tilde{u}_i''\tilde{u}_i''\tilde{u}_j'' + \bar{p}'\tilde{u}_j'' - \mu\tilde{u}_i''\tilde{S}_{ij}'')_{,j} \\
&\quad - (\bar{p}\tilde{u}_j'' - \lambda\tilde{T}_{,j}'' - \mu\tilde{u}_i\tilde{S}_{ij}'')_{,j}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

avec les lois d'état pour la pression moyenne

$$\bar{p} = (\gamma - 1)c_v\bar{\rho}\tilde{T} \quad , \tag{1.13}$$

et l'énergie totale

$$\tilde{e}_T = c_v\tilde{T} + \frac{1}{2}\tilde{u}_i\tilde{u}_i + \frac{1}{2}\widetilde{u_i''u_i''} \quad , \tag{1.14}$$

où $\widetilde{u_i''u_i''}/2 \equiv k$ représente l'énergie cinétique turbulente. Les lois de variation pour la viscosité et pour la conductivité de chaleur sont étendues aux valeurs moyennes. Nous précisons la définition des parties décomposées du tenseur de déformation:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_{ij} &\equiv \tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\tilde{u}_{k,k} \\
\tilde{S}_{ij}'' &\equiv u_{i,j}'' + u_{j,i}'' - \frac{2}{3}\delta_{ij}u_{k,k}'' \quad .
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Dans le système (1.12), la première ligne de chaque équation est constituée des termes connus tandis que les lignes suivantes contiennent des corrélations inconnues. Ce système faisant explicitement apparaître les deux types de moyennes est moins complexe et d'une structure plus proche de la forme instantanée que le système équivalent obtenu en faisant apparaître exclusivement la décomposition de Reynolds. Pour l'interprétation des données expérimentales, il faut tenir compte du fait que différentes méthodes de mesure correspondent aux deux définitions de la moyenne. L'anémométrie par la méthode de laser Doppler (LDA), par exemple, donne des moyennes de Reynolds pour la vitesse, tandis que les méthodes de mesure par fil chaud produisent en général des grandeurs pondérées par la masse (voir les références [18, 22, 23]).

1.3 Discussion des termes inconnus

Par le processus de moyenne des équations de Navier-Stokes, un certain nombre des nouveaux termes a été généré, qui représentent des inconnues supplémentaires du système statistique (1.12), à savoir:

- $\overline{\rho u_i'' u_j''}$ tension de Reynolds,
- $\overline{\rho e'' u_j''}$ flux de chaleur turbulent,
- $\overline{\rho u_i'' u_i'' u_j''}$ corrélation triple de vitesse,
- $\overline{p' u_j''}$ corrélation pression-fluctuation de vitesse,
- $\overline{\mu u_i'' S_{ij}}$ dissipation visqueuse par la fluctuation de vitesse,
- $\overline{\rho u_i''}$ flux de masse turbulent,
- $\lambda \overline{T''_{,j}}$ flux de chaleur lié à la corrélation température-masse volumique.

La tension de Reynolds constitue la corrélation principale car elle détermine en grande partie le comportement du champ moyen de vitesse. Dans la fermeture du premier ordre, une relation algébrique relie la tension turbulente au champ de vitesse moyenne; la fermeture de second ordre est basée sur des équations de bilan pour les composantes de la corrélation double de vitesse; l'approche de troisième ordre – qui consiste à modéliser et résoudre des équations pour les composantes du tenseur de troisième ordre des corrélations triples (par exemple [24]) – semble à l'heure actuelle très complexe.

La présente étude se situera au niveau des équations des moments du second ordre (voir le paragraphe 1.4). Différentes études du premier ordre seront néanmoins utilisées pour des raisons de comparaison (voir le paragraphe 1.6).

En ce qui concerne le vecteur du flux de chaleur turbulent, on pourrait faire des remarques très analogues à celles évoquées à propos de la corrélation double de vitesse. La fermeture peut être portée à différents niveaux jusqu'au modèle de transport par une équation de bilan aux dérivées partielles (voir par exemple la référence [25] pour la forme exacte de l'équation de transport). Il se pose la question suivante: à quel niveau devrait-on effectuer la fermeture de la corrélation thermique par rapport à la fermeture de la corrélation cinématique? La réponse dépend de la nature des écoulements qu'on envisage de traiter et elle est en même temps un compromis entre la complexité du modèle (en vue des besoins informatiques pour sa résolution numérique) et sa performance.

Dans notre étude on se contentera d'un modèle thermique de type algébrique avec un nombre de Prandtl turbulent Pr_t constant:

$$-\overline{\rho e'' u_j''} = \frac{\mu_t}{Pr_t} \widetilde{e_{,j}} \quad , \quad (1.16)$$

où le coefficient de transport μ_t est une viscosité turbulente qui est introduite ci-dessous. Pour la plupart des applications d'aérodynamique externe, ce modèle simple est suffisant. Quand on traite des phénomènes tels que la combustion turbulente ou des écoulements sur des parois fortement chauffées ou refroidies, il serait certainement utile de raffiner cette approche thermique. Ainsi, He *et al.* [26] traitent le sujet d'un nombre de Prandtl variable; un modèle algébrique à deux équations de transport pour la variance de la température et sa dissipation a été proposé par Sommer *et al.* [27]; pour des modèles aux équations de transport pour le flux des scalaires, le lecteur pourrait se référer aux travaux de Lumley *et al.* [15, 17, 28]. Pour notre cas, on notera quelques limitations du modèle à nombre de Prandtl constant lorsqu'on traite une couche limite sur paroi athermane où l'écoulement extérieur approche la limite hypersonique (paragraphe 5.2.2).

La corrélation triple de vitesse, la diffusion par la pression et la diffusion turbulente visqueuse sont des termes qui réapparaissent dans les équations de transport pour les tensions de Reynolds. Leur modélisation sera présentée par la suite dans le paragraphe 1.4.5.

La corrélation entre les fluctuations de température et de la masse volumique est l'analogue du flux de masse turbulent. Ces deux termes représentent la différence entre la moyenne de Reynolds et la moyenne de Favre. On discutera la modélisation de ces corrélations dans le paragraphe 1.4.6.

1.4 Fermeture du second ordre pour la tension turbulente

Rotta [29] a été l'un des premiers à proposer une fermeture pratique des équations de transport de la tension de Reynolds d'un fluide incompressible, sa modélisation de la partie non-linéaire de la corrélation entre pression et déformation étant encore souvent utilisée. Cependant, les moyens de calcul de l'époque ne permettaient pas la solution numérique du système des équations statistiques. Il a fallu attendre une vingtaine d'années pour les premières résolutions des équations statistiques d'ordre deux [30, 31, 32, 33]. En raffinant les approches précédentes et par calibration avec des écoulements génériques (cisaillement homogène, retour à l'isotropie de turbulence homogène, écoulement établi dans un canal plan) Launder *et al.* [34] ont présenté une première fermeture complète d'un degré d'universalité suffisant pour permettre des calculs pratiques.

L'importance d'une formulation qui vérifie les propriétés tensorielles des expressions en question a été soulignée par Harlow et Nakayama [35]. Par la suite, le concept de réalisabilité physique et mathématique a été formulé par Schumann [36] qui s'est surtout basé sur la positivité des composantes diagonales du tenseur ainsi que sur l'inégalité de Schwarz. Les contraintes résultantes ont donné un fondement plus rigoureux au développement d'une deuxième génération de modèles du second ordre. A citer parmi ceux-ci les contributions de Lumley [15], Speziale [37] et Fu *et al.* [38].

Quelques fermetures du second ordre pour un fluide compressible ont été proposées dans la littérature. Il s'agit des modèles adaptés selon la nature des effets de compressibilité étudiés. Jannicka et Lumley [17] ont conçu un modèle complet pour tenir compte du mélange des gaz de différentes densités à faible vitesse. Les auteurs qui s'intéressent aux écoulements caractérisés par une compression ou une dilatation moyenne prédominante (souvent dans les moteurs à piston) ont focalisé la recherche sur l'amélioration de la prédiction de l'échelle de longueur utilisée dans la fermeture [39, 9, 40].

En ce qui concerne les écoulements turbulents à haut nombre de Mach, il est utile de mettre en évidence les effets "énergétiques" et "structurels" séparément. Les termes énergétiques agissent sur la trace du tenseur de Reynolds, ce sont les termes de compressibilité supplémentaires qui apparaissent explicitement dans les équations. La modélisation de ces termes est nécessaire même dans le cadre d'un modèle algébrique qui porte sur l'équation de l'énergie cinétique turbulente. Un grand nombre d'études a été dédié au flux de masse turbulent (Rubesin [41, 42], Ristorcelli [43]), à la corrélation entre pression et dilatation (Sarkar *et al.* [44, 45], Zeman [7], El-Baz et Launder [46]) et à la dissipation dilatationnelle (Zeman [7], Sarkar *et al.* [45]). La plupart des développements récents ont été rendus possibles par la mise au point des techniques de simulation directe pour les écoulements homogènes des fluides compressibles [47, 8, 45, 7] qui fournissent des données pour la modélisation. Une liaison très étroite entre la DNS et la modélisation paraît prometteuse pour l'avenir, notamment avec l'arrivée des simulations directes sur des configurations non-homogènes [48, 13, 49].

Les effets structurels compressibles liés au caractère anisotrope des champs sont traduits implicitement dans les termes qui existent déjà pour un fluide incompressible. Aujourd'hui il n'existe que très peu de publications concernant la modélisation des effets de ce type, on peut néanmoins citer celles de Vandromme [50], El-Baz et Launder [46] et Cambon *et al.* [51]. On remarque que ces propositions ont tout de même eu peu d'impact sur les études qui ont été publiées par la suite. En effet, ces dernières années, les calculs numériques présentés dans la littérature sont marqués essentiellement par l'utilisation des extensions à masse volumique variable des modèles conçus pour un fluide incompressible [52, 53, 54, 55].

Dans la suite de ce chapitre, nous établissons l'équation exacte du tenseur de Reynolds. Les propositions de fermeture pour les nouvelles corrélations inconnues sont discutées: d'abord les modèles classiques développés pour un fluide incompressible et ensuite ceux qui tiennent compte des effets de la compressibilité.

1.4.1 L'équation de transport de la tension de Reynolds

En utilisant l'identité $\overline{\rho u_i u_j} = \overline{\rho} \widetilde{u_i u_j} + \overline{\rho u_i'' u_j''}$, on peut décomposer la dérivée temporelle de la tension de Reynolds de la façon suivante [25]:

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\overline{\rho u_i'' u_j''} \right) &= \overline{[u_j \partial_t(\rho u_i) + u_i \partial_t(\rho u_j) - u_i u_j \partial_t(\rho)]} \\ &\quad - [\widetilde{u_j} \partial_t(\overline{\rho} \widetilde{u_i}) + \widetilde{u_i} \partial_t(\overline{\rho} \widetilde{u_j}) - \widetilde{u_i} \widetilde{u_j} \partial_t(\overline{\rho})] \quad . \end{aligned} \quad (1.17)$$

Cette relation nous indique comment il faut manipuler les équations de la masse volumique et de la quantité de mouvement sous leur forme instantanée (1.1) et leur forme moyennée (1.12) afin d'obtenir l'équation de transport de la tension de Reynolds. Le résultat peut être présenté dans la formulation suivante (par exemple [56]):

$$\begin{aligned} \partial_t(\overline{\rho u_i'' u_j''}) + \left(\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k} \right)_{,k} &= - \left(\overline{\rho u_i'' u_k'' u_{j,k}} + \overline{\rho u_j'' u_k'' u_{i,k}} \right) \\ &\quad - \left(\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''} + \delta_{ik} \overline{u_j'' p'} + \delta_{jk} \overline{u_i'' p'} - (\overline{\mu S_{ik} u_j''} + \overline{\mu S_{jk} u_i''}) \right)_{,k} \\ &\quad + \overline{p' (u_{i,j}'' + u_{j,i}'')} \\ &\quad - \left(\overline{\mu S_{ik} u_{j,k}''} + \overline{\mu S_{jk} u_{i,k}''} \right) \\ &\quad - \overline{u_i''} \overline{p_{,j}} - \overline{u_j''} \overline{p_{,i}} \quad . \end{aligned} \quad (1.18)$$

La première ligne de l'équation (1.18), qui contient le terme temporel, la convection moyenne et la production de turbulence par l'interaction avec le champ moyen ne nécessite pas de fermeture. Ceci représente le point fort de la décomposition utilisée, car le traitement exact de ces mécanismes permet automatiquement la prise en compte des effets de mémoire de la corrélation double. Les autres termes de l'équation (1.18) représentent des grandeurs inconnues dont trois sont des nouvelles corrélations. Dans la deuxième ligne on a regroupé les mécanismes diffusifs: le transport par la corrélation triple de vitesse, la diffusion par les fluctuations de pression et la diffusion visqueuse. La corrélation entre le gradient de la vitesse fluctuante et la fluctuation de la pression dans la troisième ligne de l'équation (1.18) représente principalement la redistribution de l'énergie entre les composantes du tenseur $\overline{\rho u_i'' u_j''}$. Pour un fluide compressible, la trace de cette corrélation n'est pas identiquement nulle et elle peut constituer un processus réversible de transformation entre énergie potentielle et énergie cinétique. La quatrième ligne représente la dissipation de l'énergie cinétique de chaque composante en chaleur. Finalement, les termes de la dernière ligne de l'équation (1.18) signifient la production par le flux de masse turbulent et le gradient de pression moyenne, appelée "production enthalpique" [2].

Un tel regroupement des expressions est habituel [56, 52, 53], mais il n'est pas unique. Lumley [57] propose une alternative pour la séparation des termes liés à la pression, qui se traduit pour un fluide compressible par:

$$\begin{aligned} \overline{p_{,j} u_i'' + p_{,i} u_j''} &= \underbrace{\overline{p_{,j} u_i'' + p_{,i} u_j''} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{p_{,k} u_k''}}_{\text{déviateur}} - \underbrace{\frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{p' u_{k,k}''}}_{\text{pression-dilatation}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{2}{3} \delta_{ij} \left(\overline{p u_k''} \right)_{,k}}_{\text{transport}} - \underbrace{\frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{\rho u_{k,k}''}}_{\text{flux de masse turbulent}} \quad . \end{aligned} \quad (1.19)$$

La différence principale avec la formulation habituelle dans (1.18) vient du fait que maintenant le terme de transport par la pression a une forme isotrope, comme il a été souligné par Speziale [58]. Nous gardons la formulation standard (1.18) en notant que la transformation (1.19) suggère un modèle isotrope pour la diffusion par la pression (voir paragraphe 1.4.5.2).

On note ici l'équivalence formelle qui existe entre les corrélations entre vitesse et pression en moyennes de Reynolds et de Favre:

$$\overline{p' u''_{i,j}} = \overline{p' u'_{i,j}}, \quad \overline{p' u''_j} = \overline{p' u'_j}, \quad \dots \quad (1.20)$$

Cette propriété permet d'utiliser directement certains modèles pour ces corrélations formulés dans le cadre d'un moyenne de Reynolds.

La liste des expressions à modéliser afin de fermer le système d'équations comprend les corrélations suivantes:

- corrélation triple de vitesse,
- diffusion par fluctuations de pression,
- diffusion turbulente visqueuse,
- corrélation pression-déformation,
- dissipation turbulente,
- flux de masse turbulent,
- flux de chaleur lié à la corrélation température-masse volumique.

Puisque chacune de ces expressions représente un mécanisme distinct, il est souhaitable de trouver des situations particulières qui permettent d'étudier et modéliser une seule corrélation individuellement. Parfois, une réduction de la complexité du problème est possible en considérant des situations idéalisées, dont la turbulence homogène est un exemple. Dans un écoulement turbulent homogène, seules la dissipation et la corrélation entre pression et déformation sont non-nulles. On s'occupera donc de ces deux termes principaux d'abord. Ensuite les termes de transport seront discutés avant d'aborder les corrélations purement compressibles.

1.4.2 La corrélation entre pression et déformation pour un fluide incompressible

Depuis le travail de Chou [59], le point de départ pour la modélisation de la corrélation entre la fluctuation de la pression et la fluctuation de la déformation est l'équation pour l'opérateur laplacien de la pression. Dans un fluide strictement incompressible ($\rho = \text{constant}$, $u'_{k,k} = \overline{u_{k,k}} = 0$), les fluctuations de pression sont déterminées par une équation de Poisson, qui est obtenue en prenant la divergence de la différence entre l'équation de quantité de mouvement instantanée et sa forme moyenne:

$$-\frac{1}{\rho} p'_{,jj} = 2 \overline{u_{i,j}} u'_{j,i} + \left(u'_j u'_i - \overline{u'_j u'_i} \right)_{,ji} . \quad (1.21)$$

Etant donnée que la solution de l'équation (1.21) est une superposition des solutions particulières, on peut séparer la pression en deux parties associées aux deux termes du second membre. La première partie est fonction des gradients de la vitesse moyenne. Elle est dite terme "rapide" pour deux raisons. D'abord, parce que dans le cas d'une déformation très rapide (dans la limite des hypothèses de la théorie de distorsion rapide RDT), les corrélations associées à cette partie de la pression sont prédominantes au point que les interactions non-linéaires sont négligeables. D'autre part, dans une turbulence isotrope soumise à une déformation d'intensité quelconque, les corrélations qui comprennent la pression rapide sont instantanément anisotropes [15]. Au

contraire, la partie comprenant l'interaction entre fluctuations de vitesse est dite le terme "lent". Elle peut être étudiée dans des écoulements en l'absence des gradients moyens.

Afin d'obtenir une expression accessible à la modélisation, l'équation (1.21) doit d'abord être résolue, par exemple en utilisant le théorème de Green [59] ou par intégration dans l'espace spectral dans le cas de la turbulence homogène [15]. Le résultat, écrit dans l'espace physique, constitue une fonction des corrélations en deux points P et P^* séparés par la distance r :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \overline{p' u'_{i,j}} &= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \overline{\overline{u}_{l,k}^* u'_{k,l} u'_{i,j}} \frac{d\Omega}{r}}_{\phi_{ij}^r} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \overline{(u'_k u'_l)^*_{,kl} u'_{i,j}} \frac{d\Omega}{r}}_{\phi_{ij}^s} \\ &+ \text{termes de bord} \quad . \end{aligned} \quad (1.22)$$

Les termes de bord n'agissent qu'en présence d'une frontière du domaine à distance finie de P . Nous ne considérons pas explicitement leur prise en compte dans cette étude, mais nous utiliserons l'approche globale des lois de paroi pour le traitement des frontières solides, discutée au paragraphe 2.5.3.

1.4.2.1 La partie rapide de la pression-déformation

Dans un écoulement homogène, la partie rapide ϕ_{ij}^r peut être simplifiée en considérant que le gradient de vitesse moyenne est constant. Dans les situations non-homogènes, cette même opération peut être interprétée comme l'approximation de premier ordre d'un développement en série de Taylor [59]. On obtient la relation suivante:

$$\phi_{ij}^r = \overline{u}_{l,k} \cdot a_{lj}^{ki} \quad . \quad (1.23)$$

L'intégrale a_{lj}^{ki} doit vérifier des propriétés de symétrie

$$a_{lj}^{ki} = a_{lj}^{ik} = a_{jl}^{ki} \quad , \quad (1.24)$$

et l'incompressibilité

$$a_{li}^{ki} = 0 \quad . \quad (1.25)$$

Une conséquence du théorème de Green donne la relation suivante [29]:

$$a_{jj}^{ki} = 2 \overline{u'_k u'_i} \quad . \quad (1.26)$$

Ces dernières contraintes cinématiques indiquent que le tenseur a_{lj}^{ki} peut être exprimé par une fonctionnelle des corrélations doubles de vitesse. En négligeant les effets de mémoire, on arrive à une fonction du tenseur des corrélations doubles. Celle-ci s'écrit, en définissant le tenseur symétrique $\Pi_{ij}^r \equiv \phi_{ij}^r + \phi_{ji}^r$:

$$\Pi_{ij}^r = \overline{u}_{l,k} k \cdot \mathcal{M}_{ijkl} (b'_{mn}) \quad , \quad (1.27)$$

où b'_{mn} est le tenseur d'anisotropie de la corrélation double de vitesse en moyenne de Reynolds $b'_{mn} \equiv \overline{u'_m u'_n} / (2k) - \delta_{ij} / 3$. L'expression $\mathcal{M}_{ijkl}$ est une fonction tensorielle isotrope de l'argument b'_{mn} . Sa forme analytique peut être déterminée en grande partie par des considérations d'algèbre tensorielle et des théorèmes d'invariance. La relation générale qui garantit l'invariance par rapport à un changement de repère a été formulée par Lumley [15] (cf. Speziale [5]):

$$\begin{aligned} \frac{\Pi_{ij}^r}{k} &= a_2 \overline{s}_{ij} + (a_3 b'_{kl} \overline{s}_{kl} + a_4 b'_{mk} b'_{kl} \overline{s}_{lm}) b'_{ij} \\ &+ (a_5 b'_{kl} \overline{s}_{kl} + a_6 b'_{mk} b'_{kl} \overline{s}_{lm}) \left(b'_{ik} b'_{kj} - \frac{1}{3} II' b'_{ij} \delta_{ij} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_7 \left(b'_{ik} \bar{s}_{jk} + b'_{jk} \bar{s}_{ik} - \frac{2}{3} b'_{mk} b'_{kl} \bar{s}_{lm} \delta_{ij} \right) \\
& + a_8 \left(b'_{ik} b'_{kl} \bar{s}_{jl} + b'_{jk} b'_{kl} \bar{s}_{il} - \frac{2}{3} b'_{mk} b'_{kl} \bar{s}_{lm} \delta_{ij} \right) \\
& + a_9 \left(b'_{ik} \bar{\omega}_{jk} + b'_{jk} \bar{\omega}_{ik} \right) + a_{10} \left(b'_{ik} b'_{kl} \bar{\omega}_{jl} + b'_{jk} b'_{kl} \bar{\omega}_{il} \right) , \tag{1.28}
\end{aligned}$$

avec la définition des invariants du tenseur des corrélations doubles

$$II' = b'_{ij} b'_{ji} , \quad III' = b'_{ik} b'_{kl} b'_{li} , \tag{1.29}$$

et les parties symétrique et antisymétrique de la déformation

$$\bar{s}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\overline{u_{i,j}} + \overline{u_{j,i}} \right) , \quad \bar{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\overline{u_{i,j}} - \overline{u_{j,i}} \right) . \tag{1.30}$$

Les coefficients scalaires a_i sont en général des fonctions des invariants II' et III' , qui doivent être déduites à l'aide des hypothèses supplémentaires. Nous citons les modèles suivants:

- Le plus simple parmi les modèles qui vérifient les relations cinématiques (1.24) à (1.26) est la troncature linéaire (en b'_{ij}) de la forme générale (1.28) avec des coefficients constants, évaluées par exemple par Launder *et al.* [34] (par la suite nommée LRR). Les valeurs des constantes ont été calibrées par référence aux mesures expérimentales de turbulence homogène cisailée de Champagne *et al.* [60] et en accord notamment avec les résultats de la théorie de distorsion rapide de Crow (cf. [34]) pour des déformations irrotationnelles.
- Lumley [15] et ensuite Shih et Lumley [28] ont appliqué les idées de la réalisabilité (voir paragraphe 1.5) afin d'imposer un comportement physique à leur modèle dans des situations extrêmes telles que la turbulence bidimensionnelle. Ce type de contraintes peut servir à réduire le nombre de constantes libres d'un modèle et elle peut aider à déterminer une forme consistante pour certains coefficients a_i . Le modèle de Shih et Lumley (par la suite noté SL) est une expression quadratique en b'_{ij} issue du modèle général (1.28).
- En s'appuyant sur les travaux concernant la réalisabilité, Fu *et al.* [38] ont proposé un modèle (par la suite noté FLT) dont les termes linéaires et quadratiques sont identiques au modèle SL. Par l'inclusion des termes cubiques, Fu *et al.* tentent de reproduire les résultats expérimentaux de Harris *et al.* [61] portant sur la turbulence homogène cisailée à taux de déformation important.
- A partir du modèle général (1.28), Speziale *et al.* [62] ont considérablement réduit la complexité des expressions par référence à la classe des écoulements homogènes plans. Ils observent que la structure du champ turbulent à l'équilibre (quand le temps tend vers l'infini) prédite pour un tel écoulement par le modèle général (1.28) peut essentiellement être obtenue par une forme très simplifiée du modèle. Le résultat (par la suite nommé SSG) est une expression quasi-linéaire guère plus complexe que le modèle LRR.
- Johansson et Hallbäck [63] utilisent l'ensemble des termes tensoriellement invariants (1.28) afin de construire un modèle d'ordre quatre. En utilisant les relations cinématiques et les contraintes de la réalisabilité, il reste quatre constantes indépendantes à déterminer. Johansson et Hallbäck se basent particulièrement sur des résultats d'une déformation irrotationnelle obtenus par la RDT pour calibrer les constantes. Même si la performance du modèle semble prometteuse, il faut noter que la forme des neuf fonctions scalaires $\alpha_{2...10}$ est extrêmement compliquée.

Nous avons retenu pour la suite de cette étude les modèles LRR, SSG, FLT et SL. Ces expressions sont détaillées dans l'annexe A.

1.4.2.2 La partie lente de la pression-déformation

Nous allons maintenant discuter la partie lente de la corrélation entre pression et déformation. Par sa définition (1.22), ϕ_{ij}^s ne dépend pas explicitement du gradient de la vitesse moyenne. Ceci indique que ce terme peut être étudié dans un écoulement à vitesse moyenne uniforme avec des implications pour la situation générale. Afin de déterminer la liste des arguments de la fonction ϕ_{ij}^s , Rotta [29] invoque des arguments physiques et l'analyse dimensionnelle. Lumley [15] considère une turbulence homogène en l'absence des gradients de vitesse moyenne, où l'équation pour la tension de Reynolds s'écrit:

$$d_t \overline{u'_i u'_j} = \frac{1}{\rho} \overline{p' (u'_{i,j} + u'_{j,i})} - \bar{\varepsilon}_{ij} \quad , \quad (1.31)$$

la corrélation entre pression et déformation traduisant exclusivement un effet lent. Le deuxième terme du second membre est la dissipation, qui est définie dans un écoulement incompressible par

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = 2 \nu \overline{u'_{i,k} u'_{j,k}} \quad . \quad (1.32)$$

Lumley propose de regrouper la partie déviatrice de la dissipation avec la partie lente de la pression-déformation $\Pi_{ij}^s = 1/\rho \overline{p' (u'_{i,j} + u'_{j,i})} - (\bar{\varepsilon}_{ij} - 2/3 \delta_{ij} \bar{\varepsilon})$ (où $\Pi_{ij}^s \equiv \phi_{ij}^s + \phi_{ji}^s$), ce qui donne la relation suivante:

$$d_t \overline{u'_i u'_j} = \Pi_{ij}^s - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\varepsilon} \quad , \quad (1.33)$$

où $\bar{\varepsilon} \equiv \bar{\varepsilon}_{ii}$ est la dissipation de l'énergie cinétique turbulente. En considérant (1.33) comme une équation pour Π_{ij}^s , cette corrélation est visiblement une fonctionnelle de la tension de Reynolds et de la trace de la dissipation. En négligeant une fois de plus l'effet de mémoire, la relation suivante est obtenue:

$$\Pi_{ij}^s = \varepsilon \cdot \mathcal{A}_{ij} (b'_{mn}, Re_l) \quad , \quad Re_l \equiv \frac{k^2}{\varepsilon \nu} \quad , \quad (1.34)$$

où $\mathcal{A}_{ij}$ est une fonction tensorielle isotrope d'ordre deux dont la forme générale s'écrit [15]:

$$\mathcal{A}_{ij} = a_0 b'_{ij} + a_1 \left(b'_{ik} b'_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} II' \right) \quad . \quad (1.35)$$

Les coefficients a_i sont en général des fonctions des invariants II' et III' et du nombre de Reynolds Re_l . A partir des relations (1.34) et (1.35), un grand nombre de modèles de complexités différentes a été publié:

- Par l'interprétation physique de l'interaction entre deux éléments d'un fluide turbulent, Rotta [29] a déduit un modèle qui représente le retour à l'isotropie graduel d'un champ turbulent initialement non-isotrope. Ce modèle est équivalent à la partie linéaire de la forme générale (1.35) avec un coefficient constant. Cette même expression a été reprise dans la fermeture LRR.
- En tenant compte des contraintes de réalisabilité, Lumley [15] propose un modèle linéaire ($a_1 = 0$) qui fait intervenir les invariants du tenseur. Il introduit également une dépendance par rapport au nombre de Reynolds afin de modéliser l'absence du processus d'isotropisation quand la turbulence a décru presque entièrement. Leur propre série de mesures de ce mécanisme a motivé Choi et Lumley (cf. [64]) pour inclure les termes quadratiques de la relation (1.35) dans leur modèle afin de pouvoir tenir compte du fait que la topologie du retour à l'isotropie est distincte selon le signe de l'invariant III' de l'anisotropie.
- La partie lente du modèle FLT est également d'ordre quadratique. Les fonctions a_0 et a_1 sont construites afin d'assurer un comportement asymptotiquement correct, en s'approchant d'une paroi, où Π_{ij}^s devient nul.

- Sarkar et Speziale [65] appliquent des considérations de la théorie des systèmes dynamiques pour déduire un modèle quadratique pour des écoulements à haut nombre de Reynolds. Le résultat reste simple, les coefficients introduits étant constants. Ce modèle constitue la partie lente du modèle SSG.

1.4.3 La corrélation entre pression et déformation pour un fluide compressible

Comme dans le cas d'un fluide incompressible, une équation pour le laplacien de la pression d'un fluide compressible peut être déduite [50] (voir également Sarkar [66] pour une discussion de l'ordre de grandeur des différentes contributions). Pour un écoulement homogène, nous obtenons pour la corrélation entre la pression et la déformation:

$$\begin{aligned}
\overline{p' u''_{i,j}} &= \bar{\rho} \tilde{u}_{k,l} \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \overline{u''_{k,l}^* u''_{i,j}} \frac{d\Omega}{r} + \bar{\rho} \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \overline{(u''_k u''_l)^* u''_{i,j}} \frac{d\Omega}{r} \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \left\langle u''_{i,j} \left\{ \rho' \tilde{u}_{k,l} u''_{l,k} + \rho \left(\tilde{u}_{k,l} u''_{l,k} + \tilde{u}_{k,k} u''_{l,l} + \tilde{u}_{l,l} u''_{k,k} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\rho_{,k} (\tilde{u}_k u''_{l,l}) + \rho_{,kl} \tilde{u}_k u''_{l,l} \right\}^* \right\rangle \frac{d\Omega}{r} \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left\langle u''_{i,j} \left\{ \rho' (u''_k u''_l)_{,kl} + \rho_{,k} (u''_k u''_l)_{,k} + \rho_{,l} (u''_k u''_l)_{,l} + \rho_{kl} u''_k u''_l + \rho' \tilde{u}_k \tilde{u}_l \right\}^* \right\rangle \frac{d\Omega}{r} \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \overline{u''_{i,j} \{ \partial_t (\rho' \tilde{u}_k + \rho u''_k) \}_{,i}^*} \frac{d\Omega}{r} \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \overline{u''_{i,j} \{ \mu S''_{kl} \}_{,kl}^*} \frac{d\Omega}{r} . \tag{1.36}
\end{aligned}$$

En vue d'une notation compacte, certains termes de type moyenne d'ensemble $\bar{\phi}$ sont ici indiqués par des crochets $\langle \phi \rangle$.

La première ligne de l'équation (1.36) correspond formellement à l'expression qu'on obtient pour un fluide incompressible (équation (1.22)), les autres termes sont des contributions supplémentaires dues à la compressibilité. Parmi ces derniers, on note des termes qui font intervenir la fluctuation de masse volumique, la masse volumique moyenne ainsi que la divergence de la fluctuation de vitesse (dilatation fluctuante). Ces termes sont en partie des termes "rapides" (faisant intervenir le gradient de la vitesse moyenne) et en partie des termes "lents". On observe également la présence des dérivées temporelles dans l'équation (1.36). En effet, la pression fluctuante dans un fluide compressible suit une équation d'onde au lieu d'une équation de Poisson dans le cas incompressible. Finalement, on note la présence d'un terme visqueux qui pourrait jouer un rôle à proximité d'une paroi solide.

Dans la littérature, différentes voies ont été prises afin de modéliser la corrélation entre pression et déformation dans un fluide compressible. Nous allons par la suite exposer trois méthodes, dont la première consiste à utiliser l'équation exacte (1.36); une deuxième approche porte sur la modification de la modélisation polynômiale tensorielle utilisée dans le cas incompressible; une troisième méthode met en évidence la séparation des effets énergétiques et structuraux.

1.4.3.1 L'approche par intégration du laplacien de la pression

Dans son analyse, Vandromme [50] effectue un regroupement des termes similaire à celui montré ci-dessus (1.36). Pour la partie qui correspond au cas incompressible, il utilise un modèle conçu pour le fluide incompressible (à savoir les termes rapides et lents du modèle LRR) à trace nulle.

Le terme visqueux est inclu avec le traitement des termes de bord. Il reste donc les termes supplémentaires inertiels pour faire intervenir un effet de la compressibilité. Vandromme néglige parmi ceux-ci la contribution lente, le modèle final s'écrivant:

$$\overline{p' \left(u''_{i,j} + u''_{j,i} \right)} = \bar{\rho} \left(\Pi_{ij}^r + \Pi_{ij}^s \right)_{inc} + C_6 \cdot 2\bar{\rho}k \cdot b_{ij} \cdot \widetilde{u}_{k,k} \quad . \quad (1.37)$$

Le terme supplémentaire est proportionnel à la dilatation moyenne qui est une mesure de la variation de la masse volumique moyenne. Il s'agit donc d'un modèle pour des écoulements dilatables (variation de $\bar{\rho}$ non-nulle) et non d'un modèle pour des écoulements où les fluctuations de la masse volumique sont importantes ($\overline{\rho'\rho'}$ non-nul). De plus, on remarque que la trace du modèle (1.37) est nulle ce qui veut dire que la corrélation entre pression et dilatation est négligée.

1.4.3.2 L'approche par modification du polynôme tensoriel

Une approche phénoménologique a été choisie par El-Baz et Launder [46]. Ils supposent que la corrélation entre pression et déformation peut toujours être exprimée par la somme des termes rapides et lents,

$$\overline{p' \left(u''_{i,j} + u''_{j,i} \right)} = \bar{\rho} \widetilde{u}_{l,k} \left(a_{li}^{kj} + a_{lj}^{ki} \right) + \bar{\rho} \varepsilon \cdot \mathcal{A}_{ij} (b_{mn}) \quad , \quad (1.38)$$

où dans un fluide compressible on a $b_{mn} \equiv \widetilde{u_i'' u_j''} / 2k - 1/3 \delta_{ij}$. Soulignant que maintenant la condition d'incompressibilité (1.25) ne s'applique plus aux tenseurs a_{li}^{kj} et a_{lj}^{ki} , El-Baz et Launder remplacent cette condition par la relation suivante:

$$a_{li}^{ki} = F_{EL} [\delta_{lk} + b_{lk}] \quad , \quad (1.39)$$

où $F_{EL} \equiv 0.75 M_t^2$ est une fonction du nombre de Mach turbulent ($M_t \equiv \sqrt{2k}/\sqrt{\gamma R \widetilde{T}}$) qui assure la consistance avec le cas incompressible. Avec cette hypothèse, ils poursuivent la construction du modèle rapide analogue au modèle cubique FLT dans le cas incompressible. Le modèle pour les termes lents est inchangé. L'expression finale s'écrit:

$$\begin{aligned} \overline{p' \left(u''_{i,j} + u''_{j,i} \right)} &= \bar{\rho} \left(\Pi_{ij}^r + \Pi_{ij}^s \right)_{FLT} \\ &+ F_{EL} \bar{\rho} k \frac{1}{5} \left[2 s_{ij} + s_{kk} \left(\frac{40}{9} + \frac{14}{9} \delta_{ij} \right) + \frac{14}{3} s_{kk} b_{ij} \right. \\ &+ 3 (b_{ik} s_{jk} + b_{jk} s_{ki}) - \frac{41}{9} (b_{im} \omega_{jm} + b_{jm} \omega_{im}) \\ &+ \frac{28}{3} b_{li} b_{kj} s_{kl} - \frac{14}{3} (b_{li} b_{lm} s_{jm} + b_{lj} b_{lm} s_{im}) + 14 \left(b_{lk} s_{lk} \left(b_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) \right) \\ &\left. - \frac{14}{3} (b_{li} b_{lm} \omega_{jm} + b_{lj} b_{lm} \omega_{im}) \right] \quad , \quad (1.40) \end{aligned}$$

où

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\widetilde{u_{i,j}} + \widetilde{u_{j,i}} \right) \quad , \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\widetilde{u_{i,j}} - \widetilde{u_{j,i}} \right) \quad . \quad (1.41)$$

La contraction de ce modèle donne:

$$2 \overline{p' u''_{k,k}} = F_{EL} \cdot \bar{\rho} k \left[\frac{12}{3} \widetilde{u_{k,k}} + 4 b_{lk} s_{lk} \right] = F_{EL} \bar{\rho} \left[\frac{8}{3} k \widetilde{u_{k,k}} + 2 \widetilde{u_{i,j}} \widetilde{u_i'' u_j''} \right] \quad , \quad (1.42)$$

ce qui implique une expression pour la pression-dilatation fonction de la production de l'énergie cinétique turbulente et de la dilatation moyenne.

1.4.3.3 L'approche par séparation des effets énergétiques et structuraux

Une troisième possibilité pour traiter la corrélation pression-déformation consiste à séparer la trace de la partie déviatrice [44]:

$$\overline{p' \left(u''_{i,j} + u''_{j,i} \right)} = \underbrace{\overline{p' \left(u''_{i,j} + u''_{j,i} \right)}}_{\bar{\rho} \Pi_{ij}^{dev}} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{p' u''_{k,k}} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{p' u''_{k,k}} \quad . \quad (1.43)$$

Cette opération revient à faire la distinction entre les effets énergétiques et structuraux (mentionnés dans l'introduction du chapitre) mettant en évidence d'une part la pression-dilatation et d'autre part le terme redistributeur Π_{ij}^{dev} respectivement. Autrement dit, avec cette approche il faut

I modéliser l'influence de la compressibilité sur la redistribution d'énergie entre les composantes de la tension de Reynolds,

II modéliser la pression-dilatation .

I Détermination de la partie déviatrice. Dans un grand nombre de fermetures du second ordre (par exemple [52, 53]) la modification “compressible” de la partie déviatrice est négligée et un modèle conçu pour la situation incompressible est utilisé. Cependant, il a été montré par Speziale *et al.* [67] que ceci ne permet pas de prédire le changement de l'anisotropie de la tension de Reynolds en fonction du nombre de Mach turbulent observé dans les DNS de turbulence homogène cisailée. A notre connaissance, aucun modèle général représentant l'impact de la compressibilité sur la partie déviatrice de la corrélation pression-déformation n'a été publié à ce jour. Néanmoins, des propositions de modification ont été faites dans deux configurations particulières: la compression axiale homogène et la couche de mélange.

- Cambon *et al.* [51] ont étudié la turbulence soumise à une compression axiale homogène à l'aide de la théorie de distorsion rapide et des simulations directes. Ils montrent que les corrélations entre le champ de fluctuations de pression et le champ de fluctuations de vitesse décroissent de façon monotone en fonction d'un nombre de Mach particulier. Cette grandeur caractéristique du problème est le nombre de Mach de distorsion M_d qui représente le rapport entre un temps de communication acoustique à travers un tourbillon et un temps de déformation moyenne. L'observation de décorrélation progressive entre pression et vitesse a mené Cambon *et al.* à proposer une modification d'un modèle classique,

$$\Pi_{ij}^{dev} = (\Pi_{ij}^r)_{inc} \cdot \exp(-M_d/C_{\Delta m}) \quad , \quad (1.44)$$

où le modèle LRR est utilisé pour exprimer les termes rapides (les termes lents Π_{ij}^s ont été négligés par Cambon *et al.* dans ce cas de déformation rapide). Avec l'expression (1.44), ils réussissent à capter la variation de l'anisotropie observée dans les simulations. Néanmoins, Cambon *et al.* remarquent que ce résultat ne s'étend pas strictement au cas où la déformation inclut une composante rotationnelle (cisaillement), puisque dans ce cas un couplage supplémentaire entre les champs de vitesse solénoïdale et dilatationnelle apparaît.

- Vreman [13] a effectué des simulations directes d'une couche de mélange à différents taux de cisaillement. Utilisant un bilan intégral dans la direction transversale, il constate que la contribution de la pression-déformation diminue en fonction de l'intensité de la compressibilité. Ici, la propre mesure de la compressibilité est le nombre de Mach relatif M_r basé sur la différence de vitesse moyenne entre les deux courants externes. Vreman introduit une fonction d'amortissement dans la partie rapide de la composante axiale de la redistribution:

$$\Pi_{11}^{dev} = (\Pi_{11}^r)_{inc} \cdot f(M_r) + (\Pi_{11}^s)_{inc} \quad . \quad (1.45)$$

La fonction $f(M_r)$ est fondée sur l'hypothèse selon laquelle les fluctuations de pression sont progressivement réduites. Ceci est traduit par un modèle de vortex potentiel, où l'écart entre le maximum de pression, localisé au point d'arrêt entre deux tourbillons, et le minimum de pression, localisé au centre d'un vortex, diminue avec la vitesse de rotation liée au nombre de Mach M_r . Cependant, dans son approche, les autres composantes de la redistribution Π_{ij}^{dev} sont obtenues en fonction du taux de croissance de la couche de mélange, ce qui empêche la généralisation de la méthode. Néanmoins, dans le cas particulier, Vreman réussit à reproduire les résultats principaux de la simulation.

II Détermination de la pression-dilatation. Parmi les modèles qui ont été publiés, on note les trois propositions suivantes:

- Rubesin [41] a postulé la variation polytropique des variables thermodynamiques dans un écoulement compressible:

$$\frac{p'}{\bar{p}} = n \frac{\rho'}{\bar{\rho}} = \frac{n}{n-1} \frac{\rho T''}{\bar{\rho} \bar{T}} \quad , \quad (1.46)$$

où n est le coefficient polytropique du processus qui devient une constante à déterminer. Dans un papier plus récent, Rubesin [42] utilise la relation (1.46) pour remplacer la pression de l'expression $p' u''_{k,k}$ par la masse volumique, ce qui permet d'établir un modèle à l'aide de l'équation de transport de la variance de la masse volumique $\beta \equiv \sqrt{\overline{\rho' \rho'}} / \bar{\rho}$, qui s'écrit:

$$\overline{p' u''_{k,k}} = n \bar{p} \left\{ \frac{\bar{\rho}_{,k}}{\bar{\rho}} \overline{u''_k} - \frac{1}{2} \left[\partial_t (\beta^2) + \tilde{u}_k (\beta^2)_{,k} \right] \right\} \quad . \quad (1.47)$$

Quant à eux, le flux de masse $\overline{u''_k}$ ainsi que la variance β peuvent être modélisés avec des hypothèses supplémentaires concernant la température totale (voir paragraphe 1.4.6.1). On note que, à cause du terme de dérivée temporelle, l'expression (1.47) n'est pas facile à intégrer dans un schéma de résolution numérique. Si on se place dans un écoulement strictement homogène, où le flux de masse turbulent ainsi que les gradients de la variance de la masse volumique et de la masse volumique moyenne sont nuls, la seule contribution vient de la variation temporelle de la variance β . Ce résultat est à rapprocher de l'hypothèse principale du modèle de Zeman (voir paragraphe suivant) qui porte sur la variance de la pression.

Pour déterminer la variance de la masse volumique β dans la formule (1.47), Rubesin propose néanmoins une fonction du gradient de la température moyenne. Par conséquent, ce modèle prédit une pression-dilatation nulle dans un écoulement homogène ce qui n'est pas en accord avec les résultats des simulations directes [68].

- A l'aide de l'équation de transport de la masse volumique et de la deuxième loi de la thermodynamique, Zeman [7] a déduit une expression de la pression-dilatation, dans laquelle il élimine plusieurs termes par une estimation de l'ordre de grandeur. Le seul terme restant est la variation temporelle de la variance de la pression:

$$\overline{p' u''_{k,k}} = -\frac{1}{2 \bar{\rho} \bar{c}^2} d_t (\overline{p' p'}) \quad . \quad (1.48)$$

Zeman suppose que les fluctuations de pression tendent vers un état d'équilibre p_e avec une échelle de temps τ_a qui est associée à la propagation acoustique. Son modèle de relaxation est formulé en fonction du nombre de Mach turbulent:

$$\begin{aligned} d_t (\overline{p' p'}) &= -\frac{\overline{p' p'} - p_e^2}{\tau_a} \quad , \\ \frac{p_e}{\bar{\rho}^2 2k \bar{c}^2} &= \frac{\alpha M_t^2 + \beta M_t^4}{1 + \alpha M_t^2 + \beta M_t^4} \quad , \\ \frac{\tau_a}{2k/\varepsilon_s} &= \frac{M_t}{\sqrt{54 (1 + M_t^2/3)}} \quad , \end{aligned} \quad (1.49)$$

où $\alpha = 1$ et $\beta \in [1, 2]$ sont des constantes numériques, $\tilde{c}^2 \equiv \gamma \bar{p} / \bar{\rho}$ la célérité du son et ε_s la partie solénoïdale de la dissipation (voir paragraphe 1.4.4). Ce modèle de type différentiel introduit une variable et une équation supplémentaire au système. Dans un écoulement réaliste il serait difficile de déterminer une condition initiale pour la variance de la pression.

- Un modèle algébrique, qui est beaucoup utilisé, a été avancé par Sarkar *et al.* [45, 66]. L'analyse est basée sur une décomposition de la pression, $p' = p'^I + p'^C$, où la partie incompressible est obtenue par la relation suivante,

$$-p'_{,ii} = 2 \bar{u}_{i,j} (\bar{\rho} u'_{j,i}) - 2 \bar{u}_{i,i} (\bar{\rho} u'_{j,j}) - (\bar{\rho} u'_i u'_j)_{,ij} - 2 \bar{u}_{i,ij} \bar{\rho} u'_j \quad , \quad (1.50)$$

qui regroupe tous les termes du laplacien de la pression qui font intervenir la masse volumique moyenne (à comparer avec l'équation (1.21)). Puisque p' est connue dans une simulation directe, la partie compressible p'^C peut être évaluée par différence. Par la linéarité de la décomposition, on a $\overline{p' u'_{k,k}} = \overline{p'^I u'_{k,k}} + \overline{p'^C u'_{k,k}}$. Dans les simulations directes, la partie compressible oscille avec une période acoustique et une valeur moyenne très proche de zéro. Sa contribution est ainsi négligée. Il est visible par l'équation (1.50) que la solution pour la pression incompressible est constituée d'une partie rapide et d'une partie lente. Sarkar *et al.* proposent le modèle suivant:

$$\overline{p' u'_{k,k}} = \alpha_2 \bar{\rho} \tilde{u}_{i,j} b_{ij} 2 k M_t + \alpha_3 \bar{\rho} \varepsilon_s M_t^2 + \frac{16}{3} \alpha_4 \bar{\rho} \tilde{u}_{k,k} k M_t^2 \quad . \quad (1.51)$$

La partie lente peut être calibrée indépendamment dans une turbulence homogène isotrope. Sarkar *et al.* choisissent la valeur $\alpha_3 = 0.2$. La calibration pour le cisaillement homogène donne ensuite $\alpha_2 = 0.15$. Le troisième terme est identiquement nul dans un cisaillement pur. En l'absence des données pour un cas avec compression moyenne, Sarkar *et al.* négligent cette contribution ($\alpha_4 = 0$).

1.4.4 La dissipation turbulente

La dissipation turbulente ε_{ij} est définie par l'expression suivante [25]:

$$-\bar{\rho} \varepsilon_{ij} \equiv - \left(\mu \overline{S_{ik} u'_{j,k}} + \mu \overline{S_{jk} u'_{i,k}} \right) \quad . \quad (1.52)$$

Afin de relier notre définition avec des expressions obtenues dans le cadre de la moyenne de Reynolds, l'identité suivante peut être utilisée:

$$\bar{\rho} \varepsilon_{ij} = \underbrace{\mu \overline{S'_{kj} u'_{i,k}} + \mu \overline{S'_{ki} u'_{j,k}}}_{\bar{\rho} \hat{\varepsilon}_{ij}} + \overline{u'_{i,k}} \mu \left(\widetilde{S_{kj}} + \overline{S'_{kj}} \right) + \overline{u'_{j,k}} \mu \left(\widetilde{S_{ki}} + \overline{S'_{ki}} \right) \quad . \quad (1.53)$$

Certains auteurs définissent la dissipation par l'expression $\bar{\rho} \hat{\varepsilon}_{ij}$ [69, 44], ce qui diffère de notre définition par les termes en fonction du gradient du flux de masse turbulent de l'équation (1.53).[†]

Tagawa *et al.* [70] ont utilisé un système d'équations de transport pour les composantes de la dissipation afin de calculer des écoulements pariétaux. Une telle approche est d'une très grande complexité et elle peut être justifiée par l'anisotropie de la dissipation au voisinage d'une paroi. Dans la majorité des fermetures de second ordre, les composantes de la dissipation sont déterminées algébriquement par le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente $\varepsilon \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{ii}$. Puisque nous considérons des écoulements à nombre de Reynolds élevé, nous supposons que les petites structures qui contribuent le plus à la dissipation sont quasi-isotropes, permettant la relation suivante:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \quad . \quad (1.54)$$

On peut d'ailleurs considérer que toute anisotropie de la dissipation est absorbée dans le modèle pour la partie lente de la corrélation entre pression et déformation (Lumley [15], voir équation (1.33)). On a donc réduit le problème à la détermination de la trace du tenseur de la dissipation.

[†]On remarque l'identité $\overline{u'_{i,k} S'_{kj}} = \overline{u'_{i,k} S_{kj}}$.

1.4.4.1 Le fluide incompressible

Puisque l'équation exacte pour la dissipation (définie en incompressible par $\bar{\varepsilon} \equiv \overline{\nu u'_{i,k} u'_{i,k}}$) fait intervenir un grand nombre de nouvelles corrélations inconnues, une équation phénoménologique est souvent [35, 71, 5] utilisée en substitution de l'équation exacte. Elle a la forme générale suivante:

$$\partial_t (\bar{\varepsilon}) + \bar{u}_k (\bar{\varepsilon})_{,k} = \mathcal{P}_{\bar{\varepsilon}} + \mathcal{D}_{\bar{\varepsilon}}^t + \mathcal{D}_{\bar{\varepsilon}}^\nu - \Phi_{\bar{\varepsilon}} \quad , \quad (1.55)$$

où $\mathcal{P}_{\bar{\varepsilon}}$ désigne les termes de production, $\mathcal{D}_{\bar{\varepsilon}}^t$ et $\mathcal{D}_{\bar{\varepsilon}}^\nu$ la diffusion turbulente et visqueuse respectivement et $\Phi_{\bar{\varepsilon}}$ la destruction. La modélisation du second membre de l'équation (1.55) est faite par l'analogie avec l'équation pour l'énergie cinétique turbulente (dont les termes sont obtenus en prenant la trace de l'équation (1.18)). Les termes diffusifs sont écrits en remplaçant k par $\bar{\varepsilon}$ et un modèle équivalent est utilisé (voir paragraphe 1.4.5). La production et la destruction sont exprimées par:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\bar{\varepsilon}} &= C_{\varepsilon 1} \cdot \frac{\bar{\varepsilon}}{k} \left(-\overline{u'_i u'_j} \bar{u}_{i,j} \right) \\ \Phi_{\bar{\varepsilon}} &= C_{\varepsilon 2} \cdot \frac{\bar{\varepsilon}}{k} \cdot \bar{\varepsilon} \quad . \end{aligned} \quad (1.56)$$

La constante de la destruction $C_{\varepsilon 2}$ peut être calibrée par référence à la décroissance de turbulence isotrope en absence de production. Dans un écoulement homogène à cisaillement pur, le rapport entre dissipation et production de k permet de déterminer $C_{\varepsilon 1}$ en fonction de la valeur de $C_{\varepsilon 2}$. Finalement, les coefficients intervenant dans le modèle de diffusion sont liés à $C_{\varepsilon 1}$ et $C_{\varepsilon 2}$ par les considérations de cohérence exposées dans l'annexe B.

1.4.4.2 Le fluide compressible

L'équation (1.55) peut être réécrite en introduisant une masse volumique variable:

$$\partial_t \left(\bar{\rho} \varepsilon^{(\rho v)} \right) + \left(\tilde{u}_k \bar{\rho} \varepsilon^{(\rho v)} \right)_{,k} = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon^{(\rho v)}}{k} \bar{\rho} \tilde{u}_{i,j} \widetilde{u''_i u''_j} + \mathcal{D}_{\varepsilon}^t + \mathcal{D}_{\varepsilon}^\nu - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \frac{\left(\varepsilon^{(\rho v)} \right)^2}{k} \quad , \quad (1.57)$$

où on a utilisé le symbole $\varepsilon^{(\rho v)}$ afin de noter la dissipation obtenue par une simple extension du modèle incompressible.

En réalité, le taux de dissipation peut dévier de la valeur prédite par l'équation (1.57) à cause de différents phénomènes physiques (compressibilité, rotation, etc.). Nous considérons ici les modifications apportées par l'action d'une dilatation moyenne ainsi que celles dues à la dilatation fluctuante.

Influence de la dilatation moyenne. Une dilatation moyenne considérable peut être créée même si le nombre de Mach moyen est petit, par exemple dans un écoulement confiné qui est comprimé. Quand la dilatation moyenne est non-nulle et que, en même temps, la dilatation fluctuante est négligeable, on parle de turbulence "compressée".

Reynolds [72] a montré que la variation de la dissipation dépend d'un terme de production supplémentaire $S_{\varepsilon 1}$ qui est fonction de la dilatation moyenne:

$$S_{\varepsilon 1} = (1 - C_{\varepsilon 3}) \bar{\rho} \varepsilon^{(\rho v)} \tilde{u}_{i,i} \quad . \quad (1.58)$$

Il déduit la valeur de la constante $C_{\varepsilon 3}$ en considérant la conservation du moment angulaire des grandes échelles de la turbulence k^2/ε dans une compression sphérique, rapide. Reynolds obtient:

$$C_{\varepsilon 3} = (7 - 2 C_{\varepsilon 1}) \frac{1}{3} \quad . \quad (1.59)$$

Cambon *et al.* [73] ont confirmé le résultat de Reynolds par une transformation des équations de Navier-Stokes qui permet – dans la limite $M_t \rightarrow 0$ – d’exprimer la variation d’énergie cinétique k dans une compression sphérique par une décroissance isotrope. Ces résultats sont en accord avec les simulations directes effectuées par Coleman et Mansour [9].

Morel et Mansour (cf. [74]) ont généralisé l’approche de Reynolds en considérant la variation d’un volume élémentaire du champ turbulent soumis à différents types de compression (sphérique, axiale, radiale). Ils proposent une formule approximative valable pour une compression générale. Néanmoins, Cambon *et al.* montrent dans le cas d’une compression axiale que les prédictions du modèle de Morel et Mansour sont quasiment équivalentes à celles obtenues avec le modèle de Reynolds.

Par une analyse d’ordre de grandeur appliquée aux termes de l’équation exacte pour la dissipation dans une turbulence compressée, El Tahry [39] observe – entre autres termes d’importance dans un écoulement réactif – la présence d’un terme lié à la variation temporelle de la viscosité, à savoir:

$$S_{\varepsilon 2} = \bar{\rho} \varepsilon^{(\rho v)} \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dt} . \quad (1.60)$$

Par la suite, Coleman et Mansour [9] ont démontré l’importance du terme de viscosité dans une compression rapide à faible nombre de Mach turbulent. L’équation (1.57) avec les termes $S_{\varepsilon 1}$ et $S_{\varepsilon 2}$ (inclus au second membre) est capable de prédire précisément les résultats de simulation directe.

Supposant que les variations d’état thermodynamique sont isentropiques, on peut montrer que l’utilisation d’une loi en puissance pour la viscosité $\mu = \mu_0 \cdot (\tilde{T}/T_0)^n$, mène à la relation suivante dans un écoulement homogène:

$$\frac{d\nu}{dt} \frac{1}{\nu} = [1 - n(\gamma - 1)] \tilde{u}_{i,i} . \quad (1.61)$$

Zhang *et al.* [75] et d’autres auteurs utilisent la relation (1.61) comme une approximation de la situation générale dans leur calcul numérique afin d’éviter des problèmes de stabilité dus au couplage avec l’équation d’énergie.

Influence de la dilatation fluctuante. Puisque la dilatation fluctuante peut être non-nulle même en l’absence d’un gradient de la vitesse moyenne, on peut étudier son influence sur la dissipation dans un écoulement homogène isotrope, pour lequel la variation de la tension de Reynolds se réduit à une décroissance de l’énergie:

$$d_t k = \frac{\overline{p' u''_{k,k}}}{\bar{\rho}} - \varepsilon . \quad (1.62)$$

On remarque que dans le cas d’un écoulement homogène, les moyennes de Reynolds et de Favre sont équivalentes [8] et les définitions ε et $\hat{\varepsilon}$ sont interchangeables.

Le paramètre qui indique l’intensité de la compressibilité est, dans ce cas, le nombre de Mach turbulent. En effet, dans les simulations directes de turbulence homogène isotrope de Sarkar *et al.* [44], la dissipation augmente en fonction de M_t tandis que la pression-dilatation reste assez faible. La décroissance de l’énergie k accélérée par l’influence de la compressibilité n’est pas prédite par le modèle standard de la dissipation (équation (1.57)).

Sarkar *et al.* [44] et Zeman [76] ont indépendamment séparé la dissipation totale en une partie solénoïdale ε_s et une partie dilatationnelle ε_d , écrivant

$$\varepsilon \equiv \mu \overline{S'_{ij} u'_{i,j}} = \underbrace{\mu \overline{\omega'_{kl} \omega'_{kl}}}_{\varepsilon_s} + \underbrace{\mu \frac{4}{3} \overline{u'_{k,k} u'_{k,k}}}_{\varepsilon_d} , \quad (1.63)$$

ce qui est une opération exacte dans un écoulement homogène. La partie dilatationnelle est identiquement nulle dans le cas incompressible; en général elle est non-négative. La représentation du terme ε_d dans le cadre d'un modèle du second ordre a été l'objet de différentes études, parmi lesquelles on discutera les suivantes:

- Dans une approche phénoménologique, El-Baz et Launder [46] proposent de modéliser l'influence de la dissipation dilatationnelle par une modification du terme de destruction dans l'équation (1.57), en écrivant

$$C_{\varepsilon 2} = \frac{C_{\varepsilon 2})_{inc}}{1 + 1.6 M_t^2} \quad , \quad (1.64)$$

où $C_{\varepsilon 2})_{inc}$ correspond à la valeur utilisée dans un écoulement incompressible. L'équation ainsi modifiée est donc utilisée pour déterminer la dissipation totale (symboliquement: $\varepsilon = \varepsilon^{(\rho v)}$).

- Sarkar *et al.* [44] montrent que, dans leur DNS de décroissance isotrope, la partie solénoïdale de la dissipation ε_s n'est pas affectée par la variation du nombre de Mach turbulent. Ils supposent donc qu'une équation standard de la forme (1.57) peut être utilisée pour déterminer celle-ci, ce qui peut être écrit symboliquement par $\varepsilon_s = \varepsilon^{(\rho v)}$. Le modèle de Zeman présenté dans le paragraphe suivant implique une relation équivalente pour ε_s .

Afin de déterminer le terme ε_d , Sarkar *et al.* se basent sur la décomposition du champ de pression et de la vitesse introduite par Erlebacher *et al.* [77], où la première partie u^I et p^I est régie par les équations incompressibles et la partie compressible est définie par la différence avec l'ensemble des équations compressibles. Utilisant une troncature du système valable pour des nombres de Mach faibles, Sarkar *et al.* montrent que le mode compressible évolue beaucoup plus rapidement que le mode incompressible, ce qui implique un équilibre acoustique. La valeur des variables associée à cet état d'équilibre correspond à une équipartition entre l'énergie cinétique et potentielle du mode compressible. Tenant compte de l'équipartition, qui est confirmée dans leur DNS de décroissance isotrope, Sarkar *et al.* proposent le modèle suivant pour la dissipation compressible:

$$\varepsilon_d = \varepsilon_s [\alpha_1 M_t^2 + \mathcal{O}(M_t^4)] \quad , \quad (1.65)$$

où le terme en puissance quatre du Mach turbulent est négligé. La constante α_1 était d'abord calibrée par référence aux résultats des DNS de décroissance isotrope. Par la suite, la valeur a été modifiée à $\alpha_1 = 0.5$ par Sarkar *et al.* [45] au vu des résultats sur le cisaillement homogène.

- Quand la vitesse instantanée de l'écoulement dépasse localement la vitesse du son, un choc peut se former. La formation des chocs stationnaires, dits *shocklets*, a été observée dans les simulations directes bi- et tridimensionnelles avec et sans cisaillement moyen [47, 78] ainsi que dans une couche de mélange [13]. Dans les expériences, par contre, ces événements n'ont pu être confirmés avec certitude [79, 80]. Zeman [76] invoque une dissipation supplémentaire créée par les tourbillons qui passent à travers des *shocklets*. Les tourbillons sont soumis à une réduction de taille dans la direction perpendiculaire à l'orientation du *shocklet*. Cette réduction en taille est relativement localisée et associée aux petites échelles, puisque les *shocklets* sont fins par rapport aux grandes structures [81]. Il s'agit donc d'un autre mécanisme de cascade directe qui s'ajoute à la cascade habituelle.

Zeman exprime la dissipation dilatationnelle, instantanée par les conditions de saut à travers un *shocklet* en fonction de la probabilité d'apparition de vitesse supersonique. Il paramétrise la distribution de densité de probabilité (ddp) d'une forme prescrite par le nombre de Mach turbulent qui donne la variance. Le modèle de Zeman s'écrit:

$$\varepsilon_d = \varepsilon_s \cdot c_d \cdot F(M_t) \quad , \quad (1.66)$$

où l'intégrale de ddp est exprimée par une forme approximative $F(M_t)$ qui donne une dépendance exponentielle:

$$\begin{aligned} F &= 1 - \exp \left[- \{ (M_t - 0.25) / 0.8 \}^2 \right] & M_t \geq 0.25 \\ F &= 0 & M_t < 0.25 \end{aligned} \quad (1.67)$$

Les constantes numériques ont été initialement obtenues par calibration avec des calculs de couche de mélange dans la référence [76]. Les valeurs montrées ici sont celles adaptées pour un cisaillement homogène [82], avec $c_d = 0.75$. Dans une turbulence strictement isotrope, la ddp est gaussienne et l'intégrale peut être évaluée exactement [7].

- Sans aboutir à un modèle explicite pour la dissipation dilatationnelle, plusieurs études récentes ont remis en question la dépendance quadratique et exponentielle en M_t proposées dans les modèles de Sarkar *et al.* et Zeman.

Ristorcelli [83] utilise une approche statistique basée sur la perturbation des équations non-visqueuses, isentropiques. Un développement des expressions en supposant un faible nombre de Mach turbulent permet de lier la dilatation fluctuante aux champs de vitesse et de pression. À l'aide de l'hypothèse de quasi-normalité de la vitesse, la variance de la dilatation peut être évaluée ensuite. La formule analytique pour la partie dilatationnelle de la dissipation indique la relation suivante:

$$\varepsilon_d \sim \varepsilon_s \frac{M_t^4}{Re_l} [C_{R1} + C_{R2} \cdot f(S_{ij})] \quad (1.68)$$

La dépendance en M_t serait donc plutôt d'ordre quatre. De plus, la théorie de Ristorcelli prédit une proportionnalité inverse du nombre de Reynolds ainsi qu'une partie rapide en fonction du gradient de vitesse moyenne. Ristorcelli remarque que ce dernier résultat pourrait permettre à un modèle reposant sur ce raisonnement de distinguer entre un cisaillement libre et un écoulement de type couche limite qui est beaucoup moins sensible à la compressibilité pour des nombres de Mach turbulent comparables (voir les considérations du paragraphe 5.2.2).

Shao et Bertoglio [84] ont effectué des simulations à grandes échelles pour des écoulements homogènes isotropes, faiblement compressibles, dans lesquels l'énergie turbulente est maintenue par une forçage numérique afin d'étudier le comportement asymptotique. Pour des valeurs du nombre de Mach turbulent inférieures à 0.2, leur série de calculs indique la proportionnalité suivante:

$$\varepsilon_d \sim \varepsilon_s \frac{M_t^4}{Re_l} \quad (1.69)$$

ce qui confirme la théorie de Ristorcelli concernant la partie lente. La relation (1.69) a d'ailleurs été retrouvée dans une étude théorique portant sur le comportement de la partie compressible d'énergie cinétique effectuée par Praud [85].

1.4.5 Les termes de transport diffusifs

Le second membre de l'équation de transport de la tension de Reynolds (1.18) contient trois termes de transport (identifiés par leur forme conservative):

$$-\mathcal{T}_{ijk,k} = - \left[\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''} + \delta_{ik} \overline{u_j'' p'} + \delta_{jk} \overline{u_i'' p'} - \left(\mu \overline{S_{ik} u_j''} + \mu \overline{S_{jk} u_i''} \right) \right]_{,k} \quad (1.70)$$

Ces expressions sont identiquement nulles dans un écoulement homogène. Dans cette étude, nous allons finalement utiliser une approximation simple, basée sur le transport par gradient. Néanmoins, on exposera par la suite brièvement quelques propositions intéressantes qui ont été faites dans la littérature.

1.4.5.1 La diffusion visqueuse

La partie visqueuse de la diffusion $\mu \overline{S_{ik} u_j''} + \mu \overline{S_{jk} u_i''}$ est de l'ordre de $\mathcal{O}(Re_l^{-1})$ par rapport aux termes non-visqueux de l'expression (1.70). Par conséquent, cette contribution devient négligeable pour des grand nombres de Reynolds [31, 34, 52]. Quand on s'approche d'une paroi solide, par contre, l'importance du terme visqueux augmente dû à la condition d'adhérence. Une façon très simple d'introduire une diffusion visqueuse dans l'équation de la tension de Reynolds est l'expression suivante:

$$\left[\mu \overline{S_{ik} u_j''} + \mu \overline{S_{jk} u_i''} \right]_{,k} = \left[\mu \left(\widetilde{u_i'' u_j''} \right)_{,k} \right]_{,k} . \quad (1.71)$$

On remarque que dans un contexte strictement incompressible ($u_i'' = u_i'$, $u_{k,k}' = 0$), la relation (1.71) est exacte en conjonction avec l'utilisation de la définition (1.32) pour la dissipation [33].

1.4.5.2 La diffusion par la pression

La partie conservative de la corrélation entre vitesse et pression est souvent considérée comme négligeable par les auteurs des modèles statistiques [31, 24]. De plus, les corrélations pression-vitesse sont en général difficiles à obtenir expérimentalement. Afin de quantifier l'importance de la diffusion par les termes de pression, un bilan des termes de l'équation d'énergie k peut être effectué. Le seul terme non-déterminé $(\overline{p' u_k'})_{,k}$ doit équilibrer la somme des termes mesurés. Dans un jet pariétal étudié par Irwin [86], par exemple, la contribution de la corrélation pression-vitesse à la diffusion est trouvée négligeable.

Dans les simulations directes de l'écoulement dans un canal établi de Huang *et al.* [87] la diffusion due à la contribution de la pression n'a qu'une influence négligeable sur le bilan de l'énergie cinétique de la turbulence. Ce résultat est valable pour le régime incompressible ainsi que pour des nombres de Mach élevés. Les effets d'inhomogénéité peuvent être analysés en l'absence du gradient moyen en considérant une couche de mélange entre deux zones de différentes intensités de turbulence. Cette couche de mélange non-cisaillée a été étudiée par le biais de la simulation à grandes échelles par Shao [88] et en utilisant la simulation directe par Briggs *et al.* [89]. Dans les deux cas, la contribution de la pression est petite devant celle de la corrélation triple de vitesse, mais elle n'est pas jugée négligeable par les auteurs.

Dans le cadre de l'approche statistique en un point, les modèles suivants ont été publiés:

- Harlow et Nakayama [35] ont proposé une expression de transport par le gradient de la pression moyenne qui s'écrit:

$$\overline{u_i' p'} = -C_{HN} \frac{\mu_t}{\rho} \overline{p}_{,i} . \quad (1.72)$$

- Donaldson (cf. Daly et Harlow [30]) a exprimé le terme en question par une diffusion de la tension de Reynolds. Son modèle s'écrit:

$$\overline{u_i' p'} = -C_D \mu_t \left(\overline{u_i' u_k'} \right)_{,k} . \quad (1.73)$$

Mellor et Herring [33] utilisent une forme isotrope de l'équation (1.73) en remplaçant $\overline{u_i' u_k'}$ par k .

- Lumley [15] a employé une méthode analogue à la construction de la partie lente de la corrélation entre pression et déformation. Introduisant une fonction linéaire des corrélations triples de vitesse (objet des conditions de réalisabilité) dans les expressions intégrales non-déterminées, il obtient le modèle suivant:

$$\overline{u_i' p'} = -C_L \overline{\rho} \overline{u_i' u_k' u_k'} . \quad (1.74)$$

- Sarkar et Lakshmanan [52] et Lele [23] ont remarqué une condition de consistance pour la diffusion par la contribution de la pression dans un fluide compressible. La relation suivante est une conséquence (exacte) de la loi d'état du gaz parfait:

$$\overline{u'_i p'} = (\gamma - 1) \overline{\rho} \widetilde{e'' u''_i} - \overline{u''_i p} \quad . \quad (1.75)$$

Les flux de masse et pour les flux de chaleur turbulent étant modélisés par ailleurs, l'équation (1.75) donne la diffusion par la pression.

Sarkar et Lakshmanan utilisent un modèle de transport par gradient pour chacun de ces flux turbulents, le coefficient de diffusivité étant choisi équivalent dans les deux cas, l'expression s'écrit:

$$\overline{u'_i p'} = -\frac{\mu_t}{\overline{\rho}} c_v (\gamma - 1) \left[\frac{1}{Pr_t} \overline{\rho} \tilde{T}_{,i} + \frac{1}{\sigma_\rho} \tilde{T} \overline{\rho}_{,i} \right] = -\frac{\mu_t}{\overline{\rho}} \frac{1}{Pr_t} \overline{p}_{,i} \quad . \quad (1.76)$$

La substitution de la loi d'état revient dans ce cas au modèle de Harlow et Nakayama de l'équation (1.72).

Shao montre qu'en utilisant le modèle de Lumley (1.74) avec $C_L = 1/10$ et le modèle de Hanjalic et Launder (voir le paragraphe suivant, équation (1.77)) pour le terme $\overline{u'_k u'_k u'_i}$, on prédit correctement la variation du terme de pression dans le cas de la couche de mélange non-cisaillée en régime incompressible. Il remarque également que la somme des termes diffusifs $\mathcal{T}_{ijk}$ peut être représentée par le modèle de Daly et Harlow (équation (1.79)) en utilisant $C_s = 0.22$. Pour le même cas, Briggs *et al.* ont également considéré des modèles pour la somme des termes de corrélation triple et de corrélations pression-vitesse. Ils constatent des prédictions qui sont qualitativement correctes, le modèle plus complexe de Hanjalic et Launder (1.77) n'offrant que très peu d'améliorations par rapport à la version "isotropisée" (1.78).

Cette analyse bibliographique et les références d'ordre de grandeurs montrant que les termes de pression ne semblent pas jouer un rôle important pour le processus de diffusion nous ont amené à "absorber" la diffusion par la pression dans le modèle pour la corrélation triple de vitesses.

1.4.5.3 La corrélation triple de vitesses

Hanjalic et Launder [31] ont effectué une analyse qui porte sur l'équation de transport de la corrélation triple de vitesses. Afin d'obtenir une expression algébrique en fonction des moments d'ordre deux, ils font les hypothèses suivantes:

- la convection est négligeable,
- la production par les gradients de la vitesse moyenne est négligeable,
- les termes visqueux sont négligeables,
- le champ de vitesse suit une distribution quasi-normale,
- les corrélations entre pression et vitesses sont modélisés de façon analogue aux expressions correspondantes dans l'équation des corrélations doubles.

Finalement, Hanjalic et Launder proposent la formule suivante:

$$\overline{u'_i u'_j u'_k} = -C_s \frac{k}{\overline{\varepsilon}} \left[\overline{u'_i u'_l} \left(\overline{u'_j u'_k} \right)_{,l} + \overline{u'_j u'_l} \left(\overline{u'_i u'_k} \right)_{,l} + \overline{u'_k u'_l} \left(\overline{u'_i u'_j} \right)_{,l} \right] \quad . \quad (1.77)$$

La convection n'est pas négligeable dans tous les cas. Pourtant, l'utilisation de l'équation de transport de la corrélation triple est associée à divers problèmes de fermeture supplémentaires, notamment en ce qui concerne le traitement des zones de proche paroi (voir par exemple l'étude de Amano et Goel [24]).

Vandromme [50] a employé la méthode de Hanjalic et Launder dans le cas d'un fluide compressible. A cause de la formulation en moyenne de Favre des équations de base, l'hypothèse de quasi-normalité pour les corrélations quadruples $u_i'' u_j'' u_k'' u_l''$ introduit un très grand nombre de termes en fonction du flux de masse dans le système. Vandromme effectue une estimation de l'ordre de grandeur et ne garde qu'une partie des expressions. Néanmoins, le modèle final consiste en un système d'équations aux dérivées partielles couplées pour les composantes du tenseur des corrélations d'ordre trois.

Plusieurs auteurs ont proposé et utilisé des simplifications du modèle de Hanjalic et Launder qui, en soi, a déjà une forme très complexe. On indique par la suite les formulations dans le cadre de la moyenne de Favre pour un fluide à masse volumique variable.

- Mellor et Herring [33] proposent la forme isotropisée du modèle (1.77):

$$\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''} = -C_s \overline{\rho} \frac{k^2}{\varepsilon} \left[\left(\widetilde{u_j'' u_k''} \right)_{,i} + \left(\widetilde{u_k'' u_i''} \right)_{,j} + \left(\widetilde{u_i'' u_j''} \right)_{,k} \right] . \quad (1.78)$$

- Daly et Harlow [30] ont utilisé une expression de transport par gradient généralisée, qui s'écrit:

$$\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''} = -C_s \overline{\rho} \frac{k}{\varepsilon} u_k'' \widetilde{u_m''} \left(\widetilde{u_i'' u_j''} \right)_{,m} . \quad (1.79)$$

On remarque que cette relation (comme la suivante) n'est pas symétrique par rapport aux trois indices i, j, k .

- Le modèle de transport par gradient avec une diffusivité isotrope s'écrit [90]:

$$\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''} = -\frac{\mu_t}{\sigma_R} \left(\widetilde{u_i'' u_j''} \right)_{,k} . \quad (1.80)$$

Ce modèle a été préféré dans les calculs de Lien et Leschziner [91] et de Davidson [55] pour des raisons de stabilité numérique.

La discussion du paragraphe précédent a montré que, dans certains cas, l'avantage de la formulation de Hanjalic et Launder (1.77) par rapport au modèle de Daly et Harlow (1.79) ou à celui de Mellor et Herring (1.78) est petit si on considère qu'il s'agit des modèles pour l'ensemble des termes $\mathcal{T}_{ijk}$. Amano et Goel [24] ont comparé des résultats obtenus en utilisant ces modèles algébriques dans le cas des écoulements derrière une marche descendante. Qualitativement, les prédictions sont équivalentes. Le modèle isotrope (1.80) donne des niveaux systématiquement trop faibles ce qui peut être attribué à la valeur de la constante de $\sigma_R = 2.25$ qui est utilisé par Amano et Goel. Nous supposons que ce modèle donne un accord comparable à celui des expressions plus complexes avec une constante ajustée.

Nous allons dans cette étude opter pour le modèle isotrope. L'expression finale pour la somme des termes diffusifs s'écrit donc:

$$-\mathcal{T}_{ijk,k} = \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_R} \right) \left(\widetilde{u_i'' u_j''} \right)_{,k} \right]_{,k} . \quad (1.81)$$

La contraction de cette expression apparaît dans l'équation de l'énergie totale:

$$-\frac{1}{2} \mathcal{T}_{jjk,j} = \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_R} \right) k_{,j} \right]_{,j} . \quad (1.82)$$

L'analogie entre le transport diffusif de l'énergie cinétique k et son taux de dissipation ε (voir le paragraphe 1.4.4.1) permet d'écrire:

$$\mathcal{D}_\varepsilon^t + \mathcal{D}_\varepsilon^\nu = \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \varepsilon_{,j} \right]_{,j} . \quad (1.83)$$

Dans l'annexe B nous utilisons la condition de Lele afin de déterminer les constantes de diffusivité σ_R et σ_ε de manière consistante avec le modèle pour la dissipation. Nous obtenons les valeurs suivantes: $\sigma_R = 1.0$ et $\sigma_\varepsilon = 1.3$.

1.4.6 Les corrélations avec la densité

Par sa définition, la moyenne d'ensemble de la fluctuation d'une variable ϕ pondérée par la masse volumique n'est pas identiquement nulle. Cette quantité $\overline{\phi''}$ représente la différence entre la moyenne de Reynolds et la moyenne de Favre, $\overline{\phi''} = \overline{\phi} - \overline{\phi}$. Elle peut être exprimée par la corrélation avec la masse volumique fluctuante de la manière suivante:

$$\overline{\phi''} = -\frac{\overline{\rho' \phi'}}{\overline{\rho}} = -\frac{\overline{\rho' \phi''}}{\overline{\rho}} \quad , \quad (1.84)$$

ce qui souligne qu'il s'agit d'un moment d'ordre deux.

Dans le cadre de notre approche, les corrélations du type $\overline{\phi''}$ interviennent implicitement quand on considère les équations d'évolution de certaines grandeurs (par exemple équation (1.36)) ou quand on passe du formalisme de Favre au formalisme de Reynolds. Explicitement, les corrélations de la masse volumique avec la vitesse et avec la température apparaissent dans le système des équations moyennes (1.12) et (1.18) (constituant dans chaque cas la dernière ligne du second membre). On peut ainsi distinguer une partie visqueuse, une partie thermique et une troisième partie liée à la pression:

- la décomposition des termes visqueux fait apparaître une expression de dissipation turbulente dans l'équation de la quantité de mouvement,

$$+ \left(\mu \overline{S''_{ij}} \right)_{,j} \quad , \quad (1.85)$$

et dans l'équation de l'énergie totale

$$+ \left(\mu \tilde{u}_i \overline{S''_{ij}} \right)_{,j} \quad . \quad (1.86)$$

- le flux de chaleur donne lieu à une corrélation entre température et densité qui s'écrit:

$$+ \left(\lambda \overline{T''} \right)_{,j} \quad . \quad (1.87)$$

- des expressions liées à la pression interviennent dans l'équation de l'énergie totale sous la forme d'une diffusion

$$- \left(\overline{p} \overline{u''_j} \right)_{,j} \quad , \quad (1.88)$$

et dans l'équation de transport de la tension de Reynolds sous forme d'un terme de source

$$- \left(\overline{u''_i} \overline{p}_{,j} + \overline{u''_j} \overline{p}_{,i} \right) \quad . \quad (1.89)$$

D'une part, $\overline{\phi''}$ est nulle dans un fluide incompressible pour toute grandeur ϕ . D'autre part, l'ensemble des termes (1.85) à (1.89) liés aux corrélations avec la densité est nul dans un écoulement homogène. De plus, Blaisdell *et al.* [8] ont montré que dans un écoulement homogène, les moyennes de Favre et Reynolds sont identiques et par conséquent $\overline{u''_i} = 0$. Ceci indique que les corrélations avec la densité sont en même temps une mesure de l'inhomogénéité et de la compressibilité.

Les effets visqueux et thermique des corrélations avec la masse volumique (correspondant aux expressions (1.85), (1.86) et (1.87)) sont de l'ordre de $\mathcal{O}(Re_l^{-1})$ et $\mathcal{O}(Re_l^{-1} \cdot Pr^{-1})$ respectivement par rapport aux effets liés à la pression. Dans les écoulements à nombre de Reynolds élevé, ces deux contributions sont donc négligeables. Il nous reste alors à déterminer la corrélation entre la densité et la vitesse $\overline{u''_i}$ afin de fermer les expressions (1.88) et (1.89).

1.4.6.1 La modélisation du flux de masse turbulent

La quantité $\overline{u_i''}$ représente le flux de masse turbulent à travers une ligne de courant de la vitesse moyenne $\overline{u_i}$, ce qui est évident en exprimant la conservation de la masse par la moyenne de Reynolds:

$$\partial_t (\overline{\rho}) + (\overline{\rho u_i})_{,i} = - \left(\overline{\rho' u_i'} \right)_{,i} . \quad (1.90)$$

Une équation exacte pour $\overline{u_i''}$ peut être déduite des équations de Navier-Stokes de la manière suivante [43]:

- soustraire l'équation moyenne de la quantité de mouvement (1.12) de sa forme instantanée (1.1), ce qui donne pour les termes temporels:

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho u_i) - \partial_t (\overline{\rho u_i}) &= \partial_t (\rho u_i'') + \partial_t (\rho' \tilde{u}_i) \\ &= \rho \partial_t (u_i'') + \rho' \partial_t (\tilde{u}_i) + u_i'' \partial_t (\rho) + \tilde{u}_i \partial_t (\rho') \end{aligned} \quad (1.91)$$

- exprimer $\partial_t(\rho)$ et $\partial_t(\rho')$ par la forme de l'équation de la masse correspondant.
- diviser par la masse volumique instantanée ρ et moyenner.

Le résultat s'écrit:

$$\begin{aligned} \partial_t (\overline{u_i''}) + (\overline{\tilde{u}_j u_i''})_{,j} &= \underbrace{\tilde{u}_{j,j} \overline{u_i''} - \tilde{u}_{i,j} \overline{u_j''}}_{\text{I}} + \underbrace{\overline{u_i'' u_j''} \frac{\overline{\rho_{,j}}}{\overline{\rho}}}_{\text{II}} + \underbrace{\overline{u_i'' u_{j,j}''}}_{\text{III}} + \underbrace{\left[\overline{u_i'' u_j''} - \overline{u_i'' u_j''} \right]_{,j}}_{\text{IV}} \\ &\quad + \underbrace{\left[(\mu S'_{ij})_{,j} / \rho \right] - \left[p'_{,i} / \rho \right] - \left[\rho' / \rho (\partial_t(\tilde{u}_i) + \tilde{u}_j \tilde{u}_{i,j}) \right]}_{\text{V}} . \end{aligned} \quad (1.92)$$

Les termes I et II de l'équation de transport (1.92) représentent la production par interaction avec les gradients de vitesse moyenne et les gradients de la masse volumique moyenne. Ce dernier mécanisme est principalement responsable pour la création du flux de masse turbulent dans un écoulement à bas nombre de Mach. L'expression IV traduit une diffusion liée à la différence des deux types de moyenne de la corrélation double de vitesses. La corrélation entre le flux de masse et la dilatation fluctuante (III) est une grandeur inconnue qui doit être nulle dans la limite $M_t \rightarrow 0$. L'expression V peut être évaluée par un développement du dénominateur par série de Taylor ($1/\rho = 1/\overline{\rho} - \rho'/\overline{\rho}^2 + \mathcal{O}(\rho'^2)$). La contribution du terme visqueux est ainsi négligeable pour des nombres de Reynolds élevés. Les deux expressions inertielles qui font partie de V sont de l'ordre de $\mathcal{O}(\sqrt{\rho'^2/\overline{\rho}})$ par rapport aux termes I à III [43].

Sur la base de l'équation (1.92), plusieurs modèles pour déterminer le flux de masse ont été proposés:

- Ristorcelli propose l'utilisation de l'équation (1.92) en négligeant les termes IV et V. Dans ce cas, la seule inconnue est la corrélation III, qu'il exprime par un modèle de relaxation:

$$\overline{u_i'' u_{j,j}''} = - \frac{\overline{u_i''}}{\tau_d} , \quad (1.93)$$

où τ_d est considéré comme une échelle dilatationnelle $\tau_d = M_t k / \varepsilon$. Précédemment, Zeman [92] avait proposé un modèle équivalent qui ne diffère que par une constante à cause d'une autre définition de l'échelle τ_d .

- En faisant l'hypothèse d'un équilibre structurel entre le flux de masse turbulent et l'énergie cinétique turbulente, $d_t(\overline{u_i''}/\sqrt{k}) = 0$, Ristorcelli déduit une troncature algébrique du modèle

de transport (1.92) en fonction du second membre de l'équation pour k . En négligeant la diffusion, Ristorcelli obtient une expression explicite par inversion du système algébrique:

$$\overline{u_i''} = \tau \cdot [\beta_0 \delta_{ij} + \beta_1 \tau \widetilde{u_{i,j}} + \beta_2 \tau^2 \widetilde{u_{i,k}} \widetilde{u_{k,j}}] \cdot \widetilde{u_j'' u_l''} \cdot \frac{\overline{\rho_{,l}}}{\overline{\rho}} , \quad (1.94)$$

avec la nouvelle échelle de temps $\tau = \tau_d / [1 + M_t / 2 (\mathcal{P} / \varepsilon - 1)]$.[†] Les coefficients β_i sont des fonctions scalaires des invariants de la matrice $A \equiv (\delta_{ij} + \tau \widetilde{u_{i,j}})$ ($\{\cdot\}$ désigne la trace d'une matrice):

$$\begin{aligned} \beta_0 &= (1 - I_A + II_A) / III_A, & I_A &= \{A\}, \\ \beta_1 &= (2 - I_A) / III_A, & II_A &= \frac{1}{2} (\{A\}^2 - \{A^2\}), \\ \beta_2 &= 1 / III_A, & III_A &= \frac{1}{6} (\{A\}^3 - 3\{A\}\{A^2\} + 2\{A^3\}). \end{aligned}$$

Par rapport aux définitions du paragraphe 1.5, ce modèle est non-réalisable et non-objectif.

- Quand l'influence des gradients de vitesse moyenne est négligée, l'expression algébrique complète de Ristorcelli (1.94) est simplifiée en une forme de transport par gradient généralisée qui s'écrit:

$$\overline{u_i''} = \tau \widetilde{u_i'' u_l''} \frac{\overline{\rho_{,l}}}{\overline{\rho}} , \quad (1.95)$$

où une notion de non-équilibre entre production $\mathcal{P}$ et dissipation ε est encore contenu dans le coefficient τ . Ce modèle respecte la réalisabilité forte, l'objectivité et il permet la caractérisation entropique du système d'équations (voir l'annexe C).

- Une expression de transport par gradient isotrope est souvent utilisée [52, 53], à savoir:

$$\overline{u_i''} = \frac{\mu_t}{\sigma_\rho} \frac{\overline{\rho_{,i}}}{\overline{\rho^2}} . \quad (1.96)$$

Ici, le flux de masse suit la direction du gradient de la masse volumique, ce qui n'est pas en accord avec des observations expérimentales [93] et numériques [43, 87]. De plus, le modèle isotrope (1.96) n'est pas réalisable. Yoshizawa [94] a noté par ailleurs que l'insertion du modèle isotrope (1.96) dans l'équation de transport de la masse volumique moyenne (1.90) crée une expression de dérivée seconde de la forme d'une diffusion moléculaire. Une telle forme elliptique ne correspond pas au caractère de la densité dans un écoulement compressible.

S'appuyant sur l'hypothèse d'une variation polytropique d'état thermodynamique (voir paragraphe 1.4.3), Rubesin [41, 42] a proposé trois modèles pour le flux de masse turbulent:

- en exprimant les fluctuations de masse volumique par celles de la température à l'aide de la relation polytropique (1.46), on obtient:

$$\overline{u_i''} = - \frac{1}{\widetilde{T} (n - 1)} \widetilde{T'' u_i''} , \quad (1.97)$$

où la corrélation $\overline{\rho' T'' u_i''}$ a été négligée. Le flux de masse est ainsi lié au flux de chaleur turbulent qui doit être modélisé de toute façon.

Dans notre étude, nous utilisons l'approche de transport par gradient (1.16) pour le flux de chaleur. En substituant ce modèle de flux dans l'expression de Rubesin pour le flux de masse, nous obtenons:

$$\overline{u_i''} = \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{1}{\overline{\rho} (n - 1)} \frac{\widetilde{T_{,i}}}{\widetilde{T}} , \quad (1.98)$$

ce qui induit aussi une expression non-réalisable.

[†]On remarque que Ristorcelli donne l'expression $\tau = \tau_d / [1 + M_t (\mathcal{P} / \varepsilon - 1)]$ due à une erreur de calcul algébrique.

- en déterminant les fluctuations de température dans l'expression (1.97) à l'aide de l'hypothèse d'une température totale constante, Rubesin écrit le modèle suivant:

$$\overline{u_i''} = \tilde{u}_j \frac{(\gamma - 1)}{(n - 1)} M_t^2 \left(b_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) . \quad (1.99)$$

Puisque ce modèle n'est pas proportionnel à un gradient du champ moyen ou autre mesure d'inhomogénéité, il n'est pas conforme avec la limite homogène, où le flux de masse est nul.

- plus récemment, Rubesin [42] a déduit un modèle plus général en utilisant une hypothèse de transport par gradient généralisée afin d'exprimer le flux de chaleur de l'expression (1.97), à savoir:

$$\overline{u_i''} = \frac{(\gamma - 1)}{(n - 1)} C_e \frac{k}{\varepsilon} M_t^2 \left(b_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \right) c_p \tilde{T}_{,j} , \quad (1.100)$$

où $C_e = 0.35$. Cette expression ressemble au modèle algébrique simplifié de Ristorcelli (1.95) en ce qui concerne la dépendance en M_t qui assure la consistance dans la limite incompressible, l'anisotropie qui permet un flux contre le gradient moyen et la réalisabilité. Néanmoins, la différence réside dans l'utilisation du gradient de la température, ce qui ne permet pas une caractérisation entropique du système (voir l'annexe C.1), et induit la paramétrisation par deux constantes C_e et n .

La validité de l'hypothèse de polytropie a été testée dans différentes situations. Blaisdell *et al.* [8] l'ont confirmée dans un cisaillement homogène à différents nombres de Mach turbulent. L'exposant n prend la valeur isentropique dans ce cas. Dans un canal établi à vitesse débitante supersonique, par contre, Huang *et al.* [87] ont trouvé la valeur isobare $n = 0$. L'effet de blocage qu'exerce la paroi a tendance à supprimer les fluctuations de la pression [8]. Dans un écoulement complexe on s'attend donc à une grande variation de la valeur de l'exposant n , ce qui limite la généralité de l'approche polytropique.

1.5 La réalisabilité de la fermeture du second ordre

La fermeture du second ordre représente une approximation qui décrit certaines propriétés statistiques d'un écoulement turbulent, compressible. On s'attend à ce que ce modèle reflète en quelque sorte la réalité telle qu'elle est comparée, par exemple, à l'expérience. D'autre part, la modélisation est basée sur les équations de Navier-Stokes qui constituent une description exacte du processus. Le modèle doit également être conforme aux propriétés de ces équations fondamentales. Il est donc possible de déduire un nombre de contraintes à partir de considérations mathématiques (tensorielles), physiques et phénoménologiques s'appliquant aux variables du problème. La conformité avec l'ensemble de ces contraintes peut être appelée la *réalisabilité* de l'approche.

Une déviation par rapport à la solution des équations exactes vient d'une part de la modélisation des corrélations inconnues et d'autre part de la discrétisation des équations différentielles. Les deux types d'erreur doivent être considérées sous l'angle de la réalisabilité du résultat.

Une partie de la réalisabilité concerne directement les valeurs des différentes variables du problème qui sont bornées par des principes fondamentaux:

- positivité des variables thermodynamiques,
- vitesses réelles,
- inégalité de Schwarz,
- seconde principe de la thermodynamique.

On peut ainsi définir le concept de faible réalisabilité de manière suivante:

Le fait que la valeur d'une grandeur vérifie les principes fondamentaux formulés dans le paragraphe 1.5.1 est dit "faible réalisabilité".

Le concept de faible réalisabilité ne s'adresse pas explicitement au moyen d'obtenir la grandeur en question. Puisque nos variables sont solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles modélisées, quelques restrictions supplémentaires concernant l'ensemble de la fermeture peuvent être formulées. Ces conditions portent sur l'universalité de la solution ainsi que sur le comportement physique au voisinage d'un état limite:

- invariance par rapport au repère,
- notion de réalisabilité forte,
- hyperbolicité du système de premier ordre différentiel (en l'absence des modèles des termes diffusifs).

Nous donnons les contraintes qui concernent la formulation du modèle dans le paragraphe 1.5.2.

Une troisième type de réalisabilité est celle qui est associée à la résolution discrète des équations du modèle. Les considérations numériques sont traitées dans le chapitre 2. Dans l'annexe E.4 nous discutons la vérification de la réalisabilité faible dans notre code de calcul.

Nous nous intéressons par la suite à la conformité des fermetures présentées auparavant avec les différents aspects de la réalisabilité. Nous verrons dans le paragraphe 1.5.3 que très peu de résultats existent qui portent sur le système des équations dans la situation générale d'un écoulement inhomogène d'un fluide compressible.

1.5.1 Les contraintes fondamentales de la réalisabilité

Un champ physique est tel que la pression et la masse volumique sont positives, ce qui assure une température définie et une énergie interne positive. Cette condition est valable pour la valeur instantanée ainsi que pour la moyenne d'ensemble, on peut donc écrire:

$$\begin{aligned} \rho &> 0, & p &> 0 \\ \bar{\rho} &> 0, & \bar{p} &> 0 \end{aligned} \quad (1.101)$$

Afin d'avoir une énergie cinétique non-négative, la vitesse doit être réelle. Cette condition porte sur la valeur instantanée, moyenne et fluctuante: $u_\alpha^2 \geq 0$, $\bar{u}_\alpha^2 \geq 0$, $\overline{u_\alpha'^2} \geq 0$ (on rappelle ici que les indices grecs ne sont pas objet de sommation). La non-négativité est aussi valable pour la moyenne et la fluctuation de Favre: $\tilde{u}_\alpha^2 \geq 0$, $\overline{u_\alpha'^2} \geq 0$. En utilisant la positivité de la masse volumique on obtient

$$\overline{\rho u_\alpha'' u_\alpha''} = \overline{\rho u_\alpha''^2} \geq 0 \quad , \quad (1.102)$$

ce qui permet de traduire par la suite des théorèmes établis pour la moyenne de Reynolds à notre cas où la tension de Reynolds est exprimée par la moyenne de Favre. Une conséquence de la valeur réelle des vitesses est l'ensemble des inégalités suivantes [36, 16]:

$$f \geq 0 \quad \text{où} \quad f = \{\delta_1^i, \delta_2^i, \delta_3^i\} \quad i = 1 \dots 3 \quad , \quad (1.103)$$

avec les déterminants des sous-matrices de la tension de Reynolds:

$$\begin{aligned} \delta_1^\alpha &= \overline{u_\alpha'^2}, \\ \delta_2^\gamma &= \overline{u_\alpha'' u_\alpha''} \cdot \overline{u_\beta'' u_\beta''} - \overline{u_\alpha'' u_\beta''}^2, \quad \alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma, \beta \neq \gamma, \\ \delta_3 &= \det \left(\overline{u_i'' u_j''} \right). \end{aligned} \quad (1.104)$$

Schumann [36] a montré que la relation (1.103) avec les trois conditions $f = \{\delta_1^1, \delta_2^3, \delta_3\}$ est nécessaire et suffisante pour la faible réalisabilité de la tension de Reynolds. Il est souvent utile de considérer une des formulations analogues à (1.103), à savoir:

- la non-négativité des trois composantes diagonales $\widetilde{u''_{(\alpha)}u''_{(\alpha)}}$ du tenseur de Reynolds écrit en axes principaux (qui sont équivalentes aux trois valeurs propres $\lambda_{(\alpha)}$ du tenseur de Reynolds).
- la non-négativité des trois invariants de la tension de Reynolds $I_R = \{\widetilde{u''_i u''_j}\}$, $II_R = \{\widetilde{u''_i u''_j^2}\}$, $III_R = \{\widetilde{u''_i u''_j^3}\}$.

Lumley [15] (voir également les références [28, 95]) a utilisé l'inégalité de Schwarz afin d'établir une contrainte portant sur le flux turbulent d'un scalaire quelconque ϕ :

$$\overline{u''_\alpha u''_\alpha} \cdot \overline{\phi \phi} - \overline{u''_\alpha \phi}^2 \geq 0 \quad . \quad (1.105)$$

Cette condition signifie que le flux d'un scalaire dans une direction α doit devenir nul si la fluctuation de la vitesse dans cette direction s'annule. Puisque la tension de Reynolds $\widetilde{u''_\alpha u''_\alpha}$ s'annule en même temps que la corrélation $\overline{u''_\alpha u''_\alpha}$, une condition nécessaire de réalisabilité pour un flux scalaire s'écrit:

$$\widetilde{u''_\alpha u''_\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{u''_\alpha \phi} = 0 \quad . \quad (1.106)$$

D'autres contraintes plus générales liées à la matrice de corrélation entre la vitesse et le scalaire peuvent être invoquées [28] dans le cas où une équation de transport est utilisée pour déterminer le flux du scalaire. Les contraintes concernant une corrélation entre la vitesse et un scalaire sont appelées la *réalisabilité jointe*.

Par sa définition, la dissipation turbulente est non-négative $\varepsilon \geq 0$. Afin de permettre la définition d'une échelle de temps caractéristique des grandes structures $\theta \equiv k/\varepsilon$, on doit imposer la positivité de la dissipation. La condition s'écrit donc:

$$\theta \geq 0, \quad \theta^{-1} \geq 0 \quad . \quad (1.107)$$

Conforme à la seconde loi de la thermodynamique, la production d'entropie instantanée $s^* \equiv \ln(p/\rho^\gamma)$ est non-négative

$$d_t s^* \geq 0 \quad . \quad (1.108)$$

Quant au système des équations moyennes, la définition d'une fonction d'entropie $s \equiv \ln(\overline{p}/\overline{\rho}^\gamma)$ [96] permet d'établir une condition de positivité telle que (1.108) sous quelques restrictions concernant les modèles pour le flux de masse turbulent, la corrélation pression-dilatation et le flux de chaleur turbulent (voir l'annexe C.1). Une telle caractérisation entropique est nécessaire pour déterminer une solution unique d'un problème de Riemann associé à la partie hyperbolique du système des équations de transport. Cette propriété sera utilisée dans le chapitre 2.

1.5.2 Les contraintes concernant la formulation du modèle

Les équations modélisées doivent d'abord être indépendantes du choix du repère, ce qui est vérifié par une formulation tensorielle où les indices correspondent aux indices des expressions exactes [97]. De plus, les équations exactes vérifient une invariance galiléenne, c'est-à-dire que le résultat est invariant par rapport à la transformation du repère suivante:

$$x^* = A \cdot x + v \cdot t + c \quad , \quad (1.109)$$

où A est un tenseur orthogonal constant, v et c des vecteurs constants. Cette dernière contrainte est également respectée par tous les modèles présentés ici.

Speziale [37] a considéré la condition de l'objectivité:

Une expression est dit "objective" si avec un changement de référence temporelle et spatiale:

$$x^* = Q(t) \cdot x + b(t), \quad t^* = t + c \quad , \quad (1.110)$$

un champ vectoriel V se transforme selon:

$$V^* = Q \cdot V \quad , \quad (1.111)$$

et un tenseur R selon:

$$R^* = Q R Q^T \quad , \quad (1.112)$$

où c est une constante, b un champ vectoriel quelconque et Q un tenseur orthogonal.

Speziale montre que la corrélation double de vitesse est objective par définition. Parmi les termes de l'équation de transport de la tension de Reynolds, seul le terme de production n'est pas objectif. Par conséquent, un terme d'accélération $2\epsilon_{jkl}\Omega_k\widetilde{u_l''u_i''} + 2\epsilon_{ikl}\Omega_k\widetilde{u_l''u_j''}$ apparaît dans les équations transformées (ϵ_{ijk} est le tenseur de permutation; Ω_k est la vitesse angulaire du repère x^* par rapport à x). Ce terme supplémentaire ne représente pas une difficulté puisqu'il est exact et il pourrait donc être pris en compte dans une situation où le repère est accéléré (analogue aux termes de Coriolis). Les corrélations inconnues de l'équation pour $\widetilde{u_i''u_j''}$ respectent chacune individuellement l'objectivité. L'objectivité est donc une condition de réalisabilité légitime, qui n'est pourtant pas souvent imposée aux modèles. Plus particulièrement, on note qu'aucun des modèles pour la partie rapide de la pression-déformation présentés ici ne vérifie l'objectivité (voir la référence [98] pour un modèle simple, objectif et réalisable). Ceci vaut également pour le modèle pour la pression-dilatation proposé par Sarkar *et al.* dans l'équation (1.51). Les modèles lents, par contre, qui sont tous de la forme générale (1.35) respectent automatiquement la contrainte d'objectivité. Parmi les modèles pour le flux de masse turbulent, seulement le modèle de Ristorcelli (1.94) est une forme non-objective due à la dépendance des gradients de vitesse. Les modèles de diffusion du paragraphe 1.4.5 sont tous objectifs.

En considérant le comportement des équations exactes en voisinage de la limite donnée par de la réalisabilité faible, une condition plus forte que la faible réalisabilité peut être établie. Lumley [15] et Schumann [36] ont reconnue qu'une variable non-négative et différentiable doit approcher la valeur zéro avec une pente nulle. Shih et Lumley [28] ont utilisé comme condition supplémentaire la non-négativité de la dérivée seconde afin d'assurer l'accessibilité de l'état limite. Suivant la référence [16] nous définissons:

Une fermeture de second ordre est "fortement réalisable" par rapport à la tension de Reynolds si

$$f \geq 0 \quad \cup \quad f = 0 \quad \Rightarrow \quad (d_t(f) = 0 \quad \cup \quad d_{tt}(f) \geq 0) \quad , \quad (1.113)$$

avec $f = \{\delta_1^1, \delta_2^3, \delta_3\}$.

La formulation en utilisant les valeurs propres $f = \{\widetilde{u_{(1)}''^2}, \widetilde{u_{(2)}''^2}, \widetilde{u_{(3)}''^2}\}$ est équivalente. Dans la référence [16] il est démontré que la relation (1.113) est une conséquence des équations exactes dans le cas d'un fluide incompressible, isotherme. Ceci est également vrai pour un fluide compressible (voir l'annexe C.2). La forte réalisabilité implique que les grandeurs f dans (1.113) sont des fonctions localement concaves en suivant les lignes de courant [16]. Pour les fermetures qui n'autorisent pas l'accès à l'état limite mais qui respectent quand même la réalisabilité faible, Schumann a introduit la définition suivante:

Une fermeture du second ordre est "over-realizable" par rapport à la tension de Reynolds si

$$f \geq 0 \quad \cup \quad f = 0 \quad \Rightarrow \quad d_t(f) > 0 \quad , \quad (1.114)$$

avec $f = \{\delta_1^1, \delta_2^3, \delta_3\}$.

Nous remarquons que la terminologie pour désigner les différentes variantes de la réalisabilité varie selon l'auteur (voir par exemple [97, 16]).

Nous remarquons que la méthode de la moyenne de Favre a comme conséquence que la positivité de la masse volumique moyenne est automatiquement assurée pour des solutions régulières (continues C^1) puisque l'équation moyenne (1.12) peut être intégrée le long d'une ligne de courant afin d'obtenir:

$$\bar{\rho}(t) = \bar{\rho}(t_0) \cdot \exp \left(\int -\tilde{u}_{i,i} dt \right) . \quad (1.115)$$

Le système des équations exactes régissant l'écoulement moyen et les corrélations d'ordre deux est du type mixte hyperbolique/elliptique. La partie hyperbolique est associée à la convection et aux termes de production. On montre dans la référence [16] que, afin de conserver le caractère hyperbolique de cette partie des équations, le tenseur de Reynolds doit vérifier la forte réalisabilité. On utilisera ce résultat lors de la résolution numérique des équations modélisées dans le chapitre 2.

1.5.3 La conformité de l'approche avec la réalisabilité

Parmi les grandeurs qui sont l'objet des conditions de réalisabilité, la tension de Reynolds et la dissipation sont les seules qui sont obtenues par des équations de transport modélisées en grande partie. Dans le sens strict, il faut considérer le comportement de l'ensemble des équations sur un domaine fini avec des conditions limites et initiales. Du à la grande complexité du système, la plupart des études de réalisabilité portent sur des écoulements homogènes d'un fluide incompressible. Cette hypothèse permet d'isoler l'équation de la tension de Reynolds et celle de la dissipation. De plus, les termes de transport spatial sont identiquement nuls. Dans ce cas, le gradient de la vitesse moyenne est considéré comme une force extérieure qui peut prendre des valeurs arbitraires. Schumann [36] a constaté la non-réalisabilité du modèle LRR en utilisant l'approche homogène. Par la suite, Lumley [15] a montré qu'un modèle pour la partie rapide de la pression déformation doit au moins être d'ordre quadratique (en b_{ij}) afin de vérifier la réalisabilité forte. Ces considérations ont mené au modèle SL85 [28] (voir l'annexe A), dans lequel tous les coefficients sont déterminés par les considérations de réalisabilité. Afin de permettre une calibration par des résultats expérimentaux et de DNS, tout en assurant la réalisabilité du modèle, l'ordre de l'expression peut être augmenté. Dans cet esprit, le modèle FLT ajoute des termes cubiques au modèle SL85 avec une seule constante non-déterminée.

Shih et Shabbir [99] ont discuté des méthodes pour assurer la réalisabilité d'une fermeture a priori non-réalisable. Shih *et al.* [100] ont considéré des modifications des modèles pour la pression-déformation qui permettent à la turbulence de sortir d'un état bi- ou monodimensionnel. Il a été remarqué par Speziale *et al.* [101] qu'un de ces modèles modifiés, le modèle SL90 [95] (voir l'annexe A) pour la partie rapide, n'est plus conforme à la réalisabilité forte indépendamment du choix du modèle pour la partie lente. On note de plus que le modèle SSG ne vérifie pas la forte réalisabilité [100].

La réalisabilité d'un certain modèle dans la situation homogène ne s'étend pas forcément à un cas non-homogène. Par contre, la réalisabilité dans un tel cas simplifié est une condition nécessaire. Les conclusions négatives concernant les modèles LRR, SSG et SL90 sont donc valables même dans le cas non-homogène.

Hérard [16, 102] a analysé le système des équations qui sont issues d'une fermeture du second ordre dans le cas incompressible, isotherme (comprenant les équations de continuité, de quantité de mouvement, de transport de la tension de Reynolds et de la dissipation turbulente). En premier temps, la diffusion turbulente est mise à zéro. Hérard prouve la réalisabilité forte d'une classe de modèles pour la pression-déformation sous réserve que les gradients de vitesse et l'inverse de l'échelle de temps θ^{-1} restent bornées. Cette classe fortement réalisable inclut le modèle lent de Lumley [15] ainsi que les parties rapides des modèles FLT et SL85. Dans le cas gaussien, sans diffusion, il est montré que la positivité de l'échelle de temps θ et de son inverse θ^{-1} sous condition que $C_{\varepsilon 2} \geq 1$, condition qui est vérifiée avec la valeur standard de $C_{\varepsilon 2} = 1.92$ [16]. Les grandeurs θ et θ^{-1} restent également bornées.

Quand la diffusion turbulente est prise en compte par un modèle de transport par gradient (de la forme choisie dans le paragraphe 1.4.5.3 par exemple), une preuve stricte de réalisabilité forte ne peut être établie pour la fermeture qui est réalisable dans le cas gaussien. Néanmoins, il peut être montré que parmi les déterminants du tenseur de Reynolds, les δ_1^i restent positifs tandis que la positivité de δ_2^i et δ_3 ne peut être garantie que dans le cas où ces deux grandeurs sont suffisamment petites. De plus, il est montré dans la référence [16] que l'inverse de l'échelle de temps θ^{-1} reste positive et bornée dans ce cas non-gaussien, mais ceci n'a pas pu être prouvé pour θ .

Les résultats trouvés dans le cas incompressible, isotherme par Hérard peuvent être traduits dans le cas compressible. Si on met toutes les corrélations supplémentaires dues à la compressibilité et aux effets thermiques (flux de masse turbulent, pression-dilatation, flux de chaleur turbulent) à zéro dans un premier temps, les conclusions du paragraphe précédent concernant les modèles de Lumley, FLT et SL85 restent valables (voir la référence [103]). On peut ensuite introduire ces corrélations spécifiquement liées au cas compressible en vérifiant, pour chacune, la conformité avec l'ensemble des contraintes de la réalisabilité et en excluant une possible interférence avec les résultats déjà établis. D'après les considérations de l'annexe C.3, on peut donner les conclusions suivantes:

- On note d'abord que notre modèle algébrique pour le flux de chaleur turbulent est neutre par rapport à la réalisabilité de la tension de Reynolds, bien qu'il ne vérifie pas la réalisabilité jointe.
- Parmi les modèles pour la pression-dilatation présentés dans le paragraphe 1.4.3, aucun ne respecte la réalisabilité. Une modification de la partie déviatrice, telle qu'elle a été proposée par Cambon *et al.* (1.44), par contre, n'affecte pas les propriétés de la réalisabilité.
- Les contributions à l'équation de la dissipation dues à la compression moyenne et à la compressibilité discutés dans le paragraphe 1.4.4.2 n'affectent pas la positivité de l'inverse de l'échelle de temps θ^{-1} dans une fermeture gaussienne. Ceci est également vrai pour l'échelle de temps θ , à deux exceptions près: le modèle de Zeman (1.48) pour la pression-dilatation peut impliquer une perte de positivité; dans le cas du modèle de El-Baz et Launder (1.64) pour la destruction de la dissipation, la valeur de la constante $C_{\varepsilon 2}$ est limitée par la valeur maximale du nombre de Mach turbulent. Si un des modèles pour la dissipation dilatationnelle est utilisé, l'échelle θ^{-1} qui intervient dans la partie lente du modèle pour la pression-déformation doit être calculée par $\theta^{-1} = (\varepsilon_s + \varepsilon_d)/k$ afin de conserver la réalisabilité de la tension de Reynolds.
- Concernant le flux de masse turbulent, seules les expressions de transport généralisé par gradient de densité (1.95) et par gradient de température (1.100) respectent la réalisabilité forte en conjonction avec une fermeture réalisable.

Cette discussion des différents aspects de la réalisabilité a montré les difficultés de la construction d'une fermeture générale. La réalisabilité ne peut pas toujours être prouvée de manière universelle. Par contre, pour un grand nombre de modèles – et pour des combinaisons avec ceux-ci – la non-réalisabilité peut être établie. Est-ce que cela implique que ces modèles doivent être rejetés a priori? La réalisabilité d'une fermeture est certainement un avantage puisque ce sont des principes fondamentaux qui sont à la base des contraintes. Elle aide également la solution numérique en évitant un arrêt du calcul dû au modèle continu. Néanmoins, la réalisabilité en soi ne garantit pas une bonne performance par rapport à la réalité. De plus, certains modèles non-conformes à la réalisabilité forte donnent des bons résultats dans un nombre de cas réalistes, par exemple le modèle SSG [62].

Dans le cadre de l'étude présente, les critères de réalisabilité ne sont donc pas appliqués dans le sens strict. Quand il faut choisir entre plusieurs propositions, on utilise la réalisabilité comme un guide supplémentaire et on rejette les modèles qui sont en contradiction profonde. Par exemple,

on retient le modèle SSG pour la pression-déformation malgré ses défauts; on rejète, par contre, le modèle pour le flux de masse turbulent donné par l'équation (1.99), qui ne permet ni la réalisabilité forte de la tension de Reynolds ni une caractérisation entropique du système et qui n'est pas consistant avec la limite homogène.

1.6 Fermeture du premier ordre pour la tension turbulente

Dans une fermeture du premier ordre, les moments d'ordre deux sont liés directement au champ moyen. Ceci revient à l'utilisation d'une relation constitutive pour la tension de Reynolds. Pope [104] a constaté que les défaillances des fermetures de premier ordre dans certaines situations (par exemple en présence de rotation, dans la prédiction des écoulements secondaires, quand les lignes de courant sont courbées) ont deux causes distinctes: la non-applicabilité d'une relation constitutive en général et les défauts de la relation constitutive particulière. Il semble donc nécessaire de connaître les limites globales de l'approche de premier ordre avant de considérer la forme particulière du modèle.

1.6.1 Existence d'une relation constitutive

Lumley [105] et Pope [104] ont établi les conditions nécessaires pour l'existence d'une relation constitutive de la tension de Reynolds. Pour un fluide incompressible, Lumley montre que la tension de Reynolds, dans un domaine donné, est déterminée uniquement par le champ de la vitesse moyenne et par les valeurs de la fluctuation aux frontières du domaine et à l'instant initial. Il suppose que suffisamment loin de la frontière (et suffisamment loin de l'instant initial), l'influence de ces fluctuations se limite à la modification des échelles du champ turbulent. Avec cette hypothèse, la tension turbulente peut être exprimée par une fonctionnelle du champ de vitesse moyenne et des échelles qui sont l'objet des influences non-locales (et non-instantanées). Afin de pouvoir exprimer la fonctionnelle par une fonction, le transport de la tension doit être négligeable. Pope a remarqué que seulement un écoulement homogène respecte cette dernière contrainte. Dans ce cas, la tension de Reynolds est uniquement fonction de la déformation moyenne (qui porte toute information sur le champ moyen) et des échelles (scalaires). Les conditions pour l'existence d'une relation constitutive locale (en temps et espace) peuvent être résumées:

- les conditions aux limites n'affectent que les échelles (de temps et de vitesse) de la turbulence.
- la distance à la frontière est grande par rapport à la taille des structures.
- l'évolution de la turbulence est rapide par rapport à l'évolution du champ moyen.
- l'écoulement est proche de l'homogénéité.

L'ensemble des conditions est en réalité rarement respecté. Un exemple d'un écoulement qui vérifie les conditions nécessaires est un cisaillement homogène dans la phase asymptotique. Dans le cas d'un écoulement général, une relation constitutive ne représente qu'une approximation pour la tension de Reynolds.

1.6.2 La relation constitutive pour la tension de Reynolds

A haut nombre de Reynolds, on s'attend à ce que la relation pour la tension turbulente ne dépende pas explicitement de la viscosité. Le théorème de Buckingham indique que deux grandeurs d'échelle au moins sont nécessaires afin de lier la tension à la déformation. En choisissant une vitesse caractéristique v_t et une longueur l_t , on obtient la grandeur non-dimensionnelle $V_{ij} \equiv \overline{u_{i,j}} l_t / v_t$.

La relation constitutive s'écrit de manière générale:

$$\frac{\widetilde{u''_i u''_j}}{k} = \mathcal{F}_{ij} \left(V_{ij}, \frac{l_t}{l_{t2}}, \frac{v_t}{v_{t2}}, \dots \right) , \quad (1.116)$$

ce qui signifie que d'autres échelles de longueur et de vitesse pourraient éventuellement être incluses dans la fonctionnalité s'ils sont identifiées dans les équations de base. Dans un écoulement compressible, par exemple, une vitesse acoustique pourrait être considérée comme un paramètre important ce qui ajouterait un nombre de Mach turbulent à la liste des arguments. La forme tensorielle de l'expression finale n'est pourtant pas altérée par un scalaire supplémentaire.

En général, ce qui suit ne dépend pas du choix des échelles l_t et v_t de la turbulence. Nous allons tout de même nous concentrer sur des modèles du type k - ε , où $l_t = k^{3/2}/\varepsilon$ et $v_t = \sqrt{k}$ signifient la taille caractéristique et la vitesse caractéristique des grandes échelles. Ceci est motivé principalement par la consistance avec le modèle du second ordre, où ε est une grandeur à déterminer.

Shih et Lumley [106] ont utilisé les théorèmes de l'invariance tensorielle afin de déduire la formulation la plus générale de la fonction $\mathcal{F}_{ij}$. En considérant la symétrie $\widetilde{u''_i u''_j} = \widetilde{u''_j u''_i}$ et l'identité $\widetilde{u''_i u''_i} = 2k$, une expression de sixième ordre $\mathcal{O}(V_{ij}^6)$ est obtenue qui fait intervenir onze coefficients α_i . Chaque scalaire α_i est possiblement une fonction des invariants et des arguments scalaires du problème $\alpha_i = \alpha_i(I_{V_{ij}}, II_{V_{ij}}, III_{V_{ij}}, v_t/v_{t2}, \dots)$. La situation est équivalente à celle rencontrée lors de la construction d'un modèle pour la corrélation entre pression et déformation basé sur la forme générale de l'équation (1.28). Les fonctions scalaires doivent être déterminées par des hypothèses supplémentaires de nature théorique ou par référence à l'expérience.

Dans la littérature on trouve surtout la troncature linéaire de l'expression générale qui correspond à l'hypothèse de Boussinesq quand les coefficients sont constants. Dans ce cas, la relation s'écrit:

$$-\widetilde{u''_i u''_j} = \frac{C_\mu k^2}{\varepsilon} \tilde{S}_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad , \quad (1.117)$$

avec $C_\mu = 0.09$ en accord avec la loi logarithmique d'une couche limite simple. Cette loi est analogue à la loi pour la tension moléculaire d'un fluide newtonien. Dans un cisaillement homogène, par exemple, la valeur de la "constante" C_μ devrait être 0.05 afin de prédire la valeur de la contrainte. Afin de prendre en compte cette variation, des modèles à C_μ variable ont été proposés (voir Shih *et al.* [107]).

La troncature à l'ordre deux de l'expression générale donne la relation suivante:

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{u''_i u''_j}}{2k} &= \frac{1}{3} \delta_{ij} + \alpha_1 \frac{k}{\varepsilon} \tilde{S}_{ij} \\ &+ \alpha_2 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left(\tilde{u}_{i,j}^2 + \tilde{u}_{j,i}^3 - \frac{2}{3} \delta_{ij} \Pi_1 \right) \\ &+ \alpha_3 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left(\tilde{u}_{i,k} \cdot \tilde{u}_{j,k} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \Pi_2 \right) \\ &+ \alpha_4 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left(\tilde{u}_{k,i} \cdot \tilde{u}_{k,j} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \Pi_2 \right) \quad , \end{aligned} \quad (1.118)$$

avec

$$\Pi_1 = \tilde{u}_{i,k} \cdot \tilde{u}_{k,i} \quad , \quad \Pi_2 = \tilde{u}_{i,k} \cdot \tilde{u}_{i,k} \quad .$$

Cette forme a été indépendamment retrouvée par plusieurs auteurs en utilisant des méthodes très différentes. Tous les modèles suivants ne diffèrent que par la forme des coefficients α_1 à α_4 .

- Rodi [108] a proposé de transformer une fermeture du second ordre en une expression algébrique en exprimant les termes de transport par ceux de l'équation de l'énergie k . Le

résultat est un système d'équations algébriques où tous les coefficients sont déterminés par le modèle du second ordre. Pope [104] a ensuite obtenu une formulation explicite pour les composantes de la tension à partir du modèle de Rodi par une méthode de projection sur la base des invariants de la déformation. Dû à la complexité des manipulations algébriques, il s'est restreint à un champ moyen bidimensionnel et un modèle de pression déformation linéaire (LRR). A l'aide de la manipulation symbolique, Gatski et Speziale [109] ont traduit le résultat de Pope pour le cas tridimensionnel et une classe des fermetures quasi-linéaires qui inclut le modèle SSG. Théoriquement, aucune calibration n'est nécessaire après une transformation de ce type; la relation qui est obtenu doit donner les points fixes du modèle de transport complet (sous condition de l'existence d'une relation constitutive). Néanmoins, une modification des coefficients peut être nécessaire afin d'éviter des singularités dans le cas général. Plus récemment, Wallin et Johansson [110] ont conçu une méthode pour transformer une fermeture linéaire (dans le cas tridimensionnel) qui garantit un résultat sans singularité.

- Une méthode analytique est poursuivie par Yoshizawa [111] en utilisant la “two-scale direct interaction approximation” (TSDIA). Dans ce formalisme, deux échelles de temps et deux échelles d'espace sont introduites qui sont distinctes par un facteur δ , dit paramètre d'échelle. Les échelles lentes caractérisent le champ moyen, les échelles rapides le champ fluctuant. Une expansion des équations Navier–Stokes écrite dans l'espace de Fourier, en utilisant des puissances de paramètre δ , fait apparaître des corrélations entre les échelles qui sont ensuite évaluées par la méthode de “direct interaction approximation” (DIA) de Kraichnan. En évaluant ces expressions jusqu'à l'ordre trois du paramètre δ on obtient un modèle sous la forme (1.118). Les coefficients α_i dépendent des intégrales des fonctions de Green. Ils peuvent être évalués analytiquement, mais dans l'application du modèle (cf. [112]) des constantes empiriques sont préférées.
- Speziale [113] a obtenu une formulation quadratique par analogie avec la relation constitutive pour la tension moléculaire d'un fluide non-newtonien. Afin d'assurer l'objectivité de la relation constitutive, Speziale fait intervenir une fonction de la dérivée particulière.
- Rubinstein et Barton [112] basent leur analyse sur la théorie du “groupe de renormalisation” (RNG) de Yakhot et Orszag. Cette méthode présente une description de la turbulence par les grandes échelles. L'influence des petites échelles est prise en compte en exprimant toutes les corrélations entre les différentes échelles par un développement basé sur les quantités à la limite de $\tilde{k} \rightarrow 0$ ($\tilde{k}$ étant le nombre d'onde de la représentation de Fourier). En appliquant ce formalisme à la corrélation double des vitesses fluctuantes, Rubinstein et Barton retrouvent une expression de la forme (1.118). Il est remarquable dans cette approche que toutes les constantes sont déterminées analytiquement.
- Basé sur des considérations de réalisabilité, Shih *et al.* [114, 100] ont proposé la forme suivante pour les coefficients α_i :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1/3}{A_1 + \eta}, \\ \alpha_l &= \frac{C_{\tau l}}{A_2 + \eta^3 + \xi^3} \quad \text{avec } l = \{2, 3, 4\}, \\ \eta &= \sqrt{2 s_{ij} s_{ij}} \frac{k}{\varepsilon}, \quad \xi = \sqrt{2 \omega_{ij}^* \omega_{ij}^*} \frac{k}{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{1.119}$$

où $\omega_{ij}^* \equiv \omega_{ij} + 4\epsilon_{mij}\Omega_m$ est le tenseur de rotation qui inclut la rotation du repère Ω_m . Ce modèle (appelé SZL par la suite) respecte la réalisabilité du tenseur pour un taux de déformation quelconque dans certaines situations critiques: dans un cisaillement pure, dans une compression axiale, dans une déformation irrotationnelle plane ou tridimensionnelle. Dans le cas général, la réalisabilité n'est pourtant pas assurée. Le jeu de constantes donné par Shih *et al.* [100] est le suivant:

$$A_1 = 5.5, \quad A_2 = 1000, \quad C_{\tau 2} = -2, \quad C_{\tau 3} = \frac{13}{2}, \quad C_{\tau 4} = -1,$$

obtenu par calibration avec les résultats expérimentaux de l'écoulement derrière une marche descendante.

Dans une étude précédente [115], nous avons conclu que l'avantage de la réalisabilité rend le modèle SZL supérieure aux autres versions quadratiques. Nous avons donc retenu ce modèle afin d'effectuer des comparaisons avec la fermeture du second ordre. Nous allons également utiliser le modèle standard qui est basé sur la relation de Boussinesq, car il représente un point de référence en étant incorporé dans un très grand nombre de codes de calcul. A l'occurrence, nous référons à la relation (1.117) par "modèle k - ε linéaire" et aux relations (1.118) et (1.119) par "modèle k - ε non-linéaire".

1.6.3 Détermination des échelles de la turbulence

Les deux échelles scalaires qui portent l'information sur la turbulence dans le cadre de notre approche du premier ordre sont l'énergie cinétique k et son taux de dissipation ε . Puisque ceux-ci représentent la seule influence des conditions limites sur le champ turbulent, ils sont obtenus par des équations différentielles. Afin d'être consistant avec la fermeture au second ordre, nous utilisons des équations équivalentes, c'est-à-dire que l'équation de k est obtenue en prenant la trace de l'équation modélisée de la tension de Reynolds et l'équation pour la dissipation ε est identique pour les fermetures du premier ordre et du second ordre.

Chapitre 2

Résolution numérique

Les équations de Navier-Stokes (1.1) constituent un système différentiel du type hybride. Les termes de viscosité et de conductivité de chaleur introduisent une composante elliptique, tandis que les termes de convection sont de caractère hyperbolique. La difficulté à résoudre ces équations du mouvement d'un fluide numériquement est presque entièrement due aux phénomènes d'hyperbolicité qui impliquent un caractère d'onde au champ avec des directions préférées de dépendance. Par conséquent, une discrétisation purement centrée n'est pas admissible pour des raisons de stabilité. Les termes elliptiques, par contre, peuvent être traités de manière centrée. La difficulté essentielle apparaissant lors de la résolution du système complet se situe donc dans un traitement numérique adéquat des termes convectifs, ou en d'autres termes, du système hyperbolique constitué des termes différentiels d'ordre un.

Il est bien connu que les systèmes de lois de conservation hyperboliques admettent des solutions discontinues. Pourtant, à travers d'une discontinuité, la solution n'est pas différentiable. Une méthode de résolution basée sur la formulation différentielle du problème est dans ce cas impossible. Une approche pour contourner ce dilemme consiste à introduire une viscosité artificielle dans les équations afin de lisser les discontinuités d'un degré qui permet la différentiation (voir par exemple [116]). Parmi les inconvénients de cette méthode, on note la nécessité d'une résolution extrême afin d'obtenir une bonne représentation numérique des discontinuités. De plus, le facteur de viscosité artificielle est difficile à contrôler en général, notamment quand le maillage est non-uniforme [117].

Dans un article très complet, Lax [118] a défini une classe de solutions généralisées qui comprend les fonctions discontinues. Ces solutions sont admissibles pour la formulation intégrale (faible) du problème qui correspond au caractère des lois de conservation. Lax a également remarqué que les discontinuités admissibles par la formulation faible d'un système hyperbolique ne sont pas toutes acceptables d'un point de vue physique. Afin de sélectionner la solution physique parmi celles-ci, il a introduit une condition portant sur le comportement des caractéristiques au voisinage d'un point de discontinuité. Appliqué aux équations de Euler, ce critère revient à une condition d'entropie qui assure la conformité de la solution non-visqueuse avec la seconde loi de la thermodynamique (voir également Courant et Friedrichs [119] et Harten [120]).

Une façon de construire une méthode numérique adaptée au caractère conservatif du problème consiste en l'interprétation des valeurs discrètes comme des approximations pour la moyenne sur un intervalle de l'espace au lieu de l'approximation en un point particulier. Cette approche mène à une formulation par volumes finis, où le schéma discret représente un bilan de flux à travers des interfaces d'une cellule. La construction des fonctions de flux acceptables dans ce cadre repose sur les trois critères suivants:

- consistance et précision spatiale (erreur de troncature),
- prévention d'oscillations non-physiques (monotonie, variation totale bornée),

- consistance avec la condition d'entropie.

Les deux premières contraintes en particulier représentent un conflit, puisque Godunov (1959, cf. Godunov *et al.* [121]) a montré qu'un schéma linéaire ne peut pas être monotone et de précision d'ordre deux en même temps. Il est donc a priori nécessaire d'utiliser une discrétisation non-linéaire (même pour une équation linéaire) afin d'obtenir une précision élevée. Une possibilité d'introduire une telle non-linéarité est l'utilisation d'une fonction "limiteur" qui règle l'ordre de l'interpolation des flux selon les conditions locales de monotonie. On s'occupera des considérations de précision dans le paragraphe 2.2.5.

Afin de vérifier les contraintes ci-dessus, différentes méthodes ont été publiées, dont un grand nombre s'appuient sur une approche introduite par Godunov. L'idée de Godunov consiste à résoudre analytiquement un problème de Riemann à chaque interface de cellule. Cette solution est exacte si le pas de temps garantit que les ondes associées à deux demi-problèmes de Riemann n'interagissent pas. Après chaque pas, une moyenne par cellule est calculée à partir de la solution, ce qui permet à nouveau de considérer un problème de Riemann à la prochaine itération. La méthode de Godunov introduit la physique essentielle du système d'ondes non-linéaire dans la méthode numérique. Un inconvénient est le fait qu'un système d'équations algébriques, non-linéaires doit être résolu à chaque pas (par exemple une équation scalaire non-linéaire pour le système d'Euler).

Une variante de la méthode de Godunov a été utilisée par Glimm (1965, cf. [122, 123]) initialement pour étudier des aspects fondamentaux des équations hyperboliques. Elle est obtenue en remplaçant la phase de moyennage dans le schéma de Godunov par un choix aléatoire entre les états exacts obtenus dans une cellule. En évitant le calcul d'une moyenne, cette méthode est non-diffusive permettant la propagation numérique d'une véritable discontinuité. L'extension de cette technique à plusieurs dimensions, en revanche, pose des problèmes non résolus [117].

Concernant la méthode de Godunov et ses proches variantes, deux remarques peuvent être faites:

- la positivité des variables physiques (e.g. densité et pression) est préservée naturellement,
- elles nécessitent la connaissance "explicite" de la solution du problème de Riemann considéré.

Roe [124] a remarqué que les détails de la solution du problème de Riemann d'une interface ne jouent pas dans la méthode de Godunov, car il sont perdus dans la phase de moyennage. Il propose de se contenter d'une solution approximative du problème de Riemann en conjonction avec le schéma de Godunov. Son approximation pour les équations de Euler est une solution exacte du problème linéarisé, où la linéarisation de la matrice jacobienne des flux vérifie exactement les conditions de saut à travers un choc. Plus précisément, il s'agit d'une condition de consistance avec la forme intégrale de la loi de conservation. Cette méthode, qui est appelée *flux-difference-splitting*, produit une expression simple pour le flux à l'interface d'une cellule; néanmoins ce flux ne vérifie pas la condition d'entropie en admettant des chocs d'expansion non-physiques. Des corrections pour ce défaut ont été proposées, qui introduisent essentiellement une faible viscosité artificielle dans le cas où une valeur propre associée à une onde vraiment non-linéaire s'annule (voir par exemple la référence [125]). D'autres solveurs de Riemann approchés, basés sur la méthode de Godunov, ont été conçus par Osher (cf. [126]) et Dai et Woodward [127].

Une voie alternative à celle de Godunov, appelée *flux-vector-splitting*, a été prise par Steger et Warming [128] et ensuite par van Leer [129]. Elle consiste à effectuer une décomposition des vecteurs de flux telle que chaque partie est associée à une valeur propre distincte; elles peuvent alors être décentrées simplement par le signe de la caractéristique associée. L'interprétation physique de cette méthode n'est pas évidente [122]. Le flux de van Leer donne des bons résultats dans le cas des équations de la dynamique de gaz, mais son extension aux problèmes de la turbulence semble difficile.

Ce bref résumé montre que les méthodes de résolution des systèmes hyperboliques conservatifs

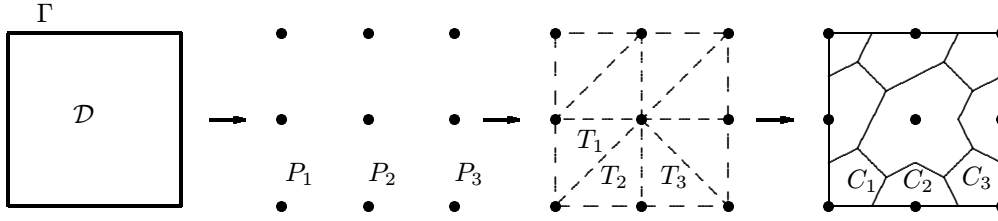


Fig. 2.1: Les trois étapes de la génération du double maillage à partir d'un domaine de calcul $\mathcal{D}$.

ont beaucoup progressé. Une grande partie des résultats peut être transposée au système des équations moyennes issue d'une fermeture statistique de premier ou de second ordre. Cependant, la partie hyperbolique des équations ne se met pas sous forme conservative dans ces cas, à cause des termes de production (et de redistribution dans le cas d'un modèle au second ordre). Par conséquent, il n'est pas possible d'employer les relations de Rankine-Hugoniot pour déterminer le saut des variables à travers une onde de choc. La théorie des systèmes hyperboliques non-conservatifs a été étudiée par Le Floch [130] et Le Floch et Liu [131]. Ces auteurs ont introduit une classe de chemins pour connecter les variables à travers une discontinuité, ce qui mène à des relations de Rankine-Hugoniot généralisées pour le problème non-conservatif. Un chemin linéaire est un choix consistant avec ces hypothèses qui assure que les courbes de Rankine-Hugoniot généralisées et les courbes données par une onde de raréfaction coïncident dans le cas d'un champ linéairement dégénéré. Avec ces outils, il est en principe possible de résoudre le problème de Riemann avec une restriction sur la variation des "sauts" des variables. Le Floch utilise un critère d'admissibilité (proche de la condition d'entropie de Lax) afin d'assurer l'unicité de la solution. Le Floch et Liu ont ensuite prouvé la convergence de la méthode de Glimm pour un tel système sous la condition que la variation totale du champ initial est suffisamment petite.

Hérard *et al.* [96] et Hérard [132] ont étudié le système des équations de transport issu d'une fermeture du premier ordre en vue des résultats fondamentaux de Le Floch et Liu. Ils proposent une méthode de résolution numérique pour le système non-conservatif basée sur un solveur de Riemann approché du même type que celui de Roe. Des tests numériques des auteurs montrent un comportement monotone de la méthode qui est globalement très satisfaisante, même dans des cas, où les conditions de saut associées au chemin linéaire ne sont plus valables théoriquement. En particulier le solveur de Roe non-conservatif assure un bon comportement de la solution à travers les champs linéairement dégénérés (voir également la référence [133] pour une comparaison de la méthode d'Hérard *et al.* avec des méthodes conventionnelles).

Dans une collaboration avec le groupe *Recherches et Etudes en Thermohydraulique de Electricité de France*, nous avons développé une méthode analogue pour la partie hyperbolique du système des équations issu d'une fermeture du second ordre. Les résultats ici sont également très positifs; on conserve notamment la monotonie de la solution dans certains cas extrêmes, où une méthode essentiellement basée sur les équations de Euler produit des oscillations considérables. A ce jour, la méthode est néanmoins encore dans le stade de vérification en ce qui concerne les calculs multidimensionnels. Les calculs discutés dans les chapitres 4 et 5 ont donc été effectués à l'aide d'une technique de découplage d'une partie des équations qui permet un calcul simplifié de la convection des composantes du tenseur de Reynolds.

On poursuivra alors ce chapitre en donnant la formulation générale de notre approche dans le paragraphe 2.1 avant de discuter en détail les propriétés et la discrétisation de la partie hyperbolique dans le paragraphe 2.2. On montre des tests quasi-monodimensionnels de la nouvelle méthode dans une configuration du type tube à choc. On donnera ensuite le schéma simplifié utilisé pour les calculs multidimensionnels de la suite de ce travail. Dans le paragraphe 2.4 on présentera la version implicite de la méthode avant de discuter le traitement des conditions limites dans 2.5.

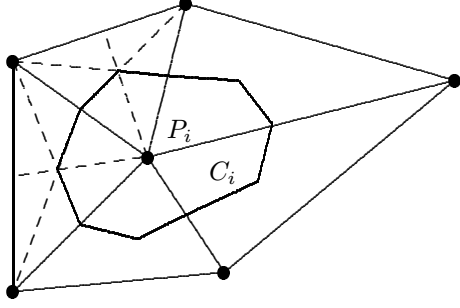


Fig. 2.2: Construction des volumes de contrôle C_i à partir de la triangulation.

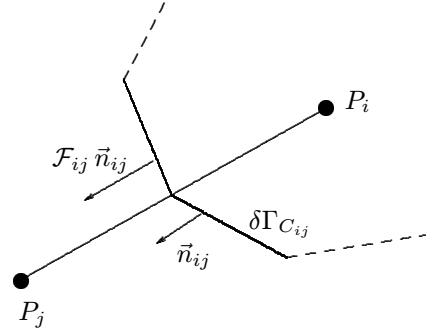


Fig. 2.3: Interface partielle de longueur $\delta\Gamma_{C_{ij}}$ située entre les nœuds P_i et P_j ; $\vec{n}_{ij} \equiv \int_{\delta\Gamma_{C_{ij}}} \vec{n} d\Gamma / \int_{\delta\Gamma_{C_{ij}}} d\Gamma$.

2.1 La formulation du problème — généralités

Les écoulements d'intérêt pour l'ingénieur se développent souvent dans les géométries complexes. Afin de permettre la flexibilité nécessaire pour discrétiser un domaine d'intégration quelconque, un maillage non-structuré composé d'éléments tétraédriques est utilisé dans notre étude. Ce choix a été fait auparavant lors du développement du logiciel de calcul NATURng [134, 135], qui sert de base pour notre méthode. Le code NATURng est écrit d'une manière qui permet le calcul d'écoulements tridimensionnels ainsi que le calcul du cas strictement bidimensionnel, où les tétraèdres du maillage dégénèrent en triangles dans le plan de l'écoulement. Notre formulation et codage de la fermeture du second ordre suit ce caractère multidimensionnel; néanmoins, on se restreint pour l'exposition de la suite au cas bidimensionnel puisque nous n'avons pas effectué des calculs des cas tridimensionnels qui représentent une situation physique.

Le système des équations de transport modélisées par une fermeture du second ordre s'écrit sous la forme vectorielle suivante:

$$\partial_t \vec{Q} + \nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot \vec{R} + \vec{S} \quad , \quad (2.1)$$

où $\vec{Q}$ représente le vecteur des variables “pseudo-conservatives”, $\vec{F}(\vec{Q})$ les flux convectifs, $\vec{R}(\vec{Q}, \nabla \vec{Q})$ les flux visqueux et thermiques (avec notamment $\vec{R}(\vec{Q}, \vec{0}) = \vec{0}$) et $\vec{S}(\vec{Q}, \nabla \vec{Q})$ les termes sources, c'est-à-dire l'ensemble des termes qui ne se mettent pas sous forme de divergence. La stratégie de résolution du système (2.1) s'appuie sur les travaux de Stoufflet *et al.* [136] et Rostand [137]. Elle consiste à adopter une approche de volumes finis pour la partie convective du premier membre de (2.1), tandis que les termes du second membre sont traités par la méthode d'éléments finis classique. Un double maillage est ainsi introduit qui peut être construit de la manière suivante (voir les figures 2.1 et 2.2):

- définition de la position des nœuds P_i dans le domaine $\mathcal{D}$,
- construction d'éléments finis triangulaires T_j ,
- construction des cellules volumes finis C_i par connexion des barycentres et des mi-points des arêtes des éléments finis.

La formulation “faible” sur un domaine d'intégration $\mathcal{D}$ s'écrit pour l'approximation hybride volumes finis/éléments finis:

$$\int_{\mathcal{D}} \partial_t \vec{Q} \psi_i dv + \int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \vec{F} \psi_i dv = \int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \vec{R} \phi_i dv + \int_{\mathcal{D}} \vec{S} \phi_i dv \quad , \quad (2.2)$$

où ψ_i désigne la fonction caractéristique de la cellule qui constitue un volume fini ($\psi_i = 1$ à l'intérieur de la cellule C_i , et $\psi_i = 0$ ailleurs) et ϕ_i représente la fonction de base de la représentation des variables sur un élément fini tétraédrique. Nous utilisons dans cette étude une fonction de base qui varie linéairement par élément. Rostand [137] a démontré l'équivalence entre la formulation linéaire par éléments finis et la formulation par volumes finis avec des flux centrés. Notre approche hybride est alors équivalente à une formulation où tous les termes sont approchés par la méthode de volumes finis et le second membre est discrétisé de manière centrée. Nous avons choisi la méthode hybride pour sa facilité à évaluer les gradients des variables sur un maillage non-structuré.

Le système (2.2) est transformé par le théorème de Gauss appliqué à l'intégrale des flux convectifs sur la cellule C_i , et par une intégration par parties des termes visqueux, soit:

$$\int_{C_i} \partial_t \vec{Q} dv + \oint_{\Gamma_{C_i}} \vec{F} \vec{n}_{\Gamma_{C_i}} d\sigma = \oint_{\Gamma} \vec{R} \vec{n}_{\Gamma} \phi_i d\sigma - \int_{\mathcal{D}} \vec{R} \nabla \phi_i dv + \int_{\mathcal{D}} \vec{S} \phi_i dv \quad , \quad (2.3)$$

où Γ_{C_i} désigne la frontière de la cellule C_i , Γ la frontière du domaine $\mathcal{D}$ et les vecteurs unitaires $\vec{n}_{\Gamma_{C_i}}$ et $\vec{n}_{\Gamma}$ sont orientés vers l'extérieur.

Chaque intégrale de l'équation (2.3) doit être discrétisée, ce qui demande la définition des fonctions de flux, d'une méthode d'incrément temporelle et une technique pour imposer les conditions limites.

2.2 Traitement du système de convection

Nous allons tout d'abord définir le système de convection compris dans le système des équations complet (2.1) qui va ensuite former la base pour la construction d'une fonction de flux convectif. Une méthode pour déterminer les termes qui appartiennent à la partie convective consiste à effectuer le traitement statistique uniquement pour la partie non-visqueuse (Euler) des équations de Navier-Stokes instantanées (1.1). Le résultat correspond au système convectif moyen. Néanmoins, ce système comprend également la corrélation triple de vitesses ainsi que l'ensemble des corrélations entre vitesse et pression. Parmi les modèles pour ces termes, seulement la partie rapide de la corrélation entre pression et déformation est d'une forme de premier ordre différentiel pouvant être conforme avec le caractère hyperbolique du système de départ. Afin d'assurer l'indépendance de l'approche numérique par rapport au choix d'un modèle pour la pression-déformation, on considère ce terme ainsi que les autres corrélations inconnues comme appartenant à la partie non-convective. Le système de convection s'écrit ainsi:

$$\partial_t \vec{Q} + \nabla \cdot \vec{F} + \vec{H} = 0 \quad , \quad (2.4)$$

avec le vecteur des variables "pseudo-conservatives" $\vec{Q}$:

$$\vec{Q} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho e_T, \rho R_{11}, \rho R_{22}, \rho R_{12}, \rho k]^T \quad , \quad (2.5)$$

et l'hypervecteur convectif $\vec{F}(\vec{Q})$ et le vecteur $\vec{H}(\vec{Q}, \nabla \vec{Q})$ qui regroupe les composantes de la production turbulente:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \rho \vec{v} \\ \rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \vec{I} + \rho R \\ (\rho \tilde{e}_T + p) \vec{I} + \rho R \\ \vec{v} \rho R_{11} \\ \vec{v} \rho R_{22} \\ \vec{v} \rho R_{12} \\ \vec{v} \rho k \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{0} \\ 0 \\ -P_{11} \\ -P_{22} \\ -P_{12} \\ -\frac{1}{2} P_{ii} \end{bmatrix} \quad , \quad (2.6)$$

où on a également $\vec{H}(\vec{Q}, \vec{0}) = \vec{0}$.

Pour simplifier la notation, on a introduit le tenseur $R_{ij} \equiv \langle \rho u_i'' u_j'' \rangle / \langle \rho \rangle$ et le vecteur de vitesse moyenne $\vec{v} \equiv [u, v]^T$; le produit tensoriel est dénoté par $\vec{a} \otimes \vec{b} = a_i b_j$; $\bar{\bar{I}}$ est la matrice d'identité. Les barres $\bar{(\)}$ dénotant la moyenne d'ensemble ont été supprimées. Si nécessaire, on utilisera le symbole $\langle \phi \rangle$ pour dénoter le moment d'une variable ϕ , puisque la barre désigne une moyenne arithmétique dans ce chapitre. Concernant le système (2.4) nous remarquons:

- l'équation pour le taux de dissipation $\rho\varepsilon$ n'est pas incluse puisque cette variable n'intervient pas dans la partie convective des équations pour les autres variables; elle est donc découplée à ce niveau.
- nous utilisons la variable ρk au lieu de la troisième composante diagonale ρR_{33} correspondant à la référence [138] pour des raisons pratiques de programmation; les deux choix sont strictement équivalents.
- le système (2.4) ne se met pas sous forme conservative.

On peut adopter une forme totalement non-conservative, soit:

$$\partial_t \vec{Q} + A \cdot \nabla \vec{Q} = 0 \quad , \quad (2.7)$$

en définissant

$$A \equiv \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{Q}} + G, \quad G \cdot \nabla \vec{Q} = \vec{H} \quad . \quad (2.8)$$

Les matrices $\partial \vec{F} / \partial \vec{Q}$ et G sont données dans l'annexe D.1. Puisque A est un vecteur de matrices associées à chaque direction spatiale $A = [A_x, A_y]$, on est obligé d'étudier une combinaison linéaire $A\vec{n} = A_x n_x + A_y n_y$, introduisant un vecteur unitaire $\vec{n} = [n_x, n_y]^T$, afin de vérifier l'hyperbolicité de notre système [123, tome II, p. 144]. Les valeurs propres λ_i , solutions de la relation $\det[A\vec{n} - \bar{\bar{I}}\lambda] = 0$, s'écrivent:

$$\begin{aligned} \lambda_{1\dots 4} &= \vec{v}\vec{n}, \\ \lambda_{5,6} &= \vec{v}\vec{n} \pm \sqrt{R_{nn}}, \\ \lambda_{7,8} &= \vec{v}\vec{n} \pm \sqrt{3R_{nn} + c^2}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

en notant:

$$R_{nn} = \vec{n}^T \cdot R_{ij} \cdot \vec{n} \quad , \quad (2.10)$$

dans l'ordre suivant

$$\lambda_8 < \lambda_6 < \lambda_{1\dots 4} < \lambda_5 < \lambda_7 \quad . \quad (2.11)$$

Le système (2.7) est hyperbolique non-strict pour des états faiblement réalisables définis dans le paragraphe 1.5. Pour une turbulence nulle, on obtient les vitesses caractéristiques du système de la dynamique des gaz. Néanmoins, dans ce cas de dégénérescence du système, la multiplicité de la première valeur propre augmente et elle excède le nombre des vecteurs propres linéairement indépendants qui sont associés. Par conséquent, la matrice $A\vec{n}$ n'est pas diagonalisable dans le cas "laminaire". Une condition pour la diagonalisabilité est donc l'*over-realisability* des tensions de Reynolds. Les calculs de la suite montrent que ces deux conditions sont aussi suffisantes. En ce qui concerne notre système de convection, l'*over-realisability* est assurée si elle est respectée initialement (voir annexe D.2). Pour le cas où le système de convection est associé à la fermeture complète, les propriétés de réalisabilité dépendent du choix du modèle (voir le paragraphe 1.5).

La modification du système d'ondes (2.9) par rapport à la dynamique des gaz, où on a $\{\lambda_{1,2} = \vec{v}\vec{n}, \lambda_{3,4} = \vec{v}\vec{n} \pm c\}$, et même par rapport à une fermeture du premier ordre, où la présence de l'équation sur ρk induit le système $\{\lambda_{1\dots 3} = \vec{v}\vec{n}, \lambda_{4,5} = \vec{v}\vec{n} \pm \sqrt{c^2 + k/10}\}$, est importante. Une

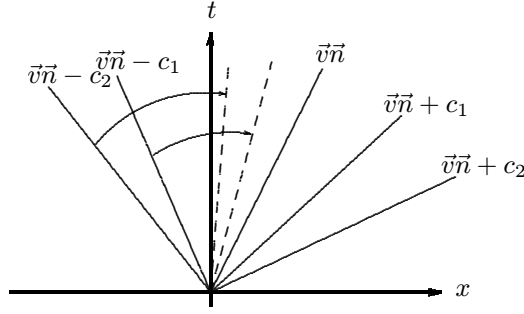


Fig. 2.4: Définition du nombre de Mach dans le plan (x, t) pour $\vec{v}\vec{n} > 0$.

conséquence pour notre système de convection est l'identification de deux nombres de Mach M_i (voir la figure 2.4 pour une interprétation graphique) définis par:

$$M_1 \equiv \frac{\vec{v}\vec{n}}{\sqrt{R_{nn}}} = \frac{M_{Euler}}{M_t^*}, \quad M_2 \equiv \frac{\vec{v}\vec{n}}{\sqrt{3R_{nn} + c^2}} = \frac{M_{Euler}}{\sqrt{3M_t^{*2} + 1}}, \quad (2.12)$$

où $M_t^* \equiv \sqrt{R_{nn}}/c$ est un nombre de Mach turbulent particulier de notre système et $M_{Euler} \equiv \vec{v}\vec{n}/c$ est le nombre de Mach classique. Les implications du système d'ondes particulier sont les suivantes:

- Les ondes associées à $\lambda_{7,8}$ jouent un rôle acoustique analogue aux ondes qui ont la vitesse $\vec{v}\vec{n} \pm c$ dans le système de la dynamique des gaz: elles constituent la vitesse de propagation des ondes de pression et densité (dans le cas isentropique). Cette vitesse est alors modifiée par l'intensité de la turbulence (analogue au cas du modèle $k-\varepsilon$).
- L'annulation du nombre de Mach M_2 correspond au point sonique dans ce système. En accord avec la définition classique, l'écoulement supersonique ($|M_2| > 1$) est donc caractérisé par le fait que toutes les vitesses des ondes λ_i ont le même signe.
- Le rôle des nouvelles ondes associées à $\lambda_{5,6}$ est purement cinématique. Comme nous l'allons montrer par la suite, il s'agit des ondes linéairement dégénérées qui ne nécessitent pas une correction entropique dans le cadre d'une résolution numérique par un solveur de Riemann approché. Néanmoins, les vitesses caractéristiques $\lambda_{5,6}$ peuvent s'annuler librement ($M_1 = 1$), en particulier quand on utilise des maillages irréguliers. Par conséquent, la présence de ces deux ondes constitue une influence déstabilisante à l'égard de la solution numérique (nous verrons par la suite que l'annulation d'une vitesse caractéristique implique l'annulation d'une partie du décentrement du flux associée).

Les vecteurs propres à droite du système (2.7) qui vérifient la relation

$$\left(A\vec{n} - \bar{I}\lambda_i \right) \cdot \vec{r}_i = 0, \quad (2.13)$$

forment la base pour les considérations analytiques ainsi que pour la méthode numérique proposée ci-dessous. Ce calcul est effectué dans l'annexe D.3, où toutes les expressions nécessaires pour la diagonalisation du système sont données, à savoir:

$$A\vec{n} = \mathcal{R} \cdot \Lambda \cdot \mathcal{R}^{-1}, \quad \Lambda \equiv \text{diag}(\lambda_i). \quad (2.14)$$

On utilise notamment une rotation du repère et un changement de variable afin de faciliter les manipulations algébriques.

2.2.1 Le problème de Riemann

Comme nous l'avons exposé dans l'introduction de ce chapitre, le problème de Riemann est l'ingrédient principal des méthodes du type Godunov. Il consiste en un écoulement instationnaire qui se développe à partir d'un champ initial composé de deux états sémi-infinis $\vec{Q}_L$ et $\vec{Q}_R$ séparés par une discontinuité au point x_0 :

$$\vec{Q}(t=0) = \begin{cases} \vec{Q}_L & x < x_0 \\ \vec{Q}_R & x > x_0 \end{cases} . \quad (2.15)$$

Puisqu'il s'agit d'un écoulement essentiellement mono-dimensionnel, on se place d'abord dans un repère $[n, t]$ dont l'axe $\vec{n}$ est perpendiculaire à la discontinuité. Ceci permet de retrouver la formulation du système utilisé dans l'annexe D.3. On rappelle les définitions des vitesses et des tensions dans le repère local:

$$\begin{aligned} R_{nn} &= \vec{n}^T \cdot R_{ij} \cdot \vec{n} & u_n &= \vec{v} \vec{n} \\ R_{tt} &= \vec{t}^T \cdot R_{ij} \cdot \vec{t} & u_t &= \vec{v} \vec{t} \\ R_{nt} &= \vec{n}^T \cdot R_{ij} \cdot \vec{t} & R_{tn} &= R_{nt} \end{aligned} . \quad (2.16)$$

La solution pour $t > 0$ est déterminée par la propagation des 5 ondes distinctes du système. Selon le rapport des quantités initiales, les ondes associées à λ_7 et λ_8 peuvent chacune représenter soit un choc, soit une onde de détente (raréfaction); ils existent donc 4 configurations possibles.

La résolution du problème de Riemann général nécessite la paramétrisation des variations des variables à travers les ondes simples, régulières ainsi qu'à travers des discontinuités de contact et les chocs. Dans les zones régulières, la solution peut être obtenue à l'aide des invariants associés à chaque onde. Pour paramétriser une discontinuité, les conditions de saut doivent être établies. Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre, dans le cas non-conservatif une hypothèse portant sur la connexion des variables à travers une discontinuité est introduite afin de déduire les relations de Rankine-Hugoniot généralisées. Nous avons choisi un chemin linéaire (Le Floch [130]) pour les variables $\vec{V} = [1/\rho, u_n, u_t, p, \rho R_{nn}, \rho R_{tt}, \rho R_{nt}, \rho k]^T$ (Hérard *et al.* [96]) conduisant aux conditions de saut suivantes (voir l'annexe D.4 pour les détails de la déduction de la relation (2.17)):

$$-\sigma [\vec{Q}] + [\vec{F}] + \overline{G} [\vec{Q}] = 0 \quad , \quad (2.17)$$

où σ est la vitesse du déplacement de la discontinuité et $\overline{G}$ est la notation symbolique pour la matrice de la contribution non-conservative exprimé en fonction de la moyenne arithmétique des variables $\vec{V}$, détaillée dans l'annexe D.4. Ce choix de chemin et de variables permet en particulier de récupérer les relations de saut de Rankine-Hugoniot en absence de turbulence.

Nous précisons les notations suivantes: $\overline{\phi} = (\phi_l + \phi_r)/2$ est utilisé pour la moyenne arithmétique et $[\phi] = \phi_r - \phi_l$ pour le saut d'une variable ϕ ; les états $\phi_r = \phi(x_r)$ et $\phi_l = \phi(x_l)$ sont fonctions de la position x ; x_r est à droite de x_l .

Nous allons par la suite d'abord considérer la solution du problème de Riemann pour les ondes linéairement dégénérées avant d'aborder les ondes vraiment non-linéaires.

2.2.1.1 Les ondes linéairement dégénérées

Pour les ondes linéairement dégénérées (LD), on rappelle que la projection du gradient par rapport aux variables du système $\vec{Q}$ sur le vecteur propre associé est nulle:

$$\frac{\partial \lambda_i^{LD}}{\partial \vec{Q}} \cdot \vec{r}^i = 0 \quad . \quad (2.18)$$

La condition (2.18) est vérifiée par les caractéristiques $\lambda_{1\dots 4}$ et $\lambda_{5,6}$. Ces ondes représentent des discontinuités de contact dans la solution du problème de Riemann. Grâce au chemin linéaire, la relation suivante pour la vitesse de propagation est valable dans le cas d'un système non-conservatif:

$$\sigma = \lambda_k^{LD}(\vec{Q}_l) = \lambda_k^{LD}(\vec{Q}_r) \quad . \quad (2.19)$$

Par conséquent, les conditions de saut sont équivalentes aux invariants de Riemann I_R^i pour une onde LD, soit:

$$I_R^i \quad / \quad \frac{\partial I_R^i}{\partial \vec{Q}} \cdot \vec{r}^i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [I_R^i] = 0 \quad . \quad (2.20)$$

En particulier, on obtient les résultats suivants:

$$I_R^{1\dots 4} = \{u_n, \rho R_{nt}, u_t, p + \rho R_{nn}\} \quad , \quad (2.21)$$

$$I_R^5 = \left\{ u_n, R_{nn}, \rho, u_t - \frac{R_{nt}}{\sqrt{R_{nn}}}, R_{nn}R_{tt} - R_{nt}^2, k - \frac{R_{nt}^2}{2R_{nn}}, p \right\} \quad , \quad (2.22)$$

$$I_R^6 = \left\{ u_n, R_{nn}, \rho, u_t + \frac{R_{nt}}{\sqrt{R_{nn}}}, R_{nn}R_{tt} - R_{nt}^2, k - \frac{R_{nt}^2}{2R_{nn}}, p \right\} \quad . \quad (2.23)$$

Les invariants associés aux ondes $\lambda_{5,6}$ sont particulièrement utiles pour juger la méthode numérique puisqu'ils permettent d'identifier la position de ces ondes dans la solution.

2.2.1.2 Les ondes vraiment non-linéaires

Les ondes qui vérifient la relation suivante

$$\frac{\partial \lambda_i^{VNL}}{\partial \vec{Q}} \cdot \vec{r}^i \neq 0 \quad (2.24)$$

sont appelées ondes vraiment non-linéaires (VNL). Dans notre cas, les ondes λ_7 et λ_8 sont des ondes VNL.

Solutions régulières. Quand il s'agit d'une onde de raréfaction, la solution est régulière et on peut déterminer des grandeurs qui sont invariantes à travers cette onde, à savoir:

$$I_R^i \quad / \quad \frac{\partial I_R^i}{\partial \vec{Q}} \cdot \vec{r}^i = 0 \quad . \quad (2.25)$$

Les grandeurs I_R^i correspondent aux variables caractéristiques; elles peuvent être calculées par exemple par l'intégration de l'expression $R^{-1} \cdot \partial_i \vec{Q}$. On obtient ainsi:

$$I_R^7 = \left\{ s, \frac{R_{nn}}{\rho^2}, 2k - R_{nn} - R_{tt}, u_n - \int \frac{c_2}{\rho} d\rho, u_t - \int \frac{2c_2 R_{nt}}{c_2^2 - R_{nn}} \frac{d\rho}{\rho}, \frac{R_{nn} R_{tt} - R_{nt}^2}{\rho^2}, R_{nt} \cdot \exp \left(-\frac{1}{3} \int \frac{c_2^2 + R_{nn}}{c_2^2 - R_{nn}} \frac{d\rho}{\rho} \right) \right\} \quad , \quad (2.26)$$

$$I_R^8 = \left\{ s, \frac{R_{nn}}{\rho^2}, 2k - R_{nn} - R_{tt}, u_n + \int \frac{c_2}{\rho} d\rho, u_t + \int \frac{2c_2 R_{nt}}{c_2^2 - R_{nn}} \frac{d\rho}{\rho}, \frac{R_{nn} R_{tt} - R_{nt}^2}{\rho^2}, R_{nt} \cdot \exp \left(-\frac{1}{3} \int \frac{c_2^2 + R_{nn}}{c_2^2 - R_{nn}} \frac{d\rho}{\rho} \right) \right\} \quad , \quad (2.27)$$

avec la fonction d'entropie définie par l'expression $s \equiv \ln(p/\rho^\gamma)$ et l'abréviation $c_2^2 \equiv c^2 + 3R_{nn}$. Les intégrales dans les expressions (2.26) et (2.27) ne peuvent pas être calculées analytiquement dans le cas général.

Chocs. Les conditions de saut (2.17) associés au chemin linéaire mènent aux relations suivantes pour les chocs (notant $\beta = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$):

$$\frac{\rho_r}{\rho_l} = z, \quad \sigma = \frac{z(u_n)_r - (u_n)_l}{z - 1}, \quad \frac{p_r}{p_l} = \frac{\beta z - 1}{\beta - z}, \quad \frac{(R_{nn})_r}{(R_{nn})_l} = \frac{2z - 1}{z(2 - z)}, \quad (2.28)$$

$$[u_n] = \pm \frac{(z - 1)}{\sqrt{z}} \sqrt{\frac{2\gamma p_l}{\rho_l(\gamma - 1)(\beta - z)}} + \frac{3(R_{nn})_l}{2 - z}. \quad (2.29)$$

Les résultats pour les autres variables u_t , R_{tt} , R_{nt} et k sont données dans l'annexe D.5. Le signe du saut de la vitesse normale u_n est toujours négatif, donc $z > 1$ dans l'onde λ_8 avec signe $(-)$ dans la relation (2.29) et $z < 1$ dans l'onde λ_7 avec un signe $(+)$ dans (2.29). La vitesse u_n diminue toujours en traversant un choc.

2.2.1.3 Conséquences des relations obtenues pour le problème de Riemann

On note d'abord que le rapport de densité maximal prédit par le saut associé au chemin linéaire est de:

$$\frac{\max(\rho_l, \rho_r)}{\min(\rho_l, \rho_r)} = \min(\beta, 2), \quad (2.30)$$

ce qui est une conséquence des variations de la pression et de la tension normale R_{nn} dans (2.28). Dans le cas des équations de Euler, la limite supérieure est donnée par β uniquement. Le saut admissible dans le cadre de la théorie du chemin linéaire est donc réduit pour la fermeture du second ordre (nous remarquons: $\min(\beta, 2) = 2, \forall \gamma \in [1, 3]$).

Il peut être montré (voir annexe D.5) que le saut de l'entropie s est positif à la traversée d'un choc et que

$$-\sigma [\rho s] + [\rho u_n s] \geq 0, \quad (2.31)$$

en accord avec la condition d'entropie déduite pour le système entier dans l'annexe C.1.

Une analyse analogue à celle de la référence [96] montre que le problème de Riemann permet une solution unique réalisable en utilisant le chemin linéaire sous la condition suivante portant sur la variation du champ initial:

$$u_{n_R} - u_{n_L} < \int_0^{\rho_L} \frac{c_2}{\rho} d\rho + \int_0^{\rho_R} \frac{c_2}{\rho} d\rho. \quad (2.32)$$

On remarque que malgré l'unicité de la solution et sa conformité avec la condition d'entropie, elle reste une approximation dont l'erreur est due à l'hypothèse du chemin linéaire. Dans les travaux théoriques de Le Floch [130] et Le Floch et Liu [131], les auteurs soulignent que cette hypothèse est valable pour des états $\vec{Q}_R$ voisins de $\vec{Q}_L$, c'est-à-dire pour des chocs faibles. Une quantification n'est pourtant pas possible analytiquement. Par conséquent, on n'est pas capable d'effectuer une comparaison rigoureuse entre un calcul numérique et une solution exacte. L'erreur de la solution associée au chemin linéaire diminue quand l'intensité du choc diminue. Par contre, les relations valables dans les zones régulières (les invariants I_R^i) sont exactes, même dans notre cas non-conservatif. Elles seront donc utilisées préférentiellement comme référence dans les tests numériques. De plus, les relations à travers les ondes LD sont toujours valables.

Quant au comportement des ondes linéairement dégénérées, on constate que les invariants associés aux ondes $\lambda_{5,6}$ se réduisent à ceux des ondes $\lambda_{1...4}$ dans le cas où R_{nn} est la seule composante non-nulle de la turbulence. Dans ce cas particulier, les ondes $\lambda_{5,6}$ sont invisibles (d'amplitude zéro). Afin d'étudier l'impact de ces nouvelles ondes, un cas test doit donc faire intervenir un tenseur anisotrope.

2.2.2 Un solveur de Riemann approché pour le système non-conservatif

La formulation faible du système convectif sous forme non-conservative (2.4) s'écrit:

$$\int_{C_i} \partial_t \vec{Q} dv + \oint_{\Gamma_{C_i}} \vec{F} \vec{n}_{\Gamma_{C_i}} d\sigma = - \int_{C_i} G \cdot \nabla \vec{Q} dv \quad . \quad (2.33)$$

Effectuant l'intégration de la dérivée temporelle et la discrétisation de l'intégrale des flux sur les facettes $\Gamma_{C_{ij}}$ de la cellule C_i donne pour le premier membre:

$$\int_{C_i} \partial_t \vec{Q} dv + \oint_{\Gamma_{C_i}} \vec{F} \vec{n}_{\Gamma_{C_i}} d\sigma = \frac{\vec{Q}_i^{n+1} - \vec{Q}_i^n}{\Delta t} \cdot V_{C_i} + \sum_{j=1}^{n_v} \mathcal{F}_{ij} \cdot \vec{n}_{ij} \cdot \delta \Gamma_{C_{ij}} \quad , \quad (2.34)$$

où V_{C_i} désigne le volume de la cellule C_i , Δt le pas de temps, $\mathcal{F}_{ij}$ la fonction de flux numérique à déterminer par la suite, n_v le nombre de nœuds P_j voisins de P_i et $\delta \Gamma_{C_{ij}}$ la surface associée à une facette $\Gamma_{C_{ij}}$ (voir également la figure 2.3). Ceci correspond à une formulation conservative de type "Volume Fini".

Pour traiter l'intégrale du second membre de la relation (2.33), Hérard [132] propose de "geler" la matrice G sur la cellule C_i à l'instant n , ce qui permet d'écrire:

$$\int_{C_i} G \cdot \nabla \vec{Q} dv \approx G(\vec{Q}_i) \cdot \int_{C_i} \nabla \vec{Q} dv = G(\vec{Q}_i) \cdot \oint_{\Gamma_{C_i}} \vec{Q} \vec{n}_{\Gamma_{C_i}} d\sigma = G(\vec{Q}_i) \cdot \sum_{j=1}^{n_v} \mathcal{Q}_{ij} \cdot \vec{n}_{ij} \delta \Gamma_{C_{ij}} \quad . \quad (2.35)$$

Dans la formule (2.35), la valeur $\mathcal{Q}_{ij}$ des variables à l'interface entre P_i et P_j est évalué par une moyenne arithmétique,

$$\mathcal{Q}_{ij} = \frac{1}{2} (\vec{Q}_i + \vec{Q}_j) \quad , \quad (2.36)$$

ce qui implique que le traitement du terme source est centré. On remarque que l'intégrale du gradient des variables dans (2.35) peut être exprimée par la formulation d'éléments finis (voir le paragraphe 2.3) de manière équivalente.

Pour l'instant, on se restreint à un problème monodimensionnel afin de déterminer la fonction de flux $\mathcal{F}_{ij}$ du schéma. La généralisation de la méthode en plusieurs dimensions sera discutée dans le paragraphe 2.2.6.

Avec les résultats du paragraphe précédent, on pourrait construire un véritable solveur de Godunov en résolvant un problème de Riemann exactement (dans le cadre du chemin linéaire) à chaque interface $\Gamma_{C_{ij}}$. Afin d'éviter le temps de calcul énorme d'un tel schéma, on utilisera une solution approximative qui mène à une fonction de flux algébrique (dans le cas du modèle k - ε , le surcoût d'un véritable schéma de Godunov n'apporte pas d'intérêt particulier par rapport au schéma de type "Roe" [132]).

Le principe d'un solveur de Riemann approché consiste à résoudre exactement le problème de Riemann associé au système linéarisé suivant:

$$\partial_t \vec{Q} + \mathcal{A}_{ij} \cdot \partial_x \vec{Q} = 0 \quad , \quad (2.37)$$

où $\mathcal{A}_{ij}$ est une matrice constante qui représente une linéarisation locale des flux et de la production de notre système de convection (2.7). La solution du système linéarisé (2.37) consiste de 5 ondes simples puisque tous les champs caractéristiques sont linéairement dégénérés (voir la figure 2.5 a)). Nous considérons par la suite deux techniques distinctes afin d'introduire la solution approchée dans la méthode de Godunov: la décomposition de différences de flux et la décomposition de différences de variables.

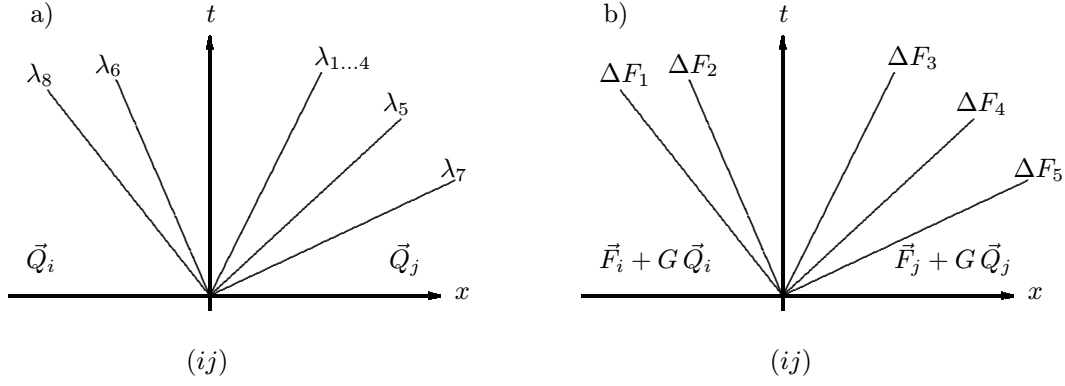


Fig. 2.5: a) Exemple pour des ondes simples séparant les états entre deux cellules. b) Calcul du flux d'interface.

2.2.2.1 Décomposition de différences de flux

Ici on suit le principe de Roe [124, 122] appliqué au système non-conservatif. En intégrant la définition de la matrice du système linéaire $\mathcal{A}_{ij} = (\partial \vec{F} / \partial \vec{Q})_{ij} + G_{ij}$ entre l'état de gauche et l'état de droite, considérant que la matrice G_{ij} est gelée, on obtient:

$$[\vec{F}]_i^j + G_{ij} \cdot [\vec{Q}]_i^j = \mathcal{A}_{ij} \cdot [\vec{Q}]_i^j = \sum_k \lambda_k(\mathcal{A}_{ij}) \cdot \vec{r}^k(\mathcal{A}_{ij}) \cdot \alpha_k, \quad (2.38)$$

où les coefficients α_k représentent les composantes de $[\vec{Q}]$ dans la base des vecteurs propres à droite de $\mathcal{A}$: $[\vec{Q}]_i^j = \sum_k \alpha_k \vec{r}^k(\mathcal{A}_{ij})$. La valeur du premier membre de la relation (2.38) à l'interface de la cellule ($\vec{F}(x/t=0) \equiv F_{ij}^*$, $\vec{Q}(x/t=0) \equiv Q_{ij}^*$) peut être calculée par la gauche ou par la droite en tenant compte des sauts associés aux caractéristiques de signe négatif ou positif respectivement (voir la figure 2.5 b)), soit:

$$F_{ij}^* + G_{ij} \cdot Q_{ij}^* = \vec{F}_i + G_{ij} \cdot \vec{Q}_i + \sum_{k / \lambda_k < 0} \lambda_k(\mathcal{A}_{ij}) \cdot \vec{r}^k(\mathcal{A}_{ij}) \cdot \alpha_k, \quad (2.39)$$

$$F_{ij}^* + G_{ij} \cdot Q_{ij}^* = \vec{F}_j + G_{ij} \cdot \vec{Q}_j - \sum_{k / \lambda_k > 0} \lambda_k(\mathcal{A}_{ij}) \cdot \vec{r}^k(\mathcal{A}_{ij}) \cdot \alpha_k. \quad (2.40)$$

La moyenne de ces deux formules donne ensuite:

$$F_{ij}^* + G_{ij} \cdot Q_{ij}^* = \frac{1}{2} \left\{ \vec{F}(\vec{Q}_i) + \vec{F}(\vec{Q}_j) - \sum_k |\lambda_k(\mathcal{A}_{ij})| \cdot \vec{r}^k(\mathcal{A}_{ij}) \cdot \alpha_k \right\} + G_{ij} \cdot \frac{1}{2} (\vec{Q}_i + \vec{Q}_j). \quad (2.41)$$

On retrouve ici la formulation centrée pour le terme de source que nous avons posée ci-dessus dans la relation (2.36). La fonction de flux numérique $\mathcal{F}_{ij}$ s'écrit donc comme dans le cas conservatif:

$$\mathcal{F}_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \vec{F}(\vec{Q}_i) + \vec{F}(\vec{Q}_j) - |\mathcal{A}_{ij}| (\vec{Q}_j - \vec{Q}_i) \right\}, \quad (2.42)$$

où la notation habituelle $|\mathcal{A}_{ij}| = \mathcal{R}(\mathcal{A}_{ij}) \cdot |\Lambda(\mathcal{A}_{ij})| \cdot \mathcal{R}^{-1}(\mathcal{A}_{ij})$ est utilisée.

La stratégie de Roe se traduit alors en principe à notre cas; ceci a déjà été exploité par Hérard [132] dans le cadre d'une fermeture de premier ordre (modèle k - ε). Afin de déterminer complètement le flux pour le système non-linéaire qui nous intéresse, la linéarisation doit être définie, c'est-à-dire qu'on cherche une matrice $\mathcal{A}(\vec{Q}_i, \vec{Q}_j)$ qui a les propriétés suivantes:

- (i) $\mathcal{A}$ est diagonalisable,

$$(ii) \quad \mathcal{A}(\vec{Q}_i, \vec{Q}_i) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{Q}}(\vec{Q}_i) + G(\vec{Q}_i),$$

$$(iii) \quad \mathcal{A}(\vec{Q}_i, \vec{Q}_j) \cdot [\vec{Q}] = [\vec{F}] + \overline{G} \cdot [\vec{Q}].$$

La troisième propriété imposée par Roe dans le cas de la dynamique de gaz assure la consistance avec les conditions de saut à travers d'un choc; un schéma dont la matrice $\mathcal{A}$ vérifie cette condition donne un flux exacte associé au problème de Riemann non-linéaire quand un choc est localisé à l'interface en question. Dans le cas de la dynamique de gaz, il se trouve que l'unique choix conforme à l'ensemble des propriétés est la matrice jacobienne elle-même sous un changement de variables ($\vec{Q} \rightarrow \hat{Q}$) qui fait intervenir une moyenne particulière, pondérée par la masse volumique [122]. Une telle moyenne peut également être trouvée dans le cas de la fermeture du premier ordre (voir [132]). En posant les conditions de saut associées au chemin linéaire, l'analogue n'est pas possible dans notre cas. On constate:

$$\nexists \quad \hat{Q} \quad / \quad \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{Q}}(\hat{Q}) + G(\hat{Q}) \right) [\vec{Q}] = [\vec{F}] + \overline{G} [\vec{Q}] \quad , \quad (2.43)$$

puisque la deuxième et la troisième ligne de cette condition imposent

$$\hat{u} = \frac{\sqrt{\rho_i} u_i + \sqrt{\rho_j} u_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}, \quad \hat{v} = \frac{\sqrt{\rho_i} v_i + \sqrt{\rho_j} v_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}, \quad (2.44)$$

tandis que les lignes cinq à huit imposent

$$\hat{u} = \overline{u}, \quad \hat{v} = \overline{v} \quad , \quad (2.45)$$

(avec $\overline{\phi} = (\phi_i + \phi_j)/2$). Evidemment, on ne peut pas vérifier la condition (iii) simplement par la matrice A dans ce système sur-contraint. Puisque la matrice recherchée $\mathcal{A}$ est déterminée de façon unique par propriété (iii), il faudrait chercher une diagonalisation de cette expression qui vérifie également la propriété (ii). A ce jour, nous n'avons pas abouti à une expression pour les matrices de passages associés à ce choix utilisable dans un code de calcul. On est donc amené à travailler avec une forme approximative de la matrice de décentrement $\mathcal{A}$ qui est plus facilement diagonalisable et qui donne des résultats très satisfaisants. On utilise ici la matrice du système en fonction de la moyenne arithmétique du vecteur des variables $\vec{Y} = [\rho, u, v, H_t, R_{11}, R_{22}, R_{12}, k]^T$, soit:

$$\mathcal{A}(\vec{Q}_i, \vec{Q}_j) = A(\vec{Q}(\overline{Y})) \quad , \quad (2.46)$$

avec $H_t \equiv e_T + p/\rho$. Utilisant les résultats du paragraphe 2.2 et de l'annexe D.2, on peut constater que ce choix vérifie les propriétés (i) et (ii). Le flux numérique s'écrit donc finalement:

$$\mathcal{F}_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \vec{F}(\vec{Q}_i) + \vec{F}(\vec{Q}_j) - \left| A(\vec{Q}(\overline{Y})) \right| (\vec{Q}_j - \vec{Q}_i) \right\} \quad . \quad (2.47)$$

2.2.2.2 Décomposition de différences de variables

Le principe de cette méthode a été proposé par Gallouet et Masella [139] (voir également [140, 141]). Il consiste à calculer la flux du schéma de Godunov par la valeur du vecteur des variables $\vec{Q}_{ij}^*$ à l'interface qui est obtenue par la solution du problème linéarisé

$$\partial_t \vec{Q} + \mathcal{A}_{ij} \cdot \partial_x \vec{Q} = 0 \quad , \quad (2.48)$$

où $\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}(\vec{Q}_i, \vec{Q}_j)$ constitue une linéarisation de la matrice A (relation (2.8)). Dans la proposition originale [139], $\mathcal{A}_{ij} = A(\overline{Q})$ avec $\overline{Q} = (\vec{Q}_i + \vec{Q}_j)/2$. Nous allons ici utiliser la matrice suivante:

$$\mathcal{A}_{ij} = A(\overline{Y}), \quad \overline{Y} = (\vec{Y}_i + \vec{Y}_j)/2, \quad \vec{Y} = [\rho, u, v, H_t, R_{11}, R_{22}, R_{12}, k]^T, \quad (2.49)$$

ce qui est l'analogie au choix dans la méthode précédente (paragraphe 2.2.2.1).

L'écart des variables "pseudo-conservatives" ($\vec{Q}_j - \vec{Q}_i$) peut être projeté sur les vecteurs propres à droite,

$$\vec{Q}_j - \vec{Q}_i = \sum_k \vec{r}^k(\mathcal{A}_{ij}) \cdot \beta_k, \quad (2.50)$$

où les coefficients β_k peuvent être interprétés comme des écarts des variables caractéristiques du problème linéarisé. La solution $\beta_k(\vec{Q}_i, \vec{Q}_j, \vec{Y}_i, \vec{Y}_j)$ de la relation (2.50) est donnée dans l'annexe D.6. En considérant la situation montrée sur la figure 2.5 a), on obtient – de manière analogue à la méthode de décomposition des différences de flux – pour la valeur des variables à l'interface:

$$Q_{ij}^* = \vec{Q}_i + \sum_{k / \lambda_k < 0} \vec{r}^k(\mathcal{A}_{ij}) \cdot \beta_k, \quad (2.51)$$

$$Q_{ij}^* = \vec{Q}_j - \sum_{k / \lambda_k > 0} \vec{r}^k(\mathcal{A}_{ij}) \cdot \beta_k, \quad (2.52)$$

ou de manière équivalente:

$$Q_{ij}^* = \frac{1}{2} \left\{ \vec{Q}_i + \vec{Q}_j - \sum_{k / \lambda_k > 0} \vec{r}^k(\mathcal{A}_{ij}) \cdot \beta_k + \sum_{k / \lambda_k < 0} \vec{r}^k(\mathcal{A}_{ij}) \cdot \beta_k \right\}. \quad (2.53)$$

La fonction de flux numérique pour ce schéma est simplement calculée par le flux analytique en fonction de la valeur des variables obtenue pour l'interface:

$$\mathcal{F}_{ij} = \vec{F}(Q_{ij}^*) \quad (2.54)$$

2.2.3 Un solveur de Riemann approché pour le pseudo-système de convection

Dans ce paragraphe, nous allons montrer une méthode de traitement du système de convection qui évite la complexité associée au caractère non-conservatif de notre système au coût d'une légère perte de réalisme du solveur. Qui plus est, par le découplage des sous-systèmes, cette technique permet une réduction du temps de calcul de manière importante, particulièrement en vue d'une méthode implicite.

La plupart des auteurs qui utilisent une méthode caractéristique pour déterminer la convection du modèle de second ordre se basent essentiellement sur le système d'ondes des équations d'Euler [142, 55, 143]. Morisson [144] a pris en compte les équations supplémentaires des moments d'ordre deux dans sa décomposition des flux. Néanmoins, il considère seulement la partie conservative du système de convection, ce qui permet la construction d'un schéma de Roe classique. Notre proposition suivante est en principe équivalente à celle de Morisson en ce qui concerne le choix du système de convection (dit "pseudo-système de convection" puisqu'on ne considère pas tous les termes différentiels du premier ordre). Par contre, nous proposons de découpler les équations régissant les moments d'ordre deux, sauf pour celle de l'énergie turbulente k , en observant que ces grandeurs n'influencent pas explicitement le système principal.

On définit d'abord un nouveau système de convection (au lieu de l'équation (2.6)) qui est

hyperbolique et conservatif:

$$\partial_t \vec{Q} + \nabla \cdot \vec{F}_c = 0 \quad , \quad \vec{F}_c = \begin{bmatrix} \rho \vec{v} \\ \rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \vec{I} \\ (\rho \tilde{e}_T + p) \vec{v} \\ \vec{v} \rho R_{11} \\ \vec{v} \rho R_{22} \\ \vec{v} \rho R_{12} \\ \vec{v} \rho k \end{bmatrix} . \quad (2.55)$$

Concernant ce nouveau système, nous remarquons:

- par rapport au vrai système de convection, on est obligé d'enlever l'action des tensions turbulentes dans l'équation de quantité de mouvement et d'énergie pour obtenir un système purement hyperbolique; si on se contente de supprimer le vecteur de production, le système est du type mixte hyperbolique/elliptique.
- le couplage entre le champ moyen et les moments d'ordre deux s'effectue uniquement par la pression qui est toujours définie par la relation suivante:

$$p = (\gamma - 1) \{ \rho e_T - (\rho u_i)^2 / (2\rho) - k \} . \quad (2.56)$$

- Les variables ρR_{11} , ρR_{22} , ρR_{12} ainsi que la dissipation $\rho \varepsilon$ sont découplées au niveau de ce système de convection.

Par conséquent, on peut séparer le système (2.55) en un système principal régissant les variables composantes du vecteur $\vec{Q}^1 = [\rho, \rho \vec{v}, \rho e_T, \rho k]^T$ et 5 équations individuelles pour les variables $Q^k = \{\rho R_{11}, \rho R_{22}, \rho R_{12}, \rho \varepsilon\}$ qui se comportent comme des concentrations scalaires passifs. Le système équivalent s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{Q}^1 + \nabla \cdot \vec{F}_c^1 &= 0 , \\ \partial_t Q^k + \nabla \cdot F_c^k &= 0 \quad k = 2 \dots 5 , \end{aligned} \quad (2.57)$$

avec les flux suivants:

$$\vec{F}_c^1 = \begin{bmatrix} \rho \vec{v} \\ \rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \vec{I} \\ (\rho \tilde{e}_T + p) \vec{v} \\ \vec{v} \rho k \end{bmatrix} , \quad F_c^k = \vec{v} Q^k \quad k = 2 \dots 5 . \quad (2.58)$$

On s'intéresse d'abord au traitement du système principal. Les valeurs propres de ce système sont égales à celles des équations d'Euler, à savoir:

$$\lambda_{1,2}^c = \vec{v} \vec{n} , \quad \lambda_{3,4}^c = \vec{v} \vec{n} \pm c , \quad \lambda_5^c = \vec{v} \vec{n} , \quad \Lambda^c = \text{diag}(\lambda_i^c) , \quad (2.59)$$

avec $c^2 \equiv \gamma p / \rho$. La turbulence n'influence donc pas explicitement la célérité des ondes. De plus, il n'existe que trois vitesses caractéristiques distinctes, contraire au cas du système (2.4). Nous utilisons ici la méthode de décomposition de différence de flux qui donne pour le flux numérique du système principal:

$$\mathcal{F}_{ij}^1 = \frac{1}{2} \left\{ \vec{F}_c^1(\vec{Q}_i^1) + \vec{F}_c^1(\vec{Q}_j^1) - \left| J(\vec{Q}^1(\hat{Y}^c)) \right| (\vec{Q}_j^1 - \vec{Q}_i^1) \right\} , \quad (2.60)$$

avec $J \equiv \partial \vec{F}_c^1 / \partial \vec{Q}_c^1$ la jacobienne du système. Ici, la matrice jacobienne remplit les trois propriétés de Roe si on utilise la moyenne classique de Roe pour les variables $\vec{Y}^c$ (voir l'annexe D.8):

$$\hat{Y}^c = \frac{\sqrt{\rho_i} Y_i^c + \sqrt{\rho_j} Y_j^c}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}, \quad \vec{Y}^c = [u, v, H_t, k]^T, \quad (2.61)$$

avec $H_t \equiv e_T + p/\rho$. Les matrices $\mathcal{R}_c$ et $\mathcal{R}_c^{-1}$ nécessaires pour la diagonalisation de la matrice de décentrement, qui se calcule selon la formule suivante:

$$\left| J(\vec{Q}^1(\hat{Y}^c)) \right| = \mathcal{R}_c(\vec{Q}^1(\hat{Y}^c)) \cdot |\Lambda^c| \cdot \mathcal{R}_c^{-1}(\vec{Q}^1(\hat{Y}^c)) \quad , \quad (2.62)$$

sont données dans l'annexe D.7.

Le flux numérique des équations associées aux variables Q^k ($k = 2 \dots 5$) est calculé en suivant une proposition de Larrouturou [145] pour le transport des scalaires passifs. Ces grandeurs sont convectées par le flux numérique de la masse volumique (calculé par la formule (2.60)) de manière suivante:

$$\mathcal{F}_{ij}^k = \mathcal{F}_{ij_\rho}^1 \cdot \frac{Q_m^k}{\rho_m} \quad \begin{cases} m = i & \text{si } \mathcal{F}_{ij_\rho}^1 \cdot \vec{n}_{ij} > 0 \\ m = j & \text{si } \mathcal{F}_{ij_\rho}^1 \cdot \vec{n}_{ij} < 0 \end{cases} \quad k = 2 \dots 5 \quad . \quad (2.63)$$

Ce décentrement assure une formulation conservative du schéma.

La discrétisation des termes du pseudo-système de convection en fonction de ces flux numériques est toujours donnée par la relation (2.34). Les termes qui ont été éliminés de la partie convective, à savoir le vecteur $\vec{H}$ et la différence $\vec{F} - \vec{F}_c$, sont traités de manière centrée par l'approche des éléments finis, avec les termes visqueux et les termes sources (voir le paragraphe 2.3).

2.2.4 Tests quasi-monodimensionnels des solveurs numériques

L'objectif des tests présentés dans ce paragraphe est d'évaluer la performance des solveurs de Riemann approchés que nous avons proposés pour traiter le système de convection non-conservatif associé à la fermeture du second ordre. Nous allons également effectuer une comparaison entre les méthodes basées sur une décomposition du système de convection entier et celle du pseudo-système de convection. Ceci permet de juger l'influence du découplage d'une partie des "variables turbulentes" sur la représentation numérique des ondes caractéristiques du système.

A cet effet, le problème de Riemann est un cas test très approprié. La solution contient tous les phénomènes importants de la dynamique des ondes. En même temps, le problème est géométriquement simple: un bilan n'est effectué que dans une seule direction spatiale. Dans notre cas, le vecteur des variables $\vec{Q}$ fait néanmoins intervenir toutes les composantes du vecteur de vitesses et de la tension de Reynolds d'un écoulement bidimensionnel, d'où la terminologie "quasi-monodimensionnel" du problème.

2.2.4.1 La définition des cas tests

Comme nous l'avons précisé dans le paragraphe 2.2.1, il existe quatre configurations possibles pour la solution du problème de Riemann: selon les conditions initiales, chacune des ondes VNL peut représenter soit un choc, soit une onde de détente. La configuration du type choc-détente correspond à l'écoulement dans un tube à choc où la discontinuité initiale entre deux gaz est réalisée par un diaphragme localisé à x_0 . Dans l'expérience, ce diaphragme est enlevé à l'instant $t = 0$ et l'écoulement se développe ensuite. Pour cette configuration, Sod [146] a défini des conditions initiales standard pour le calcul numérique dans le cas de la dynamique de gaz. Nous nous basons sur ces valeurs en ce qui concerne les variables aérodynamiques. Le fluide considéré ici est de l'air ($\gamma = 1.4$). Les valeurs initiales des variables particulières à notre système sont déterminées indépendamment. Nous souhaitons particulièrement pouvoir distinguer les ondes 5 et 6 dans la

	$\rho \left[\frac{kg}{m^3} \right]$	$u_n \left[\frac{m}{s} \right]$	$u_t \left[\frac{m}{s} \right]$	$p \left[\frac{kg m^2}{s} \right]$	$R_{nn} \left[\frac{m^2}{s^2} \right]$	$R_{tt} \left[\frac{m^2}{s^2} \right]$	$R_{nt} \left[\frac{m^2}{s^2} \right]$	$k \left[\frac{m^2}{s^2} \right]$	b_{nt}	M_t^*
cas 1										
L	1	0	0	10^5	$\frac{2}{3} 10^5$	$\frac{2}{3} 10^5$	$\frac{1}{4} 10^5$	10^5	$\frac{1}{8}$	0.69
R	$\frac{1}{8}$	0	0	10^4	$\frac{16}{3} 10^3$	$\frac{16}{3} 10^3$	$2 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^3$	$\frac{1}{8}$	0.22
cas 2										
L	1	100	0	10^5	$\frac{2}{3} 10^4$	$\frac{2}{3} 10^4$	$\frac{1}{4} 10^4$	10^4	$\frac{1}{8}$	0.22
R	1	-100	0	10^5	$\frac{2}{3} 10^4$	$\frac{2}{3} 10^4$	$\frac{1}{4} 10^4$	10^4	$\frac{1}{8}$	0.22
cas 3										
L	1	-100	0	10^5	$\frac{2}{3} 10^4$	$\frac{2}{3} 10^4$	$\frac{1}{4} 10^4$	10^4	$\frac{1}{8}$	0.22
R	1	100	0	10^5	$\frac{2}{3} 10^4$	$\frac{2}{3} 10^4$	$\frac{1}{4} 10^4$	10^4	$\frac{1}{8}$	0.22

Tab. 2.1: Conditions initiales des différents problèmes de Riemann calculés

solution, ce qui implique deux conditions: le nombre de Mach turbulent M_t^* doit être élevé afin de permettre une séparation entre ces ondes de vitesse $\lambda_{5,6} = u_n \pm \sqrt{R_{nn}}$ et la discontinuité de contact associée à $\lambda_{1...4} = u_n$; le tenseur de Reynolds doit être anisotrope pour que l'amplitude des sauts à travers les ondes $\lambda_{5,6}$ soit non-nulle (voir paragraphe 2.2.1.1). Nous avons choisi les valeurs initiales montrées par le tableau 2.1, en notant cette configuration sur la base du tube à choc de Sod le “cas 1”. Une configuration de double choc est obtenue quand les vitesses initiales impactent sur la discontinuité initiale, ce qui est imposé dans le cas 2. La double détente est générée quand le sens des vecteurs de vitesse est inversé. Ceci est réalisé dans le cas 3. On note que le nombre de Mach turbulent ainsi que l'anisotropie de la tension de Reynolds sont également très élevés dans les cas 2 et 3.

La longueur du domaine est de $L = 30m$. La position x_0 de la discontinuité initiale ainsi que le temps final du développement de l'écoulement instationnaire sont donnés dans le tableau 2.2. Ces valeurs assurent que les perturbations n'atteignent pas les extrémités du domaine d'intégration.

2.2.4.2 Quelques détails concernant la solution numérique

Nous allons effectuer des calculs avec les trois méthodes suivantes:

- la méthode de décomposition de différences de flux du système de convection entier exposée dans le paragraphe 2.2.2.1, qui est baptisée “FDS couplée” (pour Flux Difference Splitting),
- la méthode correspondante par décomposition de différences de variables du paragraphe 2.2.2.2, baptisée “VDS couplée” (pour Variable Difference Splitting),
- la méthode basée sur le pseudo-système de convection qui est la méthode de Roe modifiée pour tenir compte de l'énergie cinétique k avec transport des composantes de la tension de Reynolds comme scalaires passifs (paragraphe 2.2.3); la notation est “FDS découplée”.

Toutes les méthodes ainsi définies sont formellement d'une précision d'ordre un en espace. Le schéma explicite utilisé lors de la discrétisation est d'une précision temporelle de premier ordre. Nous utilisons un maillage avec $N = 500$ nœuds distribués uniformément pour tous les calculs. Avec cette résolution, le résultat n'a pas encore atteint la convergence. Le pas de temps est

	cas 1	cas 2	cas 3
$x_0 [m]$	14	14	15
$t [10^{-2} s]$	2.1	2.3	2.3

Tab. 2.2: Position de la discontinuité initiale et temps final du calcul instationnaire

constant au cours du calcul et il correspond à un nombre de CFL $\equiv \Delta t / \Delta x \max(|\lambda_i|)$ maximal de 0.5 (correspondant à une non-interaction des ondes).

Le codage des algorithmes pour ce test unidimensionnel a été effectué à l'aide du langage YORICK [147]. Puisqu'il s'agit d'un langage interprété, le code n'est pas optimisé; le temps de calcul n'est donc pas représentatif. Néanmoins, on constate que le schéma "VDS couplé" est légèrement plus économique que les méthodes FDS.

2.2.4.3 Résultats des calculs numériques

Cas1: Tube à choc de Sod modifié. Dans la solution du cas 1, une onde de raréfaction (associée à λ_8) se propage vers la gauche, un choc (λ_7) se déplace vers la droite suivi par les trois discontinuités de contact associées à λ_5 , $\lambda_{1...4}$ et λ_6 . La position des ondes est indiquée sur la figure 2.14 pour la distribution de la quantité de mouvement transversale obtenu par le schéma FDS couplé. Ces positions ont été obtenues en comparant le comportement des invariants respectifs. Sur la figure 2.15 on identifie les ondes associées à λ_5 et λ_6 à l'aide des invariants $u_t \pm R_{nt} / \sqrt{R_{nn}}$. La figure 2.16 montre l'analogie pour l'onde multiple $\lambda_{1...4}$, pour laquelle $p + \rho R_{nn}$ est invariant. Les ondes $\lambda_{5,6}$ qui sont une particularité de la fermeture du second ordre ont donc été clairement mises en évidence numériquement. Ceci peut être constaté pour les résultats obtenus par chacun des trois schémas numériques (voir figures 2.18 et 2.19). Par la variation des grandeurs tracées sur les figures 2.27 à 2.33, on remarque que les invariants déterminés dans le paragraphe 2.2.1 sont respectés par les trois résultats numériques.

La figure 2.17 qui montre la vitesse axiale est exemplaire pour la représentation numérique des ondes VNL. On constate d'abord la monotonie des résultats obtenus par les deux schémas couplés. Le solveur FDS découplé, par contre, génère un mauvais raccord à la fin de la détente λ_8 (visible également dans les courbes de pression 2.22, densité 2.20 et nombre de Mach 2.23) et après le choc λ_7 (également visible par la quantité de mouvement sur figure 2.21). Néanmoins, l'entropie (figure 2.28) est monotone dans les trois cas.

Les plus grandes différences de niveau sont visibles dans la région entre le choc et la discontinuité de contact $\lambda_{1...4}$ ($23m < x < 28m$). Notamment la pression et les corrélations doubles de vitesse (figures 2.24 à 2.26) varient selon le schéma utilisé. Ceci est très prononcé pour la grandeur R_{nn} / ρ^2 (figure 2.29) qui est invariant dans cette zone. Pourtant, on n'est pas capable de donner les valeurs de référence analytiques puisque la théorie du chemin linéaire ne représente qu'une approximation. De plus, dans ce cas, l'intensité du choc est très proche de la limite théorique de $\rho_r / \rho_l = 0.5$, ce qui indique que l'erreur associée à l'hypothèse du chemin linéaire est non-négligeable.

Cas2: Double-choc. Dans ce cas, la discontinuité de contact $\lambda_{1...4}$ reste stationnaire à x_0 . Dans chacune des deux directions opposées, un choc ($\lambda_{7,8}$) et une discontinuité de contact ($\lambda_{5,6}$) se déplacent de manière symétrique. La position des ondes est facilement repérée dans les résultats numériques correspondants montrés sur les figures 2.34 à 2.43. Le solveur FDS découplé produit des oscillations dramatiques pour toutes les grandeurs qui varient en traversant les ondes λ_5 et λ_6 (u_t , k , R_{tt} et R_{nt}). Ces oscillations sont confinées entre la position de ces deux ondes. De plus, elles n'ont pas de répercussion sur les autres variables du problème. Les schémas couplés,

par contre, ne donnent pas d'oscillations. La défaillance du schéma FDS découplé est due au fait que la différence des flux n'est pas décomposée par rapport aux champs caractéristiques 5 et 6. Dans ce cas, la contribution correspondante est suffisamment importante pour provoquer des oscillations. On note qu'il ne s'agit pas d'une instabilité à cause du pas de temps puisque les oscillations persistent avec ces amplitudes même avec un nombre de CFL réduit à 0.05. L'intensité des oscillations diminue quand on diminue le nombre de Mach turbulent du champ initial; elles disparaissent complètement si le tenseur de Reynolds est initialement isotrope (la forme des termes de production est telle qu'un champ isotrope avec $u_t = 0$ reste toujours isotrope).

Une perte de monotonie de la solution autour de la discontinuité initiale à x_0 est obtenue avec tous les schémas (voir la pression sur figure 2.38, la densité 2.34 et les corrélations doubles de vitesse 2.41 à 2.43). En ce point, la vitesse $\lambda_{1...4}$ s'annule et, par conséquent, la partie des flux associée à cette composante n'est pas décentrée par les trois schémas (voir aussi les résultats dans les références [132] et [139] qui ont un comportement similaire). Au premier pas du calcul, un mauvais raccord est créé qui n'est plus lissé en cours du calcul. En dissymétrisant légèrement les conditions initiales ou en utilisant une correction entropique (même si une correction n'est pas nécessaire d'un point de vue théorique, e.g. [125]) cette irrégularité disparaît.

Cas 3: Double-détente. Ce cas correspond au cas précédent sauf que les ondes λ_7 et λ_8 représentent des ondes de détente. Les champs caractéristiques vraiment non-linéaires propagent donc une solution régulière. Par conséquent, la solution exacte ne dépend pas des relations de Rankine-Hugoniot généralisées, les relations données dans le paragraphe 2.2.1 étant exactes. Néanmoins, la complexité des invariants de Riemann rend délicate une solution analytique.

Les résultats numériques sont montrés sur les figures 2.46 à 2.53. On constate principalement le même comportement qu'auparavant: le schéma découplé produit des oscillations à cause des ondes $\lambda_{5,6}$, les méthodes FDS couplé et VDS couplé donnent des résultats essentiellement monotones; toutes les méthodes produisent une anomalie autour de la position de la discontinuité initiale.

2.2.4.4 Conclusions des tests quasi-monodimensionnels

Les deux schémas que nous avons proposés basés sur le système de convection entier de la fermeture du second ordre donnent des résultats monotones sauf pour le cas où une vitesse caractéristique s'annule (un défaut souvent constaté dans la littérature). Les ondes linéairement dégénérées $\lambda_{5,6}$ ont été distinguées numériquement et leur influence sur la solution a été démontrée dans un cas avec un nombre de Mach turbulent important. Plus particulièrement, le solveur basé sur le pseudo-système de convection proche des équations d'Euler peut admettre des oscillations très marquées au voisinage des ondes $\lambda_{5,6}$. Ceci se produit dans le cas de la double-détente et du double-choc. Ces deux cas ne sont pas purement académiques puisqu'ils représentent la situation avant ou derrière un obstacle au cours d'un calcul multidimensionnel, où – à cause de l'initialisation par exemple – la vitesse n'est pas alignée à la paroi [148].

2.2.5 Augmentation de la précision spatiale

Jusqu'ici, la façon de construire un schéma adapté pour représenter la propagation des ondes du système de convection a été discutée. Pour cela, on a considéré trois points de discrétisation (en monodimensionnel), ce qui constitue une erreur de troncature $\mathcal{O}(\Delta x)$, donc une méthode assez dissipative. Pour augmenter la précision spatiale, on se sert de la méthode MUSCL de van Leer [149], qui est basée sur l'idée de remplacer la distribution constante par cellule dans le schéma de Godunov par une distribution linéaire voir quadratique. Le problème de Riemann à l'interface entre deux cellules C_i et C_j est ainsi résolu en utilisant les valeurs interpolées $\tilde{Q}_{ij}$ et $\tilde{Q}_{ji}$ à la place de moyennes par cellule $\tilde{Q}_i$ et $\tilde{Q}_j$. Les formules pour les fonctions de flux numériques établies ci-dessus restent donc valables en effectuant un changement de variables ($\tilde{Q}_i \rightarrow \tilde{Q}_{ij}$, $\tilde{Q}_j \rightarrow \tilde{Q}_{ji}$).

Sur notre maillage non-structuré, l'interpolation des variables s'écrit d'après l'étude de Steve [150]:

$$\begin{aligned}\vec{Q}_{ij} &= \vec{Q}_i + \frac{1}{4}\Psi \left(2 \nabla \vec{Q}_i \vec{n}_{ij} - \left(\vec{Q}_j - \vec{Q}_i \right), \vec{Q}_j - \vec{Q}_i \right) \\ \vec{Q}_{ji} &= \vec{Q}_j - \frac{1}{4}\Psi \left(2 \nabla \vec{Q}_j \vec{n}_{ij} - \left(\vec{Q}_j - \vec{Q}_i \right), \vec{Q}_j - \vec{Q}_i \right) \quad ,\end{aligned}\quad (2.64)$$

où $\nabla \vec{Q}_i$ représente le vecteur de gradients des variables $\vec{Q}$ évalué sur la cellule C_i . Ces gradients sont calculés à l'aide de la représentation linéaire par élément fini qui est utilisée pour discrétiser les termes visqueux (voir le paragraphe 2.3). La valeur pour la cellule C_i est obtenue par une moyenne des valeurs sur les triangles T_j appartenant à C_i , pondérée par la surface, à savoir:

$$\nabla \vec{Q}_i = \frac{1}{V_{C_i}} \sum_{T_j \in C_i} \frac{V_{T_j}}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} \vec{Q}_{jk} \nabla N_{jk} \quad , \quad (2.65)$$

V_{C_i} étant le volume de la cellule C_i , V_{T_j} le volume de l'élément T_j , n_s le nombre de sommets d'un élément et ∇N_{jk} le gradient de la fonction test du triangle T_j évalué au sommet k .

L'interpolation selon la relation (2.64) est demi-décentrée, où Ψ est la fonction "minmod" d'après Roe:

$$\Psi(a, b) = \max(|a|, |b|) \cdot (\text{sign}(a) + \text{sign}(b)) \quad . \quad (2.66)$$

Cette fonction, dite "limiteur", assure que l'interpolation ne crée pas d'extrêma entre les nœuds P_i et P_j en effectuant une transition graduelle entre un schéma d'ordre deux (dans les zones régulières) et d'ordre un (en voisinage des forts gradients). Dans le cadre de cette étude, l'interpolation est alors effectuée sur les variables pseudo-conservatives $\vec{Q}$.

Afin de démontrer l'effet de l'amélioration de la précision spatiale, nous avons effectué les calculs du paragraphe précédent en intégrant l'interpolation MUSCL dans les trois schémas numériques. Nous avons diminué le nombre de nœuds à $N = 200$ afin de permettre une meilleure distinction des résultats. Nous remarquons que l'utilisation d'un schéma d'ordre deux en espace en conjonction avec une discrétisation temporelle d'ordre un nécessite la diminution du nombre de CFL par rapport au cas précédent. Nous avons ainsi effectué les calculs de ce paragraphe à $\text{CFL} = 0.15$.

Sur les figures 2.54 à 2.57 nous comparons les résultats obtenus avec et sans l'interpolation MUSCL pour le cas du tube à choc de Sod modifié (cas 1). Les figures 2.54 et 2.55 montrent les variations de densité et de la corrélation R_{nn} calculées avec le schéma FDS couplé. L'interpolation améliore visiblement la représentation des discontinuités. Par contre, une légère perte de monotonie à la fin de la 8-détente ainsi qu'autour de la discontinuité de contact $\lambda_{1...4}$ est provoquée par la méthode MUSCL.

En utilisant le schéma de décentrement FDS découplé (figures 2.56 et 2.57), la procédure d'interpolation accentue le comportement non-monotone qui a déjà été observé avec une précision d'ordre un.

2.2.6 La situation multi-dimensionnelle

Dans les cas tests effectués jusqu'ici, un bilan des équations de transport a été effectué dans une seule direction spatiale. Quand l'écoulement est bidimensionnel, par contre, une solution exacte du problème de Riemann linéarisé ne peut plus être calculée. Le degré de liberté des ondes caractéristiques devient infini puisqu'elles peuvent prendre toutes les directions dans le plan (x, y) [151]. Un décentrement exact des flux devrait donc tenir compte de la direction angulaire des vitesses caractéristiques dans un cas multidimensionnel au lieu d'être basé simplement sur le signe des caractéristiques comme dans le cas monodimensionnel. A l'heure actuelle, la recherche des schémas de décentrement vraiment multidimensionnels (voir les références [151, 152] pour un résumé de la littérature dans le cadre des équations d'Euler) n'a pas encore abouti à une méthode suffisamment efficace pour succéder aux approches basées sur un découplage des opérateurs.

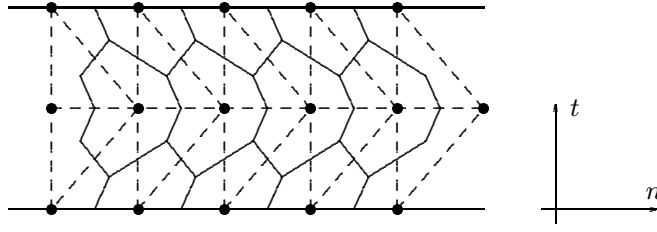


Fig. 2.6: Forme géométrique des cellules d'intégration (traits solides) et des triangles (traits discontinus) du maillage non-structuré utilisé pour le calcul du problème de Riemann.

Malgré certains défauts, nous allons dans notre étude considérer le problème multidimensionnel comme une succession de problèmes de Riemann localement monodimensionnels à chaque interface de la cellule. Les fonctions de flux numériques restent donc les mêmes que celles développées dans le cas unidimensionnel. Ce découplage des flux de différentes facettes de la cellule d'intégration introduit une dépendance de l'orientation du maillage dans la solution. Quand la vitesse de l'écoulement est oblique à une interface, une diffusion supplémentaire est créée [123, pp. 479-482].

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre, la technique de résolution basée sur le système de convection entier (FDS couplé, VDS couplé) n'a pas encore été testée rigoureusement dans des écoulements multidimensionnels. Nous avons effectué les calculs en plusieurs dimensions présentés par la suite en utilisant le schéma FDS découplé qui a été programmé sur la base du logiciel NATURng [134]. La nouvelle version est appelée "NATURng-RSM" (Reynolds Stress Model).

Nous considérons comme test de la représentation numérique du système de convection le problème de Riemann sur un maillage bidimensionnel. Dans le cadre d'une méthode structurée, où les cellules d'intégration sont quadrilatérales, le maillage peut être arrangé de telle sorte que les facettes sont alignées avec les axes $\vec{n}$ et $\vec{t}$ du problème de Riemann. Dans ce cas, la solution doit être équivalente au calcul monodimensionnel (voir également l'analyse dans la référence [153, pp. 37-39]). Dans notre cas, par contre, les volumes finis construits à partir de la triangulation ont une forme polygonale non-déterminée. Sur la figure 2.6 nous montrons schématiquement la forme géométrique des cellules d'intégration du maillage utilisé pour les calculs du problème de Riemann. Les nœuds sont distribués en trois lignes de 200; la triangulation est symétrique par rapport à la ligne centrale. La contribution des flux à travers les facettes obliques sur le bilan dans la direction axiale ($\vec{n}$) ne s'annule pas forcément. L'effet diffusif dû au traitement localement monodimensionnel du problème de Riemann en deux dimensions peut donc intervenir. De plus, la discrétisation centrée du terme source en deux dimensions ne peut pas donner une solution monodimensionnelle. La molécule du calcul dépend évidemment de la triangulation qui n'est pas unique en général. Dans l'exemple de la figure 2.6, la triangulation introduit un biais vers l'amont dans la contribution des termes sources sur les cellules centrales.

Afin de permettre le calcul des cas quasi-monodimensionnels sur un maillage bidimensionnel, une condition de périodicité est imposée sur les frontières supérieure et inférieure. Celle-ci consiste à moyenner le bilan de flux de deux cellules qui se trouvent à une position opposée sur les frontières (voir le paragraphe 2.5.4).

Sur les figures 2.58 à 2.63 nous comparons les résultats obtenus avec le code NATURng-RSM avec ceux du paragraphe 2.2.4 pour le cas du tube à choc de Sod modifié (cas 1). Les figures 2.58 à 2.60 montrent les variations de densité, de vitesse axiale et de la corrélation R_{nn} calculées avec les schémas de précision de premier ordre en espace et en temps. La perte de monotonie du schéma FDS découplé n'est pas observée en deux dimensions; en effet, les résultats obtenus par NATURng-RSM sur maillage non-structuré sont monotones. Ceci semble confirmer l'influence diffusive de ce type de maillage quand on décentre les flux de manière localement monodimensionnelle.

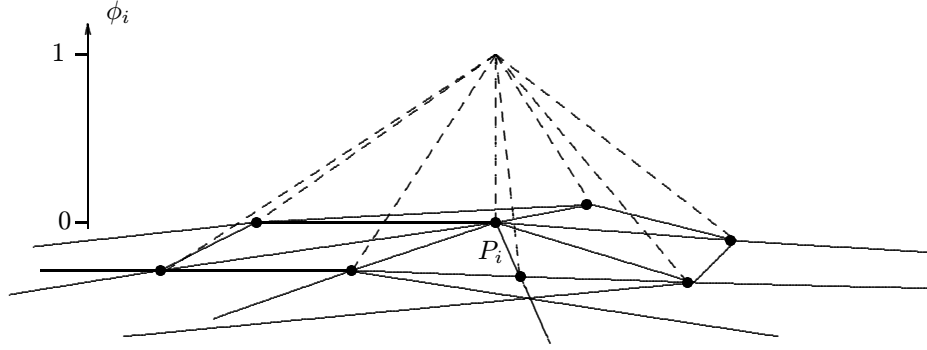


Fig. 2.7: Valeur de la fonction de base linéaire ϕ_i correspondante au nœud P_i .

En utilisant l'interpolation MUSCL, les résultats du calcul bidimensionnel sont marqués par de légères irrégularités analogues au calcul monodimensionnel (figures 2.62 à 2.63). Néanmoins, la perte de monotonie à la fin de la 8-détente est moins accentuée dans les distributions obtenues à l'aide de NATURng-RSM.

2.3 Traitement des termes visqueux

Il s'agit ici de définir la discrétisation des termes du second membre de l'équation de bilan (2.3) qui est constituée des intégrales du vecteur des flux $\vec{R}$ et des termes sources $\vec{S}$. Ces deux contributions $\vec{R}$ et $\vec{S}$ sont abusivement appelés termes visqueux. Pourtant, ils contiennent également les expressions qui ont été éliminées du système de convection (contraintes turbulentes, production d'énergie turbulente) ainsi que des corrélations modélisées d'origine non-visqueuse (pression-déformation, flux de masse turbulent).

L'association entre la représentation par élément des termes du second membre de (2.3) et le bilan des équations calculé pour un point P_i est effectuée par la fonction de base ϕ_i . Elle est linéaire par élément triangulaire T_j (voir la figure 2.7), à savoir:

$$\phi_i(\vec{x}) \Big|_{T_j} = N_{ji}(\vec{x}) \quad , \quad (2.67)$$

où les N_{ji} sont des fonctions géométriques des positions des sommets du triangle T_j (par exemple [154]). La discrétisation du champ des variables $\vec{Q}$ sur les triangles constituant le domaine $\mathcal{D}$ s'écrit:

$$\vec{Q}(\vec{x}) \Big|_{T_j} = \sum_{k=1}^{n_s} \vec{Q}_k \cdot N_{jk}(\vec{x}) \quad . \quad (2.68)$$

Puisque les fonctions de base $N_{jk}(\vec{x})$ sont linéaires, les gradients spatiaux des variables sont constants par élément, à savoir:

$$\nabla \vec{Q} \Big|_{T_j} = \sum_{k=1}^{n_s} \left\{ \vec{Q}_k \cdot \nabla N_{jk} \right\} \quad . \quad (2.69)$$

Avec ces simples ingrédients, il est possible de construire un schéma centré pour calculer les intégrales du vecteur des flux $\vec{R}$ ainsi que le terme source $\vec{S}$.

2.3.1 Le vecteur des flux

Le vecteur des flux “visqueux” $\vec{R}$ associé au pseudo-système de convection (2.57) et (2.58), ayant comme vecteur de variables $\vec{Q} = [\rho, \rho \vec{v}, \rho e_T, \rho k, \rho R_{11}, \rho R_{22}, \rho R_{12}, \rho \varepsilon]^T$ s’écrit :

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau - \rho R \\ \vec{v}(\tau - \rho R) + \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t \gamma}\right) c_p \nabla T + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_R}\right) \nabla k - p < \vec{v}'' > \\ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_R}\right) \nabla k \\ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_R}\right) \nabla R_{11} \\ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_R}\right) \nabla R_{22} \\ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_R}\right) \nabla R_{12} \\ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right) \nabla \varepsilon \end{bmatrix} . \quad (2.70)$$

Les notations “primes” et “barre” indiquant les fluctuations et la moyenne ont été supprimées sauf pour le vecteur de flux de masse turbulent $< \vec{v}'' > \equiv [< u'' >, < v'' >]^T$ (à noter que nous avons mis le flux de masse turbulent à zéro dans toutes les simulations présentées par la suite). On rappelle que τ désigne la moyenne du tenseur des contraintes visqueuses (1.2).

L’intégrale des flux visqueux de la formulation hybride (2.3) peut maintenant être discrétisée :

$$- \int_{\mathcal{D}} \vec{R} \nabla \phi_i dv = - \sum_{T_j \in C_i} \nabla N_{ji} \int_{T_j} \vec{R} \Big|_{T_j} dv , \quad (2.71)$$

où les flux sont exprimés par la distribution linéaire des variables :

$$\vec{R} \Big|_{T_j} = \vec{R} \left(\vec{Q}(\vec{x}) \Big|_{T_j} \right) . \quad (2.72)$$

L’évaluation des intégrales dans la formule (2.71) revient à intégrer des polynômes de $\vec{x}$, ce qui peut être effectué grâce aux formules standard [154].

2.3.2 Les termes sources

Les termes sources $\vec{S}$ du second membre associé au pseudo-système de convection s’écrivent :

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{0} \\ 0 \\ \frac{1}{2} P_{ii} \\ P_{11} \\ P_{22} \\ P_{12} \\ \frac{1}{2} P_{ii} \cdot C_{\varepsilon 1} \cdot \frac{\varepsilon}{k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{0} \\ 0 \\ -\rho \varepsilon + < p' u''_{k,k} > - < \vec{v}'' > \cdot \nabla p \\ \rho \Pi_{11} - \frac{2}{3} \rho \varepsilon - 2 < u'' > \cdot p_{,x} \\ \rho \Pi_{22} - \frac{2}{3} \rho \varepsilon - 2 < v'' > \cdot p_{,y} \\ \rho \Pi_{12} - < u'' > \cdot p_{,y} - < v'' > \cdot p_{,x} \\ -C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + S_{\varepsilon 1} + S_{\varepsilon 2} \end{bmatrix} , \quad (2.73)$$

où la pression-dilatation $\langle p' u''_{k,k} \rangle$, la production enthalpique $\langle v'' \rangle \nabla p$, la pression-déformation Π_{ij} ainsi que les termes sources de la dissipation $S_{\varepsilon 1}$ et $S_{\varepsilon 2}$ dépendent du choix du modèle.

La discrétisation du terme correspondant du bilan (2.3) donne:

$$\int_{\mathcal{D}} \vec{S} \phi_i dv = \sum_{T_j \in C_i} \int_{T_j} \vec{S}(\vec{x}) \cdot \mathbf{N}_{ji} dv \quad . \quad (2.74)$$

Afin de faciliter l'évaluation de l'intégrale, la fonction $\vec{S}(\vec{x})$ est remplacée par sa moyenne sur l'élément T_j :

$$\vec{S}(\vec{x}) = \vec{S}_{T_j} \equiv \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} \vec{S}(\vec{Q}_k) \quad . \quad (2.75)$$

L'intégrale (2.74) devient maintenant:

$$\sum_{T_j \in C_i} \int_{T_j} \vec{S}(\vec{x}) \cdot \mathbf{N}_{ji} dv = \sum_{T_j \in C_i} \vec{S}_{T_j} \cdot \frac{1}{n_s} \cdot V_{T_j} \quad . \quad (2.76)$$

Cette simplification revient à remplacer la matrice de la masse de l'approche par éléments finis par la matrice d'identité. On parle de "concentration de la masse" (*mass-lumping*, voir par exemple [154, p. 238]). L'assemblage des termes sources dans un code de calcul est considérablement accéléré avec cette méthode.

2.4 Une méthode de résolution implicite

Pour les premiers tests de notre méthode, la discrétisation temporelle a été effectuée selon un schéma d'Euler explicite. La simplicité de cette méthode permet d'obtenir assez rapidement un code opérationnel pour des raisons de validation. La plupart des calculs effectués par la suite portent sur des écoulements stationnaires. La formulation temporelle constitue donc un moyen d'itération vers un état stationnaire à partir du champ initial. Afin de pouvoir effectuer des calculs plus exigeants, on cherche à augmenter la vitesse de convergence de la méthode. Cela fait l'objet de ce paragraphe. On a introduit une phase implicite, linéarisée qui est résolue itérativement avec une méthode de gradients conjugués.

2.4.1 Construction du résidu implicite linéarisé

Nous réécrivons le bilan d'équations pour une cellule C_i :

$$\int_{C_i} \partial_t \vec{Q} dv = -\vec{\text{Res}}_i \quad , \quad (2.77)$$

en définissant le résidu $\vec{\text{Res}}_i$ comme la somme des intégrales des flux et des termes sources:

$$\vec{\text{Res}}_i \equiv \oint_{\Gamma_{C_i}} \vec{F} \vec{n}_{\Gamma_{C_i}} d\sigma - \oint_{\Gamma} \vec{R} \vec{n}_{\Gamma} \phi_i d\sigma + \int_{\mathcal{D}} \vec{R} \nabla \phi_i dv - \int_{\mathcal{D}} \vec{S} \phi_i dv \quad . \quad (2.78)$$

En effectuant l'intégration du terme temporel, on obtient la relation pour l'incrément $\delta \vec{Q} \equiv \vec{Q}^{n+1} - \vec{Q}^n$:

$$\delta \vec{Q}_i \frac{V_{C_i}}{\Delta t} = -\vec{\text{Res}}_i \quad . \quad (2.79)$$

En évaluant le résidu à l'étape précédente (n), le pas de temps maximal admissible est limité par un critère de stabilité du type Courant-Friedrichs-Levy, qui dans notre cas d'un système convectif-diffusif s'écrit

$$\Delta t < \min_{k=1}^2 \left(\frac{\Delta x_k^2}{\max(\lambda_k) \cdot \Delta x_k + 2\gamma / (\rho Pr Re)} \right) \quad , \quad (2.80)$$

Δx_k étant la dimension d'une cellule dans la direction k , $\max(\lambda_k)$ est la plus grande vitesse caractéristique dans cette direction. La limite donnée par la relation (2.80) est en pratique assez restrictive.

Afin d'accélérer la vitesse de convergence, on souhaite permettre une meilleure propagation d'information entre les points discrets du domaine d'intégration. En utilisant un schéma implicite pour la discrétisation temporelle du système de base (2.79),

$$\delta \vec{Q}_i \frac{V_{C_i}}{\Delta t} = -\vec{\text{Res}}^{n+1} \quad , \quad (2.81)$$

le vecteur de solution $\delta \vec{Q}$ est couplé en espace. La valeur limite de stabilité pour le pas de temps qui s'applique à ce schéma est en théorie infinie. Puisque les flux sont des opérateurs non-linéaires, la résolution du système totalement implicite est trop complexe. On est donc amené à effectuer une linéarisation des flux implicites. Dans la mesure où on ne s'intéresse qu'aux résultats stationnaires, il nous suffit de considérer un schéma d'ordre un en temps.

Un développement limité de Taylor pour le résidu donne

$$\vec{\text{Res}}^{n+1} = \vec{\text{Res}}^n + \left[\frac{\partial \vec{\text{Res}}}{\partial t} \right]^n \cdot \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad , \quad (2.82)$$

où on peut réécrire la dérivée temporelle sous la forme

$$\left[\frac{\partial \vec{\text{Res}}}{\partial t} \right]^n = \left[\frac{\partial \vec{\text{Res}}}{\partial \vec{Q}} \right]^n \left[\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} \right]^n \quad . \quad (2.83)$$

Un développement limité de Taylor pour l'argument $\vec{Q}^{n+1}$,

$$\vec{Q}^{n+1} = \vec{Q}^n + \left[\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} \right]^n \cdot \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad , \quad (2.84)$$

permet d'obtenir l'expression

$$\vec{\text{Res}}^{n+1} = \vec{\text{Res}}^n + \left[\frac{\partial \vec{\text{Res}}}{\partial \vec{Q}} \right]^n \cdot \delta \vec{Q} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad . \quad (2.85)$$

L'insertion dans le système (2.81) donne la formulation implicite, linéarisée:

$$\delta \vec{Q} \left[\frac{V_{C_i}}{\Delta t} + \left[\frac{\partial \vec{\text{Res}}_i}{\partial \vec{Q}} \right]^n \right] = -\vec{\text{Res}}_i^n \quad . \quad (2.86)$$

2.4.2 Prépondérance des flux convectifs

On suppose que le transport par convection est le phénomène décisif pour la limite de stabilité, car on s'intéresse notamment aux écoulements à haute vitesse où les flux convectifs sont généralement dominants. On se limite alors à effectuer la construction des flux implicites pour les moments turbulents sur la base du système convectif. Si on interprète la jacobienne des flux comme un moyen d'accélération de propagation numérique d'information, la méthode actuelle sert d'accélérer une partie importante de l'information.

La motivation pour traiter les flux diffusifs et les termes sources, qui apparaissent dans les équations des grandeurs turbulentes, d'une manière complètement explicite, est double.

- Ces termes dépendent des diverses méthodes de modélisation choisies. Par conséquent, la linéarisation devrait être effectuée pour chaque combinaison possible. Afin d'obtenir une modularité maximale du code de calcul, on préfère garder une discrétisation explicite pour les termes modélisés.

- La présence des termes sources importants dans la partie implicite de l'algorithme peut gêner la convergence. Le problème n'est pas facilement accessible analytiquement, mais il existe des publications [56, 155] qui indiquent que les termes sources de signe positif peuvent empêcher la convergence. Il est difficile de séparer ces termes selon leur signe dans le cadre d'un modèle au second ordre. Des essais dans cette direction n'ont pas été entreprises.

Dans les équations de Navier-Stokes moyennes, au contraire, il ne se trouve aucun terme source et les termes diffusifs et turbulents sont fermés à l'exception du flux de masse turbulent. On dispose donc de la matrice jacobienne définitive pour ces flux par rapport aux variables aérodynamiques. Les expressions sont données dans la référence [115]. On assemble donc les contributions visqueuses et turbulentes du sous-système principal associé aux variables $\vec{Q}^1 = [\rho, \rho u, \rho v, \rho e_T, \rho k]^T$. Le système des équations discrétisées s'écrit alors symboliquement:

$$\delta \vec{Q} \left[\bar{I} \frac{V_{C_i}}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{n_v} \left[\frac{\partial \mathcal{F}_{ij}}{\partial \vec{Q}} \right]^n \cdot \vec{n}_{ij} \cdot \delta \Gamma_{C_{ij}} + \sum_{T_j \in C_i} \nabla N_{ji} \int_{T_j} \left[\frac{\partial \vec{R}^1}{\partial \vec{Q}^1} \right]_{T_j}^n dv \right] = -\vec{\text{Res}}_i^n, \quad (2.87)$$

où $\vec{R}^1$ constitue les premières 5 lignes du vecteur des flux visqueux $\vec{R}$ donné par la relation (2.70).

2.4.3 Précision spatiale

Par la méthode d'interpolation à l'ordre deux des variables qui servent à calculer les flux convectifs (MUSCL), le domaine de dépendance spatiale est élargi par rapport à un schéma d'ordre un. Dans une situation monodimensionnelle, la solution est donc couplée sur cinq points, tandis que le schéma d'ordre un ne couple que trois nœuds. La conséquence pratique est l'augmentation considérable du nombre d'éléments non-nuls de la matrice jacobienne des flux implicites. Cela n'augmente pas seulement la taille de mémoire d'un calcul mais aussi sensiblement le temps de calcul nécessaire pour l'assemblage des blocs supplémentaires et le temps pour la solution itérative du système linéaire. Pour un calcul stationnaire, il est suffisant d'obtenir la précision spatiale souhaitée à l'instant final, car l'opérateur implicite tend vers zéro.

Une méthode implicite à l'ordre deux en espace n'est donc justifiée que si les critères suivants sont remplis:

- la taille de mémoire supplémentaire ne pose pas un problème pour la configuration de la machine,
- la prise en compte des couplages supplémentaires permet une convergence plus rapide.

Nous allons calculer la phase implicite de notre schéma sur la base de la formulation de précision d'ordre un en espace.

2.4.4 Couplage entre les équations

La matrice des flux implicites représente un couplage entre les solutions de différents nœuds en espace aussi bien qu'un couplage entre les différentes variables du problème. Le premier couplage détermine le nombre des blocs non-nuls de la matrice implicite (en explicite, il n'y a que la diagonale). La deuxième donne la taille de chaque bloc quadratique. Dans le paragraphe précédent on a exposé la façon de réduire le nombre de blocs à calculer et à stocker à l'aide d'un schéma d'ordre un. Ici, on se pose la même question concernant la taille des blocs individuels.

En général, chaque bloc est constitué de n^2 éléments. où n est le nombre des équations de transport. Un découplage partiel des équations est souhaité pour deux raisons:

- une résolution successive de deux sous-systèmes (si possible) permet de réduire le besoin de mémoire d'un calcul, car le tableau correspondant peut être réutilisé,

- puisque la taille varie quadratiquement avec le nombre des équations de chaque sous-système, on économise du temps de calcul proportionnel à la réduction de la taille du plus grand système.

Est-il justifié de découpler le système des équations de transport dans notre cas? La réponse est une conséquence du fait qu'on considère essentiellement les flux convectifs pour la formulation implicite. Le découplage au niveau du traitement du pseudo-système de convection (paragraphe 2.2.3) se traduit également à la phase implicite, puisque les grandeurs $\{\rho R_{11}, \rho R_{22}, \rho R_{12}, \rho \varepsilon\}$ n'interviennent pas dans le système principal associé au vecteur $\vec{Q}^1$ à l'étape $(n+1)$. Par conséquent, il est possible d'effectuer une résolution successive.

Pour les flux discrétisés, l'algorithme de résolution peut donc être décrit de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
 & n_{it} \left[\begin{aligned} & \delta \vec{Q}^1 \left[\bar{I} \frac{V_{C_i}}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{n_v} \left[\frac{\partial \mathcal{F}_{ij}^1}{\partial \vec{Q}^1} \right]^n \vec{n}_{ij} \delta \Gamma_{C_{ij}} + \sum_{T_j \in C_i} \nabla N_{ji} \int_{T_j} \left[\frac{\partial \vec{R}^1}{\partial \vec{Q}^1} \right]_{T_j}^n dv \right] = -\text{Res}_i^n \Big]^1 \\ & \longrightarrow \delta \vec{Q}^1 \end{aligned} \right. \\
 & \left[\begin{aligned} & n_{scal} \\ & \delta Q^{1+l} \left[\bar{I} \frac{V_{C_i}}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{n_v} \left[\frac{\partial \mathcal{F}_{ij}^{1+l}}{\partial Q^{1+l}} \right]^n \vec{n}_{ij} \delta \Gamma_{C_{ij}} \right] = -\text{Res}_i^n \Big]^{1+l} - \sum_{j=1}^{n_v} \left[\frac{\partial \mathcal{F}_{ij}^{1+l}}{\partial \vec{Q}^1} \right]^n \vec{n}_{ij} \delta \Gamma_{C_{ij}} \delta \vec{Q}^1 \\ & \longrightarrow \delta Q^{1+l} \end{aligned} \right. \\
 & l = 1 \\
 & it = 1
 \end{aligned} \tag{2.88}$$

où $\vec{\text{Res}}_i^n \Big]^1$ correspond au vecteur du résidu explicite pour le système principal, $\text{Res}_i^n \Big]^{1+l}$ au résidu pour le lième scalaire; n_{it} correspond au nombre d'itérations, n_{scal} au nombre de variables qui sont traitées comme des scalaires passifs ($n_{scal} = 4$ dans la cas bidimensionnel).

On remarque que les grandeurs considérées comme des scalaires passifs n'influencent pas le système principal, mais en même temps l'influence du système principal sur les scalaires existe. La structure des blocs de la matrice implicite peut être exprimée symboliquement:

$$\frac{\partial \vec{\text{Res}}^{tot}}{\partial \vec{Q}^{tot}} = \left[\begin{array}{c|cc} \left[\frac{\partial \vec{\text{Res}}^1}{\partial \vec{Q}^1} \right] & & \\ \hline \vec{h}_2^T & d_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \vec{h}_{1+n_{scal}}^T & 0 & d_{1+n_{scal}} \end{array} \right], \tag{2.89}$$

où

$$\vec{h}_{1+l} \equiv \left[\frac{\partial \text{Res}^{1+l}}{\partial \vec{Q}^1} \right], \quad d_{1+l} \equiv \left[\frac{\partial \text{Res}^{1+l}}{\partial Q^{1+l}} \right]. \tag{2.90}$$

Les contributions extra-diagonales dues au vecteur $\vec{h}_{1+l}$ constituent une partie du second membre du bilan pour une variable Q_{1+l} (voir schéma (2.88)) puisque les incréments $\delta \vec{Q}^1$ sont déjà connus

à l'instant de son assemblage. Les détails de la construction de la matrice implicite pour un scalaire sont donnés dans l'annexe E.1.

2.4.5 Résolution itérative du système linéaire

D'une manière symbolique, chaque système dans l'algorithme (2.88) s'écrit

$$\overline{\overline{A}} \vec{x} = \vec{b} \quad , \quad (2.91)$$

où la matrice $\overline{\overline{A}}$ et le vecteur $\vec{b}$ sont fonctions des grandeurs à l'étape précédente (n) uniquement et $\vec{x}$ est le vecteur de la solution à l'étape ($n+1$). La structure de la matrice $\overline{\overline{A}}$ est non-symétrique et creuse. Une résolution directe étant trop coûteuse, on applique un algorithme itératif au système algébrique linéaire (2.91).

Dans le code générique NATURng de Hallo [134], la méthode de résolution principalement utilisée était l'algorithme CGS conçu par Sonneveld [156] avec un préconditionnement de la matrice $\overline{\overline{A}}$ par l'algorithme SSOR de Axelsson [157]. Récemment, Van der Vorst [158] a proposé une variante de l'algorithme CGS qui s'appelle Bi-CGSTAB. Chuang et Chieng [159] ont montré sa supériorité en termes de temps de calcul et de régularité de convergence pour une application proche de celle de l'étude présente. Nous utilisons l'algorithme Bi-CGSTAB avec le préconditionnement SSOR. Le système (2.91) est d'abord transformé par multiplication avec des matrices de préconditionnement K_1 et K_2 de manière suivante:

$$K_1^{-1} \overline{\overline{A}} K_2^{-1} (K_2 \vec{x}) = K_1^{-1} \vec{b} \quad . \quad (2.92)$$

La matrice du système transformé $K_1^{-1} \overline{\overline{A}} K_2^{-1}$ doit être la plus proche possible de la matrice identité pour une convergence optimale et en même temps K_1 et K_2 doivent être suffisamment simples pour permettre une inversion rapide. La technique SSOR utilise le préconditionnement suivant:

$$\begin{aligned} K_1 &= (l + \Delta) \Delta^{-1} \\ K_2 &= \Delta + u \\ \Delta_{ii} &= A_{ii} - \sum_{i < j} A_{ij} \Delta_{jj}^{-1} A_{ji} \quad , \end{aligned} \quad (2.93)$$

où l et u sont les matrices triangulaires, inférieures et supérieures respectivement, de la matrice $\overline{\overline{A}}$. On remarque que Δ est construite telle que $\text{diag}(K_1 K_2) = \text{diag}(A)$. Le schéma de résolution itérative Bi-CGSTAB est ensuite appliqué au système transformé (pour les détails de l'algorithme on pourra se reporter à la référence [158]).

2.4.6 Quelques remarques sur la convergence de la méthode implicite

On définit d'abord une norme quadratique, relative du résidu d'une variable Φ :

$$r_\Phi \equiv \frac{\sqrt{\sum_i^N (\delta\Phi)^2}}{\sqrt{\sum_i^N \Phi^2}} \quad , \quad (2.94)$$

qui caractérise l'évolution du champ de Φ d'une itération à l'autre. Nous effectuons les calculs avec NATURng-RSM en simple précision.

Nous donnons par la suite deux exemples de convergence de notre méthode en opposant la performance du schéma explicite à celle du schéma implicite.

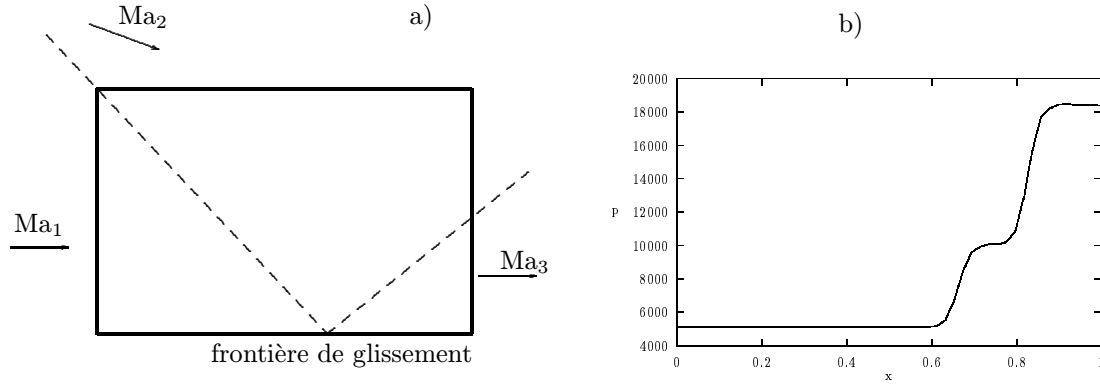


Fig. 2.8: a) Schéma de la configuration du calcul de la réflexion d'une onde de choc sur une paroi glissante. b) Courbe de pression obtenue sur le maillage à $N = 2000$ nœuds.

Couche de mélange compressible. Il s'agit du cas 3 de Goebel et Dutton [11] traité en détail dans le paragraphe 4.3.5. Nous montrons ici la courbe de convergence d'un résultat obtenu sur un maillage grossier de $N = 3920$ nœuds qui est raffiné dans la direction transversale autour du centre du domaine (rapport $\Delta y_{max}/\Delta y_{min} = 20$). Le champ initial est obtenu par l'extrapolation du profil d'entrée sur tout le domaine.

Le nombre de CFL utilisé est de 20 pour la méthode implicite et de 0.5 dans le calcul explicite. On a vérifié que les résultats obtenus par les deux discrétisations temporelles sont identiques pour toutes les grandeurs. Les courbes de convergence de l'équation de la masse volumique et de la tension normale sont montrés sur les figures 2.64 et 2.65. On constate que la vitesse de convergence est nettement plus élevée par la méthode implicite. Le gain en temps CPU pour ce cas test et ce jeux de paramètres est d'un facteur trois environ.

Réflexion d'une onde de choc sur une paroi glissante. On génère une onde de choc oblique avec un rapport de nombre de Mach de 2.4/1.65. Ce choc est réfléchi par une frontière de glissement (voir figure 2.8). Le maillage est constitué de 2000 nœuds distribués de manière homogène.

En utilisant encore une nombre de CFL de 20 en implicite et de 0.5 en explicite, on constate ici que la version explicite converge plus rapidement vers la solution (figures 2.66 et 2.67). En faisant varier le CFL du calcul implicite entre 5 et 200, on n'arrive pas à dépasser la vitesse de convergence de la version explicite (figure 2.68). Le nombre d'itérations nécessaire pour résoudre le système principal à chaque pas en temps semble être proportionnel au CFL dans ce cas. Pour vérifier, on a effectué un calcul analogue avec la version basé sur la fermeture de premier ordre ($k-\epsilon$ standard) de notre code. La figure 2.69 montre qu'avec cette configuration le calcul implicite n'apporte pas d'avantage non plus. A ce jour, on n'a pas entièrement compris ce comportement du solveur. Néanmoins, il semble établi qu'il ne s'agit pas d'une influence de la nouvelle méthode de traiter les équations de la tension de Reynolds.

2.5 Traitement des conditions aux limites

Dans des calculs avec le système des équations de mouvement d'un fluide, on rencontre principalement trois types de frontières différentes: les parois solides, les frontières libres et des plans de périodicité. Pour chacune de ces frontières, les conditions aux limites doivent fournir de l'information sur l'état des champs à l'extérieur du domaine d'intégration au calcul dans le domaine.

Afin de traiter cet échange d'information à travers une frontière libre du domaine d'une manière

	paroi solide	frontières libres		périodicité
		entrée	sortie; glissement	
Dirichlet	$\rho k, \rho R_{ij}, \rho \varepsilon$	$\rho, \rho \vec{v}, \rho k, \rho R_{ij}, \rho \varepsilon$	/	/
flux	$\rho, \rho \vec{v}, \rho e_T$	ρe_T	toutes	toutes

Tab. 2.3: Méthode d'application des conditions aux limites pour les différents types de frontière

consistante avec la propagation prescrite par le système des équations, nous utilisons la méthode des relations de compatibilité. Avec cette méthode basée sur le pseudo-système de convection, nous sommes capables de déterminer le nombre des variables pour lesquelles des valeurs “physiques” (e.g. fournies par l’expérience) sont imposées à la frontière; elle nous permet ensuite de calculer les valeurs des variables “numériques” qui sont nécessaires pour compléter le vecteur d’état à la frontière. Pour traiter les parois solides, nous invoquons une loi de paroi “universelle” qui permet de décrire l’action de la turbulence dans une zone pariétale sans effectuer un bilan des équations. Finalement, la condition de périodicité est réalisée par une simple sommation des flux de deux cellules localisées sur des lignes de périodicité opposées.

La réalisation pratique d’une certaine condition peut être effectuée de manière forte (condition de Dirichlet) en imposant la valeur de la variable associée ou de manière faible par l’assemblage d’un flux supplémentaire. Les conditions de flux sont souvent préférables du point de vue de la convergence d’un schéma notamment en utilisant une méthode implicite. Par contre, une valeur doit être fixe quelque part dans le domaine afin d’éviter un flottement du niveau des variables. Un résumé de notre choix du type d’application des conditions est donné dans le tableau 2.3.

Nous allons par la suite exposer la situation géométrique d’assemblage des flux à la frontière avant de donner les expressions pour le traitement des trois types de frontière.

2.5.1 La formulation du bilan à la frontière

Dans le cas où on applique une condition de Dirichlet, le bilan intégrale des équations pour une cellule C_i n’est pas utilisé. Dans le cas contraire, le traitement de la frontière constitue seulement une contribution au bilan des flux. Dans notre formulation intégrale donnée par l’équation (2.3), deux termes reçoivent une contribution de la frontière: l’intégrale des flux convectifs et l’intégrale de flux visqueux autour de la frontière du domaine. Pour les cellules faisant partie de la frontière Γ du domaine (figure 2.9 a)), on doit donc considérer les deux flux suivants:

- A travers du segment discret $\delta\Gamma_{C_{ie}}$ qui coïncide avec la frontière, un flux convectif $\mathcal{F}_{ie}$ entre le point P_i et l’extérieur du domaine doit être calculé et pris en compte dans le bilan de la cellule C_i (voir la figure 2.9 b)):

$$\oint_{\Gamma_{C_i} \cap \Gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}_{\Gamma_{C_i}} d\sigma = \mathcal{F}_{ie} \cdot \vec{n}_{ie} \cdot \delta\Gamma_{C_{ie}} \quad . \quad (2.95)$$

L’état à l’extérieur (“point” P_e) utilisé pour le calcul du flux $\mathcal{F}_{ie}$ est déterminé par une des méthodes montrées ci-dessous.

- Jusqu’à maintenant, le premier terme du second membre du bilan (2.3) n’a pas encore été considéré. Il est discrétisé de manière suivante:

$$\oint_{\Gamma} \vec{R} \cdot \vec{n}_{\Gamma} \phi_i d\sigma = \sum_{T_j \in C_i \cup \Gamma} \int_{\Gamma_j} \vec{R}(\vec{x}) \cdot \vec{n}_{j\Gamma} \cdot N_{ji} d\sigma \quad . \quad (2.96)$$

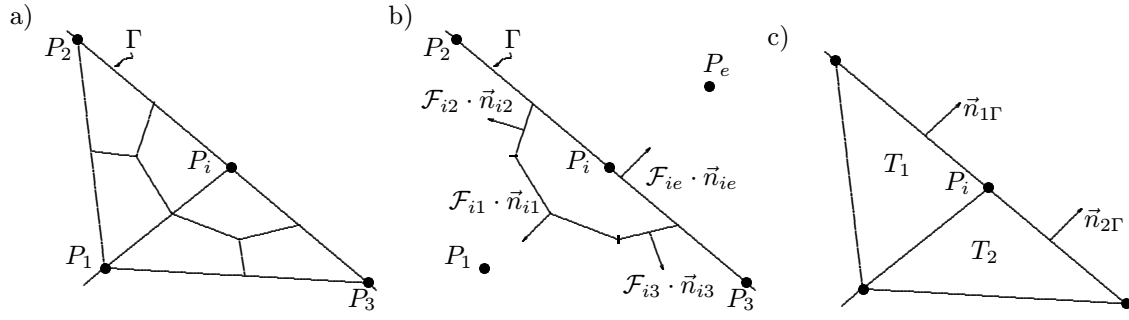


Fig. 2.9: a) Cellule P_i appartenant à la frontière Γ . b) Flux convectif $\mathcal{F}_{ie}$ correspondant au segment $\delta\Gamma_{C_{ie}}$ entre nœud P_i et P_e . c) Arrêts pariétaux appartenant aux triangles T_1 et T_2 et à la cellule C_i .

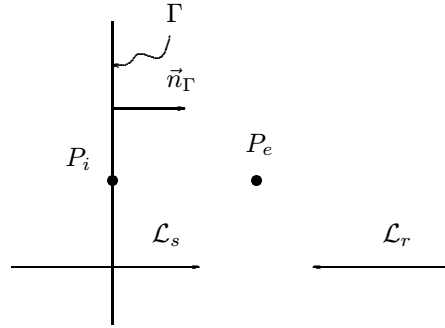


Fig. 2.10: Le système localement monodimensionnel d'ondes caractéristiques $\mathcal{L}$ à la frontière.

La notation est montrée sur la figure 2.9 c). Il s'agit donc de la somme des contributions des deux arrêts qui coïncident avec la frontière et qui font partie de la cellule C_i .

Nous verrons par la suite dans différentes configurations comment on obtient la valeur des variables utilisée pour le calcul des flux ou pour la condition de Dirichlet.

2.5.2 Les frontières libres

Les frontières libres sont caractérisées par le fait qu'elles séparent deux sous-espaces du milieu continu. Pour notre traitement, nous considérons la situation monodimensionnelle dans la direction normale à la frontière décrite par le pseudo-système de convection. Nous effectuons donc une projection du système caractéristique sur le vecteur normale qui est orienté vers l'extérieur (voir la figure 2.10). Chaque onde $\mathcal{L}_r^k$ rentrant au domaine, associée à une vitesse négative $\lambda^k < 0$, apporte une information de l'extérieur au point P_e voisin de la frontière. Son amplitude correspond à la valeur de la variable caractéristique W^k qui est ainsi déterminée. L'amplitude des ondes sortantes $\mathcal{L}_s^k$ est entièrement déterminée par le champ à l'intérieur du domaine. Leur valeur donne les autres variables caractéristiques au point P_e .

En pratique, nous sommes néanmoins intéressé à prescrire des conditions portant sur d'autres types de variables (e.g. les variables primitives comme la vitesse et la pression ou l'entropie et la pression totale). L'idée de la méthode des relations de compatibilité est de déduire des expressions pour les variables souhaitées à partir de la formulation caractéristique. Nous suivons le travail de Cambier *et al.* [160] en imposant une variable physique ϕ_{phys} pour chaque onde rentrante:

$$\phi_e^k = \phi_{phys}^k \quad k = 0 \dots n_{\lambda^-} \quad , \quad (2.97)$$

vitesse normale	configuration	condition physique
$-1 < \vec{v}\vec{n}_\Gamma/c < 0$	entrée subsonique	$\rho, u_n, u_t, k, R_{ij}, \varepsilon$
$\vec{v}\vec{n}_\Gamma/c < -1$	entrée supersonique	toutes
$\vec{v}\vec{n}_\Gamma = 0$	glissement	$u_n = 0$
$0 < \vec{v}\vec{n}_\Gamma/c < 1$	sortie subsonique	p
$1 < \vec{v}\vec{n}_\Gamma/c$	sortie supersonique	/

Tab. 2.4: Les configurations possibles aux frontières libres et le choix des conditions physiques.

où $n_{\lambda-}$ est le nombre d'ondes de vitesse négative. En considérant des ondes caractéristiques stationnaires $\partial_t \vec{W} = 0$, on obtient pour chaque onde sortante:

$$W_e^k = W^k(\vec{Q}_i) \quad \forall \quad \lambda_k > 0 \quad , \quad (2.98)$$

où $W^k(\vec{Q}_i)$ correspond à la valeur de la k ème variable caractéristique donnée par le schéma numérique au point P_i . Afin d'obtenir les valeurs des variables primitives $\vec{P}$ correspondantes, on effectue une transformation linéarisée par la relation $L^{-1} \cdot \Delta \vec{P} = \Delta \vec{W}$ en calculant les vecteurs propres L^{-1} par les valeurs évaluées au point P_i . Ceci nous mène au système des relations de compatibilité suivant:

$$\vec{l}^k(\vec{Q}_i) \cdot [\vec{P}_e - \vec{P}(\vec{Q}_i)] = 0 \quad \forall \quad \lambda_k > 0 \quad . \quad (2.99)$$

Avec les relations (2.97) et (2.99), l'état au point P_e est déterminé. La résolution du système (2.99) est effectuée selon la configuration de la frontière et selon le choix des variables physiques à imposer. Dans le tableau 2.4 nous montrons les variantes et les choix que nous avons retenus. Dans l'annexe E.2 les solutions pour les conditions numériques respectives sont données.

Ayant déterminé le vecteur de variables $\vec{Q}_e$, nous calculons ensuite les flux pariétaux de la même façon qu'à l'intérieur du domaine, i.e. en résolvant un problème de Riemann entre P_i et P_e (le flux convectif est alors donnée par les formules (2.60) et (2.63)) et en assemblant les flux visqueux $\vec{R}$ selon la formule (2.96). Dans le cas où on impose une condition de Dirichlet, celle-ci est donnée par l'état $\vec{Q}_e$.

Afin de valider notre traitement des frontières libres, nous avons effectué un test standard qui consiste à calculer la convection uniforme d'un tourbillon à travers la frontière. En régime supersonique et subsonique, notre méthode permet la structure de sortir du domaine sans être déformée. Ce calcul est décrit dans l'annexe F.

2.5.3 Le traitement des parois solides

2.5.3.1 Les effets physiques de la présence d'une paroi

La présence d'une paroi solide affecte l'écoulement de différentes manières. Nous citons trois effets cinématiques qui ont une grande importance pour le comportement du champ turbulent:

- La variation du cisaillement moyen introduit une très forte inhomogénéité de la turbulence dans la direction $\vec{n}_\Gamma$ normale à la paroi.
- L'imperméabilité de la paroi, qui se traduit par une fluctuation perpendiculaire nulle, constitue un effet de blocage. La conséquence est une redirection des fluctuations vers la direction tangentielle et un transfert d'énergie entre les composantes du tenseur de Reynolds.

- La condition d’adhérence (fluctuation tangentielle nulle) implique une forte influence de la viscosité puisque le nombre de Reynolds turbulent Re_t tend vers zéro à la paroi.

Théoriquement, il semble difficile de distinguer les effets individuels (voir Perot et Moin [161] pour une étude des influences de l’imperméabilité et d’adhérence en l’absence du cisaillement moyen par biais de la simulation directe). En général, ces trois effets agissent simultanément dans la zone de proche paroi. Par conséquent, le bilan des équations exactes pour les moments de la turbulence change sensiblement. La validité de certaines hypothèses de modélisation est remise en cause à proximité d’une paroi solide. En particulier, les points suivants peuvent être évoqués:

- **Pression-déformation.** Les termes de bord de l’intégration du laplacien de la pression (voir équation (1.22)) traduisent l’effet de la présence de la paroi sur la corrélation entre pression et déformation. Cette influence peut être interprété comme l’écho du champ de pression à la paroi imperméable. Ils existent des nombreuses études [162, 163, 164] qui proposent de prendre en compte ce phénomène par une expression supplémentaire, dit “terme d’écho”.

L’hypothèse d’homogénéité utilisée pour déduire la forme habituelle de la partie rapide (équation (1.23)) est erronée très proche de la paroi. Certaines auteurs (e.g. [165]) ont utilisé une correction d’inhomogénéité qui modifie le comportement du modèle pour le terme rapide à la paroi.

- **Dissipation.** L’hypothèse d’isotropie du tenseur de dissipation ε_{ij} perd sa validité dans la zone de proche paroi (voir par exemple l’analyse de Antonia *et al.* [166]). Des modèles algébriques pour prendre en compte l’anisotropie de la dissipation sont fréquemment utilisés [29, 167, 165].

La variation asymptotique de la trace de la dissipation ε est très distincte de celle de l’énergie cinétique k . L’analogie entre les deux équations de transport n’est plus valable proche d’une paroi solide. Afin d’imposer le comportement asymptotique observé dans l’expérience et dans la DNS, différentes modifications de l’équation de la dissipation ont été avancées dans la littérature. Patel *et al.* [168] et So *et al.* [169] donnent un résumé des publications.

- **Diffusion.** A cause de la condition d’adhérence, la corrélation triple de vitesses décroît plus rapidement que la diffusion par la pression en s’approchant à la paroi [165]. De plus, les hypothèses qui sont à la base des modèles algébriques pour la corrélation triple, notamment l’hypothèse de quasi-normalité, ne sont pas justifiées proche d’une paroi.
- **Corrélations avec la densité.** Dans le paragraphe 1.4.6, nous avons négligé les corrélations avec la densité qui apparaissent en conjonction avec la viscosité et en conjonction avec la conductivité thermique (équations (1.85) à (1.87)). De plus, le terme visqueux de l’équation de bilan du flux de masse turbulent (1.92) a été éliminé. Ces contributions peuvent jouer un rôle dans une couche limite à haute vitesse extérieure (voir l’étude de Huang *et al.* [87]).

Les modifications citées pour assurer que les équations modélisées représentent adéquatement la physique d’un écoulement pariétal sont en grande majorité fonctions de la distance à la paroi et du vecteur unitaire normal à la paroi. La définition des telles grandeurs à l’intérieur du domaine est néanmoins ambiguë dans une géométrie générale qui est constituée des parois quelconques. Debaty [170] a utilisé une formule approximative qui fait intervenir l’intégrale des contributions de toutes les parois. Afin de garder la flexibilité de notre approche par maillage non-structuré, nous souhaitons d’éviter que les équations à l’intérieur du domaine dépendent explicitement de la géométrie autour. Durbin [171, 172] a proposé un modèle qui prend en compte l’effet d’inhomogénéité sur la pression-déformation par une équation différentielle elliptique. Nous n’avons pas considéré ce modèle dans notre étude.

Les fortes variations des variables turbulentes à la paroi s’étendent uniquement sur une petite distance normale (typiquement de l’ordre de plusieurs pour cents de l’épaisseur de la couche limite). Par conséquent, un très grand nombre de nœuds de maillage est nécessaire afin de résoudre

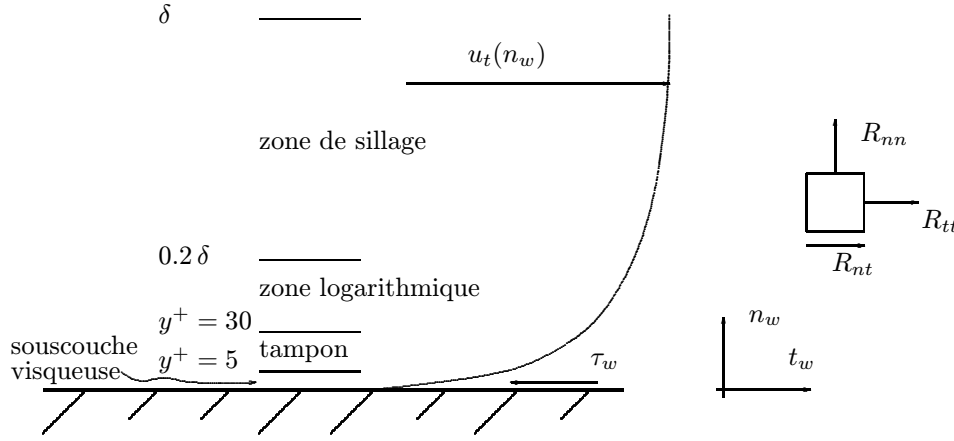


Fig. 2.11: Les zones de l'écoulement pariétal et les notations dans le repère local.

numériquement ces gradients. Afin d'alléger le calcul, nous cherchons à éviter la solution d'un bilan numérique des équations pour cette zone. La méthode utilisée est celle de la loi de paroi qui est basé sur l'observation empirique d'une structure quasi-universelle de la couche limite turbulente.

2.5.3.2 La loi de paroi pour un écoulement compressible

Nous définissons un repère local lié à la paroi avec l'axe normal dénoté par $\vec{n}_w$ et l'axe tangentiel par $\vec{t}_w$ (voir la figure 2.11). En introduisant une normalisation de n_w par la viscosité et par la contrainte pariétale τ_w , on obtient un nombre de Reynolds y^+ défini par:

$$y^+ = \frac{n_w u_\tau}{\nu}, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}}, \quad (2.100)$$

u_τ étant une vitesse de frottement. Ce paramètre y^+ permet de distinguer différents régimes de l'écoulement pariétal, comme il est montré sur la figure 2.11. Dans la sous-couche visqueuse, les effets turbulents sont négligeables devant les termes visqueux. À partir d'une distance de $y^+ = 30$ environ, les tensions turbulentes sont dominantes. Dans une zone au delà de cette valeur, la contrainte turbulente est approximativement constant et la production d'énergie cinétique turbulente k est équilibrée par la dissipation ε . Ceci permet d'intégrer l'équation de la quantité de mouvement longitudinale dans la direction n_w . En introduisant les hypothèses de couche limite sans gradient de pression et d'une longueur de mélange proportionnelle à n_w , le résultat est une variation logarithmique de la vitesse moyenne u_n en fonction de y^+ . Un traitement similaire pour l'équation d'énergie dû à van Driest (cf. [22]) permet de tenir compte de la variation de la masse volumique dans un écoulement compressible. Une hypothèse supplémentaire de l'approche de van Driest est que le nombre de Prandtl turbulent est constant. Dans le cas d'une paroi adiabatique, la vitesse est finalement donnée par les formules suivantes (voir la référence [115] pour plus de détails):

$$\frac{u_c}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B, \quad \kappa = 0.41, \quad B = 5.2 \quad (2.101)$$

$$u_c = \sqrt{\frac{2 c_p T(n_w)}{Pr_t} + (u_t(n_w))^2} \arcsin \left(\frac{u_t(n_w)}{\sqrt{2 c_p T(n_w)/Pr_t + (u_t(n_w))^2}} \right). \quad (2.102)$$

Entre autres, So *et al.* [173] ont confirmé la validité de cette description dans une gamme importante de conditions de l'écoulement externe. L'étendue de la zone logarithmique varie notamment en fonction du nombre de Reynolds (e.g. le nombre de Reynolds Re_θ bâti sur l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite) et du nombre de Mach de frottement $M_\tau \equiv u_\tau/c$. La limite

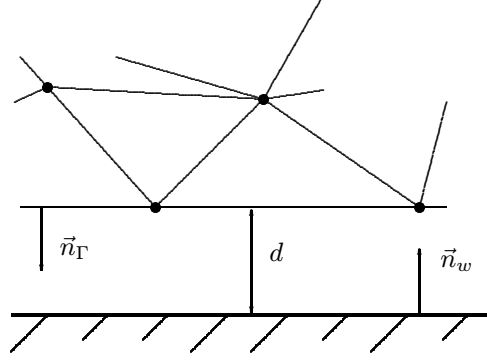


Fig. 2.12: La position du maillage par rapport à la paroi physique.

supérieure de cette région augmente avec le nombre de Reynolds ($y^+ < 100$ pour $Re_\theta = 10^3$, $y^+ < 5500$ à $Re_\theta = 10^5$ selon la référence [174]); elle diminue en fonction du nombre de Mach de frottement M_τ . Même si l'analyse n'est pas strictement valable en présence d'un gradient de pression adverse, on retrouve néanmoins une zone logarithmique du profil de vitesse dont la limite supérieure est progressivement diminuée [175]. La limitation de l'approche est essentiellement donnée par la séparation de l'écoulement.

L'équilibre entre la production et la dissipation de l'énergie cinétique turbulente, observé expérimentalement et dans des simulations directes [176, 177] mène aux relations suivantes:

$$\varepsilon(n_w) = \frac{u_\tau^3}{\kappa \cdot n_w} \cdot \left(\frac{\rho_w}{\rho(n_w)} \right)^{3/2}, \quad k(n_w) = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \cdot \frac{\rho_w}{\rho(n_w)}, \quad C_\mu = 0.09, \quad (2.103)$$

où la relation de van Driest donne le rapport des densités:

$$\frac{\rho_w}{\rho(n_w)} = \frac{T(n_w)}{T(n_w) + Pr_t \cdot u(n_w)^2 / (2 c_p)} \quad (2.104)$$

Gad-el-Hak et Bandyopadhyay [174] remarquent que l'anisotropie du tenseur de Reynolds est approximativement constant dans la zone logarithmique d'une couche limite. Nous utilisons cette propriété afin de déterminer les composantes diagonales du tenseur de Reynolds en fonction de la prédiction pour l'énergie cinétique turbulente. Les valeurs de l'anisotropie de l'étude de Klebanoff et Lauffer (cf. [34]) sont les suivantes:

$$R_{tt} = \frac{353}{300} k, \quad R_{nn} = \frac{37}{150} k \quad (2.105)$$

La composante tangentielle, par contre, est directement déterminé par la loi de paroi compressible. L'expression s'écrit:

$$R_{nt} = -u_\tau^2 \frac{\rho_w}{\rho(n_w)} \operatorname{sgn}(u_t(n_w)) \quad (2.106)$$

2.5.3.3 La réalisation numérique de la condition de la loi de paroi

Nous considérons que les nœuds d'une frontière de paroi solide sont localisés à une distance d de la paroi physique (voir figure 2.12). La valeur de d est alors un paramètre du calcul qui doit être ajusté afin d'assurer que les nœuds de frontière se trouvent dans la zone logarithmique. Dans un cas d'écoulement séparé, le réglage ne peut être effectué que sur une partie de la frontière. Pour les nœuds où la valeur de y^+ est très faible, nous utilisons la loi linéaire de la vitesse qui est une bonne approximation dans la sous-couche visqueuse. Néanmoins, les conditions pour les moments turbulents (2.103) à (2.106) constituent une erreur en dehors de la zone logarithmique.

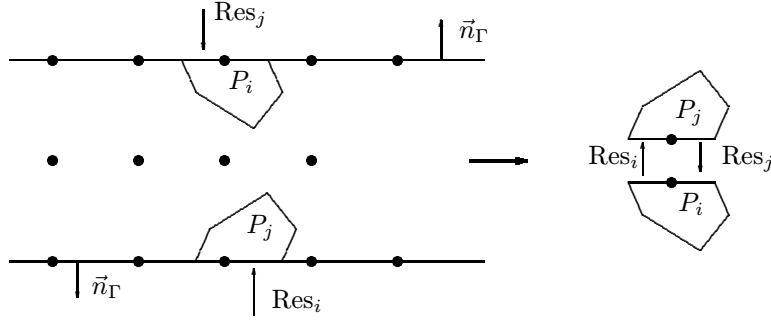


Fig. 2.13: Calcul d'une condition de périodicité entre deux points P_i et P_j localisées aux frontières opposées.

A chaque point de la frontière, nous utilisons l'équation (2.101) comme une relation implicite pour la vitesse de frottement en fonction de la vitesse et de la température locale. La résolution itérative est effectuée par une méthode de Newton. La valeur de u_τ permet ensuite de calculer la condition de Dirichlet pour les variables $\{\rho k, \rho R_{11}, \rho R_{22}, \rho R_{12}, \rho \varepsilon\}$. Nous montrons dans l'annexe E.3 la construction des flux nécessaires pour le traitement faible des variables $\{\rho, \rho \vec{v}, \rho e_T\}$.

2.5.4 Une condition de périodicité

Nous avons utilisée une condition de périodicité très simplifiée qui est adaptée aux calculs du type tube à choc décrits dans le paragraphe 2.2.6. La configuration géométrique est montrée sur la figure 2.13. Nous considérons la frontière périodique comme une frontière interne qui sépare certaines cellules en deux parties. Les flux pour les cellules à la frontière peuvent donc être complétés en ajoutant le résidu de la cellule qui se trouve géométriquement opposée. En tenant compte de la somme du volume des deux cellules, on peut écrire la condition de périodicité pour la cellule P_i de la manière suivante:

$$\delta Q_i \frac{V_{C_i} + V_{C_j}}{\Delta t} = \text{Res}_i + \text{Res}_j \quad . \quad (2.107)$$

Chapitre 3

Etude des écoulements turbulents homogènes

3.1 La motivation pour l'étude des écoulements homogènes

L'étude des écoulements turbulents homogènes a servi de référence pour la plupart des fermetures du second ordre utilisées jusqu'à aujourd'hui. L'homogénéité du champ turbulent représente en effet une simplification considérable pour le développement et la validation des modèles (la dépendance spatiale des corrélations est nulle) ainsi que pour la simulation numérique (des conditions de périodicité peuvent être appliquées, l'hypothèse d'ergodicité permettant l'utilisation de la moyenne en espace pour obtenir des grandeurs statistiques). L'expérimentation sur la turbulence homogène reste difficile, particulièrement en présence des gradients du champ moyen [178]. Depuis une dizaine d'années, les simulations numériques directes ont commencé à servir de référence, la modélisation a ainsi pu être guidée par les résultats de ces "expériences numériques". Dans le régime des nombres de Mach turbulent élevés, cette tendance est d'autant plus marquée que des expériences physiques sont pour l'heure impossibles à conduire.

Malgré son caractère idéal, la turbulence homogène intègre des phénomènes importants de la dynamique du tenseur de Reynolds: notamment au niveau de la redistribution d'énergie par les fluctuations de pression et de la dissipation visqueuse. Dans le cas d'un fluide compressible, le couplage de la cinétique de la turbulence avec le champ thermodynamique est de plus représenté par les caractéristiques de la turbulence homogène.

En l'absence des gradients du champ moyen, le problème est simplifié davantage puisque la production de turbulence est nulle de même que la partie rapide de la corrélation entre pression et déformation. Quand le champ de fluctuations est isotrope, le mécanisme de redistribution d'énergie s'annule entièrement et l'état est déterminé par le taux de dissipation visqueuse et l'échange d'énergie de compression par la pression-dilatation. Il existe donc une hiérarchie de configurations de complexité croissante qui mène de l'écoulement homogène, isotrope aux écoulements homogènes anisotropes puis inhomogènes et cette hiérarchie permet une gradation dans l'approche de la turbulence inhomogène dans sa généralité. De nombreux états représentatifs de situations simplifiées peuvent faire l'objet d'une approche graduelle,

- décroissance de la turbulence derrière une grille représentative de la turbulence homogène isotrope,
- retour à l'isotropie d'une turbulence initialement rendue anisotrope dans un conduit déformant,
- comportement anisotrope de la turbulence soumise à un gradient de vitesse.

Dans ce dernier cas, des situations très différentes peuvent intervenir. La déformation irrotationnelle, homogène est représentative de l'écoulement loin de la paroi dans un conduit à section variable. La compression moyenne homogène est souvent étudiée en vue d'approcher les écoulements confinés, notamment dans des moteurs à piston [9]. Le cas du cisaillement homogène est générique pour les écoulements inhomogènes de type couche limite qui sont dominés par l'action du cisaillement moyen. Par le biais de la DNS, Rogers *et al.* [179] et Lee *et al.* [180] ont par exemple montré la similitude des structures cohérentes dans la zone logarithmique d'une couche limite et dans un écoulement homogène cisailé ainsi que des correspondances entre corrélations statistiques dans les deux cas. Abid et Speziale [181] (voir également [182]) montrent l'importance de l'écoulement homogène cisailé pour la modélisation au second ordre afin d'obtenir une bonne prédiction de la zone logarithmique d'une couche limite. Sarkar [68] a constaté une analogie entre la croissance spatiale d'une couche de mélange et le taux de croissance asymptotique de l'énergie cinétique k d'un écoulement homogène cisailé.

Dans cette étude, nous nous intéressons surtout à l'effet de la compressibilité du champ turbulent sur les propriétés statistiques. Nous avons d'abord considéré des écoulements homogènes, avec la gradation suivante:

- décroissance de turbulence isotrope;
- retour à l'isotropie en absence des gradients moyens (expérience de Le Penven *et al.* [183]);
- cisaillement homogène correspondant à des expériences physiques ainsi que des simulations numériques directes.

La validation des modèles est possible puisque dans la plupart des cas et pour la majorité des modèles utilisés, des résultats de référence ont été publiés. Les cas de la turbulence isotrope et du retour à l'isotropie ont été traités précédemment [184]. On considèrera ici d'abord le cas du cisaillement homogène d'un fluide incompressible. Cette situation donne une référence pour la discussion sur la modélisation de la turbulence d'un fluide compressible donnée dans la suite de ce chapitre.

Pour l'étude des effets de compressibilité dans un écoulement homogène, nous nous concentrons sur le cas de la turbulence en présence du cisaillement moyen. Cette configuration nous semble la plus représentative d'un écoulement générale de type couche limite pariétale ou zone de mélange.

3.2 Ecoulement homogène cisailé d'un fluide incompressible

3.2.1 Caractéristiques de l'écoulement

L'homogénéité du champ turbulent se traduit par l'annulation des termes de transport des corrélations doubles de vitesse. La condition d'homogénéité implique que le cisaillement moyen doit être constant en espace. On choisit classiquement une variation linéaire de la vitesse axiale $\bar{u}$ selon la direction transversale y (voir la figure 3.1):

$$\bar{u}_{k,i} = S \cdot \delta_{k1} \cdot \delta_{i2} \quad , \quad (3.1)$$

où S est une constante indépendante du temps. Avec ces hypothèses, les équations statistiques se réduisent à un système d'équations différentielles ordinaires qui constituent un problème d'évolution temporelle à valeur initiale.

Deux échelles de temps peuvent être identifiées dans le cas incompressible [60] (dans la mesure où on admet un équilibre spectrale): le temps de déformation moyenne,

$$\tau_d \equiv S^{-1} \quad , \quad (3.2)$$

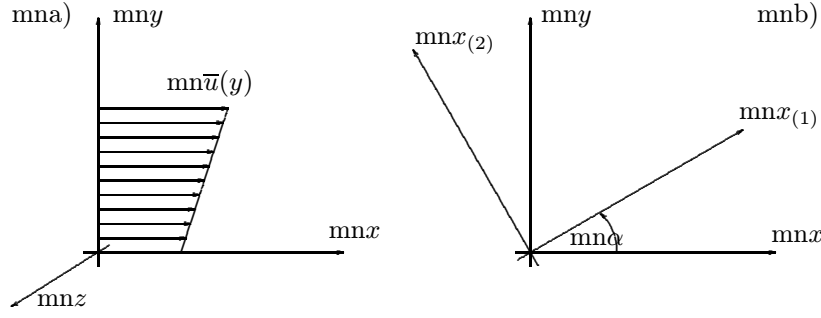


Fig. 3.1: Définition du repère: a) Le gradient de vitesse moyenne $\overline{u}_{,y} = S$ du cisaillement homogène. b) L'orientation des axes principaux $(x_{(1)}, x_{(2)})$ dans le plan (x, y) .

et le temps caractéristique des grandes échelles de la turbulence,

$$\tau_t \equiv \frac{k}{\varepsilon} \quad . \quad (3.3)$$

Le rapport des deux échelles de temps donne une première grandeur sans dimensions qui caractérise l'évolution temporelle, à savoir:

$$\eta \equiv \frac{Sk}{\varepsilon} \quad . \quad (3.4)$$

Le deuxième paramètre caractéristique est le nombre de Reynolds de l'écoulement. Nous ne traitons pas explicitement ici les effets de bas nombre de Reynolds dans notre étude, mais on est toutefois obligé de tenir compte du fait que les simulations directes sont effectuées à très faible nombre de Reynolds. Ceci implique une certaine précaution quant à la comparaison entre le calcul et la simulation.

Pour l'étude de la structure du tenseur de Reynolds, il est pratique d'écrire les équations pour les composantes de l'anisotropie b_{ij} . Nous introduisons une variable de temps sans dimension, $t^* \equiv St$, ainsi qu'un tenseur d'anisotropie de la dissipation d_{ij} et une production sans dimension $\mathcal{P}_{ij}$, définis par:

$$d_{ij} \equiv \frac{\varepsilon_{ij}}{2\varepsilon} - \frac{1}{3}\delta_{ij}, \quad \mathcal{P}_{ij} \equiv \frac{P_{ij}}{P_{kk}} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \quad . \quad (3.5)$$

En considérant que la production de l'énergie cinétique turbulente dans le cisaillement pur s'écrit $P_{kk} = -4Skb_{12}$, le tenseur de production prend la forme suivante:

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{b_{22}+1/3}{b_{12}} & 0 \\ \frac{b_{22}+1/3}{b_{12}} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad . \quad (3.6)$$

En utilisant l'identité $\partial_t(b_{ij}) = \partial_t(R_{ij})/2k - R_{ij}/2k \partial_t(k)/k$, on obtient ainsi l'équation tensorielle suivante pour l'anisotropie de la tension de Reynolds:

$$\partial_{t^*}(b_{ij}) = -2b_{12} \cdot (\mathcal{P}_{ij} - b_{ij}) + \frac{\Pi_{ij}}{2kS} + \frac{1}{\eta}(b_{ij} - d_{ij}) \quad . \quad (3.7)$$

A partir d'un état initialement isotrope, la composante b_{12} est d'abord diminuée par la production ($\lim_{t^* \rightarrow 0+} (\partial_{t^*} b_{12}) = -2/3$). Ensuite, la production affecte toutes les composantes de b_{ij} (à noter que parmi les tensions R_{ij} , seulement R_{11} et R_{12} reçoivent de l'énergie directement par le terme de production). En même temps, les corrélations pression-déformation Π_{ij} redistribuent l'énergie entre les composantes: la partie lente transfère de l'énergie de la composante b_{11} à la composante

b_{22} et elle diminue la valeur de b_{12} ; la partie rapide effectue un transfert de b_{11} à b_{33} et elle diminue également la composante b_{12} [179]. Si elle est non-nulle, l'anisotropie de la dissipation d_{ij} contribue également au mécanisme de redistribution.

La théorie linéaire fondée sur l'analyse des équations de Navier-Stokes linéarisées (voir par exemple Rogallo [185] pour la représentation dans l'espace d'ondes) est capable de prédire l'évolution de la structure de la tension de Reynolds dans sa phase initiale. En ce qui concerne le développement pour des temps grands ($St \gg 1$), un consensus n'existe pas dans la littérature. Les simulations directes ne persistent pas suffisamment longtemps pour être entièrement conclusives, mais pour des grands temps, des simulations de Rogallo [185] et Rogers *et al.* [179] montrent une croissance exponentielle des composantes de la tension de Reynolds. Le paramètre η ainsi que les composantes du tenseur d'anisotropie b_{ij} atteignent des valeurs approximativement constantes. L'anisotropie de la tension de Reynolds est légèrement dispersée selon les différentes réalisations numériques, mais elle correspond de façon assez proche aux valeurs obtenues dans des expériences. Ces valeurs sont données dans le tableau 3.1 et comparées aux données de Tavoularis et Karnik [178] qui représentent un résumé des mesures effectuées auparavant. Tavoularis [186] a par ailleurs établi une loi asymptotique qui prédit également une croissance exponentielle de l'intensité de la turbulence. Un grand nombre d'expériences semble vérifier cette loi, néanmoins avec différentes valeurs pour le taux de croissance. Il faut noter que Bernard et Speziale [187] ont récemment remis en question la croissance exponentielle des tensions à grand St en s'appuyant sur des considérations d'étirement des tourbillons agissant sur l'évolution de la dissipation. Néanmoins, à l'heure actuelle, la théorie de Bernard et Speziale n'a pas pu être confirmée.

Il est aussi à noter que la dissipation est difficile à mesurer, l'expérience de Champagne *et al.* [60] indique néanmoins des valeurs proches de l'isotropie. Dans les DNS, par contre, la dissipation n'est pas isotrope. L'angle α_ε de l'axe principal du tenseur de dissipation est de l'ordre de -15° dans les simulations de Rogers *et al.* L'anisotropie de la dissipation peut être attribuée en partie au bas nombre de Reynolds des simulations (Re_l varie de 10 à 250 en cours des calculs de Rogers *et al.*), les auteurs constatant que l'action de la dissipation devient de plus en plus isotrope avec une augmentation du nombre de Reynolds.

3.2.2 Comportement des modèles du second ordre

Analyse asymptotique. En utilisant le modèle standard (1.57) pour le taux de dissipation ε , l'équation d'évolution pour le rapport d'échelles de temps η s'écrit:

$$\partial_{t^*}(\eta) = -2b_{12}\eta(1 - C_{\varepsilon 1}) - (1 - C_{\varepsilon 2}) \quad . \quad (3.8)$$

Dans le cadre des fermetures au second ordre discutées ici, où – nous le rapellons – la dissipation est supposée isotrope $d_{ij} = 0$ (voir le paragraphe 1.4.4) et la corrélation pression-déformation Π_{ij} est modélisée selon une des propositions de l'annexe A, le système des équations (3.7) et (3.8) se comporte comme un système dynamique [188, 62]. Ce système comporte en général des points fixes qui constituent des solutions asymptotiques. Lee et Chung [189] ont analysé un grand nombre de modèles pour la pression-déformation sous l'aspect de la stabilité et de la réalisabilité des points fixes dans un cisaillement homogène. Ils montrent que le modèle SL90 (voir (A.4) et (A.6)), fonction du nombre de Reynolds, n'a pas de point fixe inconditionnellement stable et que la solution peut varier selon la condition initiale pour des très faibles valeurs de $\eta(t^*=0)$. Le modèle FLT (voir (A.3)) donne un comportement critique très oscillatoire pour l'anisotropie $b_{ij}(t^*)$ quand η est initialement faible. Il faut noter que dans les cas que nous avons considérés ici, la valeur du paramètre η est au-delà du régime critique obtenu pour ces deux modèles SL90 et FLT. Par la suite on vérifiera que tous les modèles testés ont un attracteur unique.

On note de plus que le rapport entre production et dissipation d'énergie cinétique turbulente dépend uniquement des valeurs des constantes dans l'équation de ε [181], et on a:

$$\lim_{t^* \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{2}P_{kk}}{\varepsilon} \right) = \frac{C_{\varepsilon 2} - 1}{C_{\varepsilon 1} - 1} \quad . \quad (3.9)$$

	modèles statistiques						simulations directes			expérience
	second ordre				premier ordre		Rogers	Rogallo		Tavoularis,
	LRR	SSG	FLT	SL90	SZL	SZL-b	C128U	BSH9	BSH12	Karnik
b_{11}	0.155	0.219	0.197	0.135	0.116	0.223	0.187	0.18	0.15	0.18
b_{22}	-0.122	-0.146	-0.130	-0.136	-0.070	-0.136	-0.144	-0.15	-0.12	-0.11
b_{12}	-0.188	-0.164	-0.148	-0.108	-0.173	-0.185	-0.160	-0.15	-0.16	-0.16
η	5.45	5.76	6.93	9.47	5.92	5.52	5.7	4.9	4.9	4.1
α_R	-26.8°	-20.9°	-21.1°	-19.3°	-30.9°	-22.9°	-22.0°	-22°	-24°	-23.9°
$Re_{\lambda 1}$	—	—	—	—	—	—	96	76	104	‡
α_ε	0°	0°	0°	0°	0°	0°	-15.6°	-22.5°	-23.6°	—

Tab. 3.1: Les paramètres de structure de l'état asymptotique du cisaillement homogène d'un fluide incompressible. Comparaison entre différents modèles, la DNS et l'expérience. ‡ Les valeurs expérimentales correspondent à une moyenne d'un grand nombre de mesures effectués par Tavoularis et Karnik [178], le nombre de Reynolds $Re_{\lambda 1}$ basé sur l'échelle de Taylor varie entre 100 et 360.

Cette valeur asymptotique agit évidemment sur le comportement de l'énergie cinétique turbulente à grand t^* . Généralement, $C_{\varepsilon 2} > C_{\varepsilon 1}$ et k continue à croître en fonction du temps.

L'état asymptotique de la tension de Reynolds ne peut pas être obtenu analytiquement. Dans le tableau 3.1 sont montrées les valeurs que nous avons calculées numériquement en utilisant les différents modèles donnés dans l'annexe A. Les résultats obtenus avec les modèles de second ordre LRR, SSG, FLT et SL90 sont en accord avec ceux publiés auparavant [181, 67]. On note la bonne performance des modèles SSG et FLT par rapport à l'expérience. Les prédictions obtenues en utilisant le modèle LRR sont acceptables. Le modèle SL90 donne généralement un accord nettement moins bon, particulièrement pour la composante tangentielle b_{12} qui est trop faible. On rappelle qu'il s'agit ici d'un vrai état d'équilibre. On note que le nombre de Reynolds croît exponentiellement au cours du temps, les valeurs données par les modèles correspondent à la limite de Reynolds infini.

Quand il s'agit de prédire une valeur asymptotique, un modèle algébrique peut également être considéré. Le modèle k - ε non-linéaire SZL donne pourtant des résultats modestes (voir tableau 3.1). Nous proposons le jeu de constantes suivant:

$$A_1 = 4.4, \quad A_2 = 300, \quad C_{\tau 2} = -2, \quad C_{\tau 3} = \frac{13}{2}, \quad C_{\tau 4} = -1, \quad (3.10)$$

qui permet un meilleur accord avec l'expérience (dans le tableau 3.1 nous avons noté les résultats issus de cette modification "SZL-b"). On remarque que la modification n'affecte pas les propriétés de réalisabilité du modèle SZL puisque nous avons uniquement modifié les constantes A_1 , A_2 .

L'évolution temporelle de l'écoulement avant l'état asymptotique est considérée par la suite. Nous avons effectué des calculs basés sur l'expérience de Tavoularis et Corrsin [190] car elle est bien documentée. La section de mesures s'étend sur une longueur faible qui correspond à $S \cdot t = 5.7$. Par contre, le nombre de Reynolds est relativement élevé. Les paramètres de l'expérience sont donnés dans le tableau 3.2.

Sur les figures 3.2 à 3.4 est présenté le développement axial des composantes de l'anisotropie

$Re_{\lambda 1}$	S	U_c	$k(x_0)$	$\varepsilon(x_0)$	$b_{11}(x_0)$	$b_{22}(x_0)$	$b_{12}(x_0)$
245	46.8	12.4	0.383	2.857	0.197	-0.143	-0.140

Tab. 3.2: Paramètres de l'expérience de Tavoularis et Corrsin [190] d'un écoulement homogène cisailé à basse vitesse. U_c est la vitesse convective moyenne; x_0 est la coordonnée axiale de l'expérience qui correspond à l'état initial utilisé dans le calcul. Les valeurs sont données en unités S.I.

à partir de l'état initial qui est déjà anisotrope. L'évolution est très faible; un meilleur accord est obtenu par les modèles FLT et SSG. En général, les prédictions de tous les modèles de second ordre sont acceptables. L'évolution du rapport des échelles η , par contre, dépend considérablement du modèle utilisé pour le terme de pression-déformation (voir la figure 3.5). La meilleure prédiction pour cette grandeur est obtenue par les modèles LRR et SSG.

3.3 L'écoulement homogène cisailé d'un fluide compressible

L'effet principal qu'exerce la compressibilité sur un écoulement homogène cisailé est la réduction de la croissance temporelle d'énergie cinétique turbulente, observée dans les travaux de Blaisdell *et al.* [8, 78] et Sarkar *et al.* [191] ce qui a été confirmé dans plusieurs études par la suite.

Les premières approches théoriques étaient focalisées sur le bilan d'énergie cinétique turbulente. Zeman [76, 7, 82] et Sarkar *et al.* [45, 66] ont proposé des modèles pour les termes explicites de la pression-dilatation (voir paragraphe 1.4.3.3) et de la dissipation dilatationnelle (paragraphe 1.4.4.2). Ces modèles sont capables de prédire la stabilisation de l'écoulement cisailé due à la compressibilité. Néanmoins, les simulations de Blaisdell *et al.* et une étude détaillée de Sarkar [192, 68, 193] ont révélé une influence très marquée sur la structure du tenseur de Reynolds. Sarkar montre que ce changement structurel est responsable de la réduction du taux de croissance de k , les termes explicites énergétiques jouant seulement un rôle secondaire. L'observation de Sarkar a été ensuite confirmée par l'étude de Simone *et al.* [194, 195].

Une première étude concernant les conséquences de ces phénomènes de compressibilité liés au cisaillement pour la modélisation au second ordre a été effectuée par Speziale *et al.* [67]. Ces auteurs ont conclu que les modèles pour la pression-déformation, conçus pour la situation incompressible, ne sont pas capables de prédire la modification structurelle de la tension de Reynolds, même si des modèles pour la pression-dilatation et la dissipation dilatationnelle sont ajoutés.

Depuis l'étude de Speziale *et al.*, qui s'appuie sur une seule simulation de Blaisdell *et al.* (sha192), un certain nombre de simulations directes supplémentaires a été effectué par plusieurs auteurs. Les études de Sarkar et Simone *et al.*, particulièrement, ont couvert une gamme importante de valeurs initiales des paramètres du problème.

Nous allons par la suite utiliser les données fournies par les simulations directes afin de discuter les implications pour la modélisation du second ordre. Concernant notre fermeture statistique, il se pose notamment la question d'existence d'un état asymptotique analogue au cas incompressible. On s'intéressera tout particulièrement à des modifications du modèle pour les termes de redistribution. Les performances des différentes variantes de modélisation seront comparées aux résultats de DNS.

3.3.1 Tendances observées dans les simulations directes

L'homogénéité de l'écoulement à gradient de vitesse moyenne constant d'un fluide compressible entraîne comme condition supplémentaire que la masse volumique moyenne reste constante en espace et en temps [8]:

$$\bar{\rho}(\vec{x}, t) = \rho_0 \quad . \quad (3.11)$$

La température moyenne, par contre, évolue en temps de même que l'énergie totale, la pression et la vitesse du son. Il existe alors une troisième échelle de temps du problème, le temps acoustique τ_a défini par [192]:

$$\tau_a \equiv \frac{k^{3/2} / \varepsilon}{c} \quad . \quad (3.12)$$

D'après l'analyse dimensionnelle, un paramètre caractéristique supplémentaire est introduit qui a la signification d'un nombre de Mach. Deux combinaisons des échelles de temps sont possibles: le nombre de Mach turbulent

$$M_t \equiv \frac{\sqrt{2k}}{c} \quad , \quad (3.13)$$

et le nombre de Mach de la distorsion

$$M_d \equiv S \frac{k^{3/2} / \varepsilon}{c} = \eta \frac{M_t}{\sqrt{2}} \quad . \quad (3.14)$$

Pour l'écoulement du cisaillement, les études de Sarkar et Simone *et al.* indiquent que le nombre de Mach de distorsion est probablement plus significatif que le nombre de Mach turbulent (nous remarquons que Sarkar utilise néanmoins comme paramètre le nombre de Mach de gradient $M_g \equiv S L_{uv} / c$ bati sur l'échelle intégrale dans la direction transversale).

L'équation pour l'évolution de l'énergie cinétique turbulente, normalisée par k , s'écrit:

$$\partial_{t^*}(k)/k = -2b_{12} + \frac{\overline{p'u''_{k,k}}}{\bar{\rho} S k} - \frac{\varepsilon}{S k} \quad , \quad (3.15)$$

et fait apparaître en particulier la trace non-nulle de la corrélation pression-déformation. La variation de l'anisotropie de la tension de Reynolds est décrite par l'équation suivante:

$$\partial_{t^*}(b_{ij}) = -2b_{12}(\mathcal{P}_{ij} - b_{ij}) + \frac{\Pi_{ij}^{dev}}{2kS} - b_{ij} \frac{\overline{p'u''_{k,k}}}{\bar{\rho} k S} + \frac{\varepsilon}{S k} (b_{ij} - d_{ij}) \quad , \quad (3.16)$$

où on rappelle la définition de la partie déviatrice de la pression-déformation:

$$\bar{\rho} \Pi_{ij}^{dev} = \overline{p'(u''_{i,j} + u''_{j,i})} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{p'u''_{k,k}} \quad . \quad (3.17)$$

Il est de plus à noter que les corrélations densité-vitesse sont nulles dans un écoulement homogène si l'état initial est isotrope ou si l'évolution devient indépendant de la condition initiale [8]. Par conséquent, la moyenne de Reynolds est identique à la moyenne pondérée par la masse volumique dans ce cas. Par la suite de ce chapitre, nous n'allons pas faire la distinction entre les deux types de moyenne.

Les résultats des simulations directes à nombre de Mach élevé (M_d ou M_t) sont en accord à $S t$ grand avec celles d'un fluide incompressible en ce qui concerne les points suivants (voir également la discussion dans la référence [196]):

- Une croissance exponentielle de k et des composantes diagonales de R_{ij} est atteinte (particulièrement visible dans la simulation sha192 de Blaisdell *et al.*).
- Les composantes de l'anisotropie approchent des valeurs approximativement constantes à la fin des simulations. Les contributions à l'énergie provenant des composantes des fluctuations de vitesse correspondent en ordre de grandeur à celles obtenus dans le cas incompressible: $R_{11} > R_{33} > R_{22}$.

auteur	cas	M_{t0}	M_{d0}	η_0	Re_l	N	St_{fin}
Simone <i>et al.</i> [195]	B_1	0.25	4.0	16.0	74	96^3	12
	$\vdots$						
	B_9	0.25	66.7	266.9	74	96^3	14
Sarkar [192, 68]	A1	0.40	0.51	1.8	50	128^3	20
	A2	0.40	1.02	3.6	50	128^3	20
	A3	0.40	1.57	5.4	50	128^3	20
	A4	0.40	3.05	10.8	50	128^3	20
Blaisdell <i>et al.</i> [8]	sha192	0.40	1.67	5.9	50	192^3	24

Tab. 3.3: Paramètres initiaux $(\cdot)_0$, résolution spatiale N et temps d'arrêt St_{fin} des simulations directes du cisaillement homogène en régime compressible effectuées par différents auteurs. Les valeurs M_{d0} et η_0 des réalisations de Simone *et al.* varient de manière monotone entre les cas B_1 et B_9 .

- Le paramètre de structure η approche également une valeur constante.

Les différences principales par rapport aux caractéristiques d'un cas incompressible sont les suivantes:

- Le taux de croissance de k qui est atteint à grand St dans les simulations est réduit en augmentant soit M_t soit M_d du champ initial. Néanmoins, Sarkar montre que l'influence du nombre de Mach de distorsion sur la réduction est plus important que celui du nombre de Mach turbulent.
- Quantitativement, l'anisotropie b_{ij} diffère considérablement d'un cas à l'autre; elle est distincte du cas incompressible.

Il est important de noter que l'influence de la compressibilité sur l'écoulement cisailé est différente du cas d'une déformation irrotationnelle. Cambon *et al.* [51] (voir également Simone *et al.* [195]) ont montré que le taux de croissance de l'énergie cinétique k augmente en fonction du nombre de Mach de distorsion dans une compression axiale. En effet, cette "déstabilisation" de l'écoulement est aussi observée dans une phase initiale du problème du cisaillement avant que la tendance s'inverse à $St \approx 5$. Ce phénomène de "croisement" entre une tendance déstabilisante de la compressibilité et une tendance stabilisante à St grand est probablement dû au couplage des champs de vitesse solénoïdale et dilatationnelle existant uniquement dans le cas d'une déformation rotationnelle [197, 195]. Malgré cette différence fondamentale entre les deux types de déformations moyennes, nous allons essayer d'étendre une correction de compressibilité du modèle de pression-déformation avancée dans le cas de déformation irrotationnelle (Cambon *et al.* [51]) au cisaillement (voir le paragraphe 3.3.2.2 ci-dessous).

Nous allons par la suite surtout faire référence aux résultats de la série de DNS de Simone *et al.* pour laquelle nous disposons des statistiques détaillées. Dans ces simulations, le nombre de Mach de distorsion initial varie en gardant le nombre de Mach turbulent initial constant et égal à une valeur de 0.25. Ceci correspond en principe à la série A des simulations de Sarkar, où $M_{t0} = 0.4$ et M_{d0} se situe dans une gamme de valeurs inférieure à celles utilisées par Simone *et al.* L'influence étudiée est alors principalement celle du nombre de Mach de distorsion. Nous considérons également la simulation sha192 de Blaisdell *et al.* puisqu'elle s'étend jusqu'à $St = 24$ grâce à un domaine de calcul élargi. Les caractéristiques des différentes simulations sont données dans le tableau 3.3. On note le faible nombre de Reynolds des simulations, qui croît au cours du temps pour atteindre une valeur de 200 environ à la fin du calcul.

3.3.1.1 Le bilan de l'équation du tenseur de Reynolds

Sur la figure 3.6 sont montrées les courbes d'évolution des composantes de l'anisotropie de la tension de Reynolds b_{ij} . La tendance est qu'une augmentation du nombre de Mach de distorsion initiale mène à une augmentation de l'anisotropie des composantes normales et à une diminution de la composante tangentielle à la fin des simulations. En effet, les courbes approchent progressivement un état de turbulence monodimensionnelle où les seules fluctuations de vitesse sont celles dans la direction axiale (x). D'où vient ce changement de structure? On va ici examiner le changement structurel en reprenant les équations sous la forme suivante:

$$\partial_{t^*}(b_{ij}) = -2b_{12}(\mathcal{P}_{ij} - b_{ij}) + X_{ij} + b_{ij}Y \quad , \quad (3.18)$$

avec

$$X_{ij} \equiv \frac{\Pi_{ij}^{dev} - 2\varepsilon d_{ij}}{2kS} \quad , \quad Y \equiv \frac{\varepsilon - \overline{p'u''_{k,k}}/\bar{\rho}}{kS} \quad , \quad (3.19)$$

afin de séparer les phénomènes énergétiques Y et ceux de la redistribution X_{ij} . L'avantage de cette écriture est qu'elle regroupe les termes de manière analogue à l'écriture utilisée dans le cadre de la fermeture au second ordre, où tous les termes redistributifs sont généralement modélisés ensemble.

Comportement de Y . Le bilan selon l'équation (3.18) est montré sur les figures 3.7 à 3.9 pour chaque composante. Nous constatons que l'augmentation de la valeur initiale de M_d diminue et la valeur du terme de redistribution X_{ij} et celle des termes énergétiques $Y \cdot b_{ij}$ qui sont de signes opposés. Quand on trace la somme des deux termes $X_{ij} + b_{ij}Y$ (voir la figure 3.10) et X_{ij} (voir la figure 3.13), on constate que la contribution des termes de redistribution X_{ij} est dominante pour les composantes b_{11} et b_{12} , tandis que la somme de ces deux termes s'annule approximativement pour la composante b_{22} .

Parmi les termes énergétiques regroupés dans l'expression Y , la partie dilatationnelle de la dissipation ε_d devient plus important quand M_d initial augmente (jusqu'à 20% de ε dans le cas extrême B_9 , voir la figure 3.11). On note aussi [66] que le caractère de la pression-dilatation est oscillatoire, avec une contribution en moyenne négative. Il a été remarqué par Sarkar que malgré l'augmentation des termes explicites de compressibilité $\varepsilon_d - \overline{p'u''_{k,k}}$, la valeur de Y diminue en fonction de la valeur initiale de M_d . Cette tendance est confirmée par les simulations de Simone *et al.* Sarkar propose la grandeur Y_P définie par:

$$Y_P \equiv \frac{\varepsilon - \overline{p'u''_{k,k}}/\bar{\rho}}{-2b_{12}Sk} \quad , \quad (3.20)$$

qui traduit le rapport entre le taux de production de l'énergie cinétique et son taux de transfert en énergie interne. Dans les DNS de Sarkar, Y_P approche une valeur d'environ 0.65. Ceci est également la valeur asymptotique de la simulation sha192 de Blaisdell *et al.* (voir figure 3.12). On note que cette valeur correspond à celle obtenue dans le cas incompressible BSH12 de Rogallo. Sur la figure 3.12 on constate que les résultats des différents cas de Simone *et al.* approchent aussi une valeur asymptotique qui est néanmoins moins importante ($Y_P \approx 0.4$). Il faudrait probablement des simulations qui s'étendent sur une plus grande durée afin d'étudier la possibilité d'existence d'une valeur "universelle" pour Y_P .

Comportement de X_{ij} . Nous considérons maintenant le comportement des termes de redistribution X_{ij} de l'équation de bilan pour l'anisotropie de la tension de Reynolds. Sur la figure 3.13 a) est montré l'évolution temporelle de ces termes de redistribution dans les simulations de Simone *et al.* et de Blaisdell *et al.* Comme nous avons remarqué ci-dessus, la tendance générale est une diminution de la valeur de chaque composante de X_{ij} en fonction de M_{d0} . Sur la figure 3.13 b) nous avons tracé X_{ij} en fonction du nombre de Mach de distorsion instantané $M_d(t)$ en échelle logarithmique. Les états à la fin des simulations (indiqués par les symboles) sont caractérisés par une décroissance en fonction de $M_d(t)$. On note qu'une augmentation de la valeur initiale de M_d

mène dans toutes les simulations à une augmentation de la valeur finale de M_d . On peut donc exprimer la tendance selon laquelle la redistribution X_{ij} est une fonction décroissante du nombre de Mach de distorsion. Le modèle de correction de compressibilité proposé par la suite reprend cette idée (cf. paragraphe 3.3.2.2).

3.3.1.2 Le comportement de la dissipation

La redistribution X_{ij} contient le déviateur des corrélations entre pression et déformation et la partie déviatrice de la dissipation. Friedrich [196] a proposé un “cycle de compressibilité” d’après lequel la composante transversale de la dissipation dilatationnelle serait principalement responsable pour la réduction du taux de croissance de l’énergie cinétique turbulente. Nous allons maintenant examiner la structure du tenseur de dissipation. Dans un écoulement homogène, on peut définir une décomposition des composantes du tenseur de dissipation en une partie solénoïdale et une partie dilatationnelle, analogue à la décomposition du taux de dissipation dans l’équation (1.63), à savoir [8]:

$$\varepsilon_{ij} = \underbrace{2\nu \left(\overline{\omega'_{ik} u'_{j,k}} + \overline{\omega'_{jk} u'_{i,k}} \right)}_{\varepsilon_{ij}^s} + \underbrace{\frac{8}{3} \nu \overline{u'_{k,k} s'_{ij}}}_{\varepsilon_{ij}^d} . \quad (3.21)$$

Ceci permet de calculer les deux déviateurs associés par les formules suivantes:

$$d_{ij}^s \equiv \frac{\varepsilon_{ij}^s}{2\varepsilon_s} - \frac{1}{3} \delta_{ij} , \quad d_{ij}^d \equiv \frac{\varepsilon_{ij}^d}{2\varepsilon_d} - \frac{1}{3} \delta_{ij} , \quad , \quad (3.22)$$

avec l’identité: $\varepsilon d_{ij} = \varepsilon_s d_{ij}^s + \varepsilon_d d_{ij}^d$. Sur les figures 3.14, 3.15 et 3.16 sont montrées les valeurs des tenseurs d’anisotropie de la dissipation en cours des simulations. Le tenseur d_{ij} a une structure proche de celle de l’anisotropie de la tension de Reynolds (à comparer avec les figures 3.6). Ceci est analogue au cas incompressible [179] (cette anisotropie pouvant ressembler comme il a été dit précédemment de la faiblesse du nombre de Reynolds de la simulation).

Composante axiale. En ce qui concerne la composante d_{11} , nous constatons une légère augmentation en fonction du nombre de Mach de distorsion initial. Cette modification est due à une augmentation de la partie solénoïdale d_{11}^s ; l’évolution de d_{11}^d , par contre, n’est quasiment pas affectée par les conditions initiales.

Composante transversale. La composante transversale de l’anisotropie de la dissipation d_{22} semble évoluer vers un état approximativement constant, d’une valeur de -0.2 . Les déviateurs d_{22}^s et d_{22}^d sont de signe opposé mais ils évoluent de la même manière, leurs valeurs absolues augmentent en fonction de M_{d0} . La partie solénoïdale d_{22}^s approche progressivement la valeur $-1/3$ qui représente la situation où toute la dissipation ε_s s’effectue dans la direction axiale. La partie dilatationnelle augmente en fonction de M_{d0} . Cette augmentation se nourrit visiblement de la composante d_{33}^d , puisque d_{11}^d ne varie pas et la somme des trois composantes diagonales est zéro. Contrairement à la dissipation solénoïdale, la dissipation dilatationnelle s’effectue alors principalement dans la direction du cisaillement.

Composante tangentielle. Dans la direction tangentielle, toutes les simulations sont consistantes en ce qui concerne l’évolution de l’anisotropie de la dissipation totale d_{12} . Cette composante tend vers une faible valeur en cours du temps. On note une proche correspondance avec la simulation BSH12 de Rogallo, effectuée en régime incompressible. Une influence de M_{d0} n’est alors pas constatée. On remarque néanmoins que la partie dilatationnelle d_{12}^d prend une valeur finale d’environ -0.15 dans l’ensemble des simulations en régime compressible.

En conclusion, on peut constater que la dépendance de l’anisotropie de la dissipation totale par rapport à la valeur initiale du nombre de Mach de distorsion est faible.

3.3.1.3 Les termes de redistribution — test a priori des modèles

Dans le cadre d’une fermeture de second ordre, l’ensemble des termes de redistribution est en général modélisé de manière suivante (voir équations (1.27) et (1.34)):

$$X_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{k1} \delta_{l2} \cdot \mathcal{M}_{ijkl}(b_{mn}, M_t) + \frac{1}{2\eta} \cdot \mathcal{A}_{ij}(b_{mn}, Re_l) \quad . \quad (3.23)$$

Le taux de redistribution est donc fonction de l’anisotropie de la tension de Reynolds b_{mn} , du rapport d’échelles η et du nombre de Reynolds turbulent Re_l (modèle SL uniquement). La correction de El-Baz et Launder (équation (1.40)) fait également intervenir le nombre de Mach turbulent M_t dans le tenseur $\mathcal{M}_{ijkl}$ de la partie rapide. Avec les valeurs des quatre arguments fournis par les expériences de DNS, nous pouvons calculer les prédictions des différentes modèles pour le terme X_{ij} et les comparer aux valeurs données par la DNS.

Sur les figures 3.17 à 3.28 nous voyons les prédictions des modèles LRR, SSG, SL90, FLT ainsi que celles obtenues en utilisant la modification de El-Baz et Launder en conjonction avec le modèle FLT (par la suite nommé “FLT-EL”). Les cas montrés correspondent aux simulations sha192, B_1 , B_3 et B_9 dans l’ordre de M_{d0} croissante. Nous constatons que tous les modèles prédisent qualitativement la tendance de diminution des composantes de la redistribution quand M_{d0} augmente. En détail, nous observons les points suivants:

Composantes diagonales. Dans les DNS, les deux composantes diagonales ($-X_{11}$ et X_{22}) diminuent considérablement en fonction de M_{d0} . Les prédictions des modèles se comportent de manière équivalente pour les deux composantes. Les modèles LRR, SSG et FLT surestiment nettement le taux de redistribution. Ceci indique un transfert d’énergie entre ces deux composantes qui est trop important (à noter que le signe est opposé). Le modèle FLT-EL ne donne pas un résultat très distinct de celui du modèle de base FLT. La tendance de la correction de El-Baz et Launder est d’augmenter la valeur de $-X_{11}$, ce qui va dans le mauvais sens. Le modèle SL90, par contre, prédit systématiquement des valeurs $|X_{\alpha\alpha}|$ plus faibles que les autres modèles, ses prédictions sont en bon accord avec les données de la DNS. Nous rapellons que le modèle SL90 est le seule parmi ceux que nous avons considéré qui dépend explicitement du nombre de Reynolds.

Composante tangentielle. La réduction de la composante X_{12} de la redistribution dans les DNS est plus faible que celle des composantes diagonales. Ici, les modèles surestiment en générale cette tendance. Le cas à M_{d0} faible (sha192, figure 3.25) est assez bien prédit par le modèle LRR et le modèle SSG; les autres modèles donnent des valeurs trop importantes. En augmentant la valeur initiale du nombre de Mach de distorsion, les modèles ont tous tendance à donner des valeurs de X_{12} plus faibles que celles observées dans la simulation directe, à l’exception du modèle LRR. Dans le cas extrême B_9 , les modèles prédisent des valeurs négatives pour X_{12} , tandis que la DNS donne une valeur finie d’environ 0.05. Seul le modèle LRR semble être en accord avec la DNS à haut nombre de Mach de distorsion initial.

A ce point, nous ne sommes pas dans la position d’analyser l’origine du défaut des modèles pour la redistribution. Le point particulier du modèle SL90 est la modélisation de la partie lente de X_{ij} en fonction du nombre de Reynolds. Ceci se repercute sur la prédiction des composantes diagonales notamment. Le modèle LRR est distinct en ce qui concerne sa partie lente et rapide par rapport aux autres modèles. Malheureusement, nous ne disposons pas des données individuelles sur les deux parties de la redistribution, à savoir:

$$X_{ij} = \frac{\Pi_{ij}^r}{2kS} + \frac{\Pi_{ij}^s - 2\varepsilon d_{ij}}{2kS} \quad . \quad (3.24)$$

De plus, la décomposition du déviateur de la corrélation entre pression et déformation en une partie rapide Π_{ij}^r et une pertie lente Π_{ij}^s est compliqué dans le cas compressible (voir équation (1.36)). Nous conseillons donc vivement la mise en œuvre des simulations directes d’un cas non-isotrope sans déformation moyenne à différents nombres de Mach initiaux (retour à l’isotropie compressible). Une possibilité serait une simulation avec comme champ initial le champ issu d’une simulation

avec cisaillement pur. Ce type de simulation serait réalisable puisque le nombre de Reynolds décroît et on s'attend à ce que la résolution reste adéquate. Le résultat pourrait donner des indications sur l'influence du nombre de Mach sur le comportement de la partie lente Π_{ij}^s de la redistribution X_{ij} en fonction de l'intensité de la compressibilité.

3.3.1.4 L'état asymptotique

Le nombre de Mach turbulent. Pour la modélisation des phénomènes que nous avons pu constater dans les paragraphes précédents, la question d'existence d'un état asymptotique des paramètres significatifs se pose. Nous avons observé que dans les simulations directes, b_{ij} et η atteignent des valeurs approximativement constantes. La figure 3.29 montre l'évolution du nombre de Mach turbulent des simulations de Blasidell *et al.* et Simone *et al.* Dans les simulations à faible M_{d0} , la valeur $M_t(t)$ continue à croître même pour des grands St . Dans les cas à M_{d0} important, les courbes ont une tendance à s'aplatir. Ceci est également visible dans les simulations de Sarkar (cf. [68]). Ici, le cas extrême B_9 semble atteindre une valeur constante de $M_t \approx 0.5$. Cette tendance est retrouvée dans le comportement du nombre de Mach de distorsion (voir la figure 3.30).

Zeman [82] a déjà postulé un état asymptotique pour le nombre de Mach turbulent. Il suppose que finalement un équilibre entre les fluctuations de vitesse et la vitesse du son s'établit due à la formation des *shocklets*. Sarkar [68] suppose également que M_t atteint un état constant.

Pour la discussion, il est utile de déduire l'équation d'évolution du nombre de Mach turbulent. L'équation pour l'énergie totale se réduit à la forme suivante dans un écoulement homogène:

$$\partial_{t^*}(\tilde{e}_T) = \frac{1}{2} P_{kk} + \nu \tilde{u}_{i,j} \tilde{S}_{ij} \quad . \quad (3.25)$$

En utilisant l'identité $\partial_t(\tilde{e}_T) = c_v \partial_t(\tilde{T}) + \tilde{u}_i \partial_t(\tilde{u}_i) + \partial_t(k)$ et en substituant l'équation pour k , on obtient dans le cas du cisaillement pur:

$$c_v \partial_{t^*}(\tilde{T}) = \nu S^2 + \varepsilon - \overline{p' u''_{k,k}} / \bar{\rho} \quad , \quad (3.26)$$

ce qui traduit l'augmentation de température par la dissipation moyenne et turbulente ainsi que l'échange d'énergie par la pression-dilatation. La combinaison des équations (3.26) et (3.15) donne l'équation suivante pour le nombre de Mach turbulent:

$$\partial_{t^*}(M_t) = M_t \left\{ b_{12} (Y_P - 1) + b_{12} Y_P \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2} M_t^2 - M_t \frac{S \nu}{2 \tilde{T} c_v} \right\} \quad . \quad (3.27)$$

Dans l'équation (3.27), l'influence du terme visqueux $M_t S \nu / (2 \tilde{T} c_v)$ est négligeable à haut nombre de Reynolds [67]. Dans les DNS, sa valeur atteint l'ordre de 10^{-4} par rapport à la somme des autres termes du second membre; l'influence du terme visqueux dans les simulations est donc également négligeable. L'évolution du nombre de Mach est alors contrôlée par b_{12} et par la somme des termes énergétiques regroupés dans Y_P . Quand ces deux grandeurs atteignent simultanément une valeur constante en temps, le nombre de Mach doit également approcher un état asymptotique. Les deux solutions asymptotiques sont les suivantes:

$$M_{t\infty} = 0, \quad M_{t\infty}^2 = \frac{1 - Y_P}{Y_P} \cdot \frac{2}{\gamma(\gamma - 1)} \quad . \quad (3.28)$$

La première solution est la solution en régime incompressible. La solution en régime compressible ne dépend pas de b_{12} , elle est uniquement fonction de l'expression Y_P . D'après cette relation, une valeur asymptotique de $Y_P \approx 0.65$ correspondrait à $M_{t\infty} \approx 1.4$. Comme nous avons constaté ci-dessus, il faudrait des simulations sur des temps très grands afin de confirmer ces valeurs. Néanmoins, ces considérations indiquent que la valeur asymptotique de M_t ne dépend probablement pas de l'état initial. Ceci est en accord avec les hypothèses de Sarkar et Zeman.

L'anisotropie b_{ij} . Simone *et al.* ont montré que, pour des temps courts ($St < 7$), l'évolution de l'anisotropie était prédite par la théorie de distorsion rapide (les calculs fondés sur cette approche linéaire reproduisent le comportement de b_{12} observé par la simulation directe; en particulier, l'effet de "croisement" des courbes à $St \approx 5$ est capté). Pour les St plus grands, la DNS fait apparaître des niveaux différents selon les valeurs du nombre de Mach de distorsion initial M_{d0} . Aucune donnée n'est disponible pour $St > 24$ (Blaisdell *et al.* [78]). Il s'agit ici de savoir si les niveaux obtenus pour des St finis correspondent ou non à des valeurs asymptotiques. Dans l'affirmative cela signifierait que l'état initial (caractérisé ici par M_{d0}) influe sur l'état asymptotique. Dans le cas contraire, cela signifierait que l'anisotropie devrait retourner lorsque $St \rightarrow \infty$ vers un état asymptotique universel qui correspond à la situation obtenue en incompressible. Ces deux options sont évidemment très différents, la première induisant de faire intervenir dans les modèles une notion de memoire (ou des variables internes supplémentaires régies par des équations différentielles en temps et leurs propres conditions initiales), la seconde permettant de se satisfaire de fermetures plus locales.

L'implication de ces réflexions sur la modélisation au second ordre est bien sûr importante. Si l'état asymptotique dépend des conditions initiales, les modèles classiques discutés ici ne peuvent pas reproduire le phénomène. Nous avons en effet déjà noté en régime incompressible que les prédictions des modèles de second ordre évoluent vers des points fixes dans l'espace (b_{ij}, η) , ce qui ne permet pas de mettre en évidence des états asymptotiques dépendants de l'état initial. Il faudrait donc introduire un paramètre dans les modèles qui, lui, traduit le rôle de la condition initiale. Le nombre de Mach de distorsion initial M_{d0} pourrait être un tel paramètre.

3.3.2 Prédications avec la fermeture du second ordre

Nous résumons d'abord le système d'équations à résoudre pour l'écoulement homogène cisailé:

$$\begin{aligned}
c_v \partial_{t^*}(\tilde{T}) &= \nu S^2 + \varepsilon - \overline{p'u''_{k,k}}/\bar{\rho} \\
\partial_{t^*}(b_{ij}) &= -2b_{12}(\mathcal{P}_{ij} - b_{ij}) + X_{ij} + b_{ij} \frac{\varepsilon - \overline{p'u''_{k,k}}/\bar{\rho}}{kS} \\
\partial_{t^*}(k)/k &= -2b_{12} + \frac{\overline{p'u''_{k,k}}}{\bar{\rho}Sk} - \frac{\varepsilon}{Sk} \\
\partial_{t^*}(\varepsilon_s)/\varepsilon_s &= -2b_{12}C_{\varepsilon 1} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_s}{Sk}, \tag{3.29}
\end{aligned}$$

où X_{ij} est issu des modèles corrélation pression-déformation donnés en annexe A. La pression-dilatation est modélisée selon les propositions du paragraphe 1.4.3.3 et la dissipation totale ε est liée à la dissipation solénoïdale ε_s par un des modèles du paragraphe 1.4.4.2.

Afin de permettre un calcul rapide et précis du problème temporel, nous avons obtenu la solution numérique du système (3.29) avec une méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre (en utilisant le langage YORICK [147]).

Pour les comparaisons suivantes, nous avons choisi les cas A1 et A4 de l'étude de Sarkar [192, 68] (voir le tableau 3.3) qui a été réalisé avec une bonne résolution spatiale et pour des temps longs ($0 \leq St \leq 20$). La seule différence entre les deux simulations A1 et A4 est la valeur initiale du nombre de Mach de distorsion M_{d0} et du paramètre η_0 (l'effet de compressibilité est plus fort sur A4 que sur A1).

3.3.2.1 Résultats des calculs sans modèles de compressibilité

Nous montrons ici les résultats obtenus par les modèles SSG, FLT et SL90 (les résultats du modèle LRR étant très proches de ceux obtenus avec le modèle SSG). Dans cette série de calculs, les modèles sont strictement équivalents à ceux utilisés habituellement en régime incompressible

(avec cette classe de modèles, la température est un scalaire passif, la vitesse du son n'intervenant pas dans les équations des moments statistiques).

L'anisotropie b_{ij} . Les graphes de la figure 3.31 montrent l'évolution temporelle des composantes de l'anisotropie de la tension de Reynolds. Pour des temps petits, les tendances d'évolution des composantes de b_{ij} sont correctes. Pour des phases transitoires, on constate des écarts d'évolution selon les valeurs initiales de M_{d0} beaucoup plus faibles que ceux obtenus par la simulation directe mais là aussi les tendances sont correctes. Lorsque St croît, on aboutit très rapidement aux valeurs asymptotiques universelles en incompressible (voir tableau 3.1), ce qui met en évidence une divergence par rapport à la simulation directe. Il faut néanmoins noter que les valeurs asymptotiques sont atteintes à partir de différents temps selon le modèle. Pour le modèle SL90 l'état asymptotique est retardé par une dépendance du nombre de Reynolds introduite sur le terme non-linéaire des corrélations pression-déformation. Les modèles FLT et SL90 sont par ailleurs en mesure de faire apparaître un croisement des courbes de b_{12} obtenu pour les deux valeurs différentes de M_{d0} .

Evolution des paramètres scalaires. Sur la figure 3.32 nous avons tracé plusieurs paramètres scalaires qui caractérisent l'écoulement. D'abord, les courbes de croissance de l'énergie cinétique turbulente sans dimension, $\Lambda \equiv \partial_{t^*}(k)/(k)$ (voir l'équation (3.15)), montrent qu'aucun modèle n'est capable de prédire ni le croisement de l'évolution à $St \approx 6$ ni la réduction du taux de croissance à la fin de la simulation A4. Le niveau de Λ prédit par le calcul avec le modèle SL90 pour les deux cas se situe entre celles des simulations directes (à partir de $St = 15$). Les modèles SSG et FLT prédisent une croissance considérablement trop importante (voir également la référence [67] pour des résultats de ces deux derniers modèles).

Le taux de croissance Λ peut être exprimé en fonction de l'anisotropie b_{12} et du paramètre d'énergie Y_P par l'identité suivante [68]:

$$\Lambda = -2b_{12}(1 - Y_P) \quad . \quad (3.30)$$

En utilisant les modèles SSG et FLT, une bonne correspondance qualitative avec les résultats de la simulation directe est obtenue (voir la figure 3.32), mais le niveau de Y_P est généralement sous-estimé. On remarque ici qu'en l'absence de modèles de compressibilité le système d'équations fermé a un point fixe qui ne dépend pas du choix du modèle, puisque les équations pour k et ε peuvent être combinées afin de donner la valeur asymptotique de Y_P (voir également l'équation (3.8)):

$$Y_{P\infty} = \frac{1 - C_{\varepsilon 1}}{1 - C_{\varepsilon 2}} \quad . \quad (3.31)$$

Il en suit d'après (3.28) un nombre de Mach asymptotique:

$$M_{t\infty} = \sqrt{\left\{ \frac{1 - C_{\varepsilon 2}}{1 - C_{\varepsilon 1}} - 1 \right\} \cdot \frac{2}{\gamma(\gamma - 1)}} \approx 1.97 \quad . \quad (3.32)$$

qui s'établit pour des temps très supérieurs à $St = 20$. Pour des temps plus petits, les modèles SSG et FLT surestiment systématiquement la valeur du nombre de Mach turbulent (figure 3.32). Le modèle SL90, par contre, est en bon accord avec les résultats de la DNS sur le nombre de Mach turbulent. Au vu de l'équation d'évolution pour M_t (3.27), la surestimation de Y_P par ce modèle semble être compensée par la sous-estimation du cisaillement turbulent b_{12} .

3.3.2.2 Résultats des calculs avec différents termes de compressibilité explicites

Les modèles de référence étudiés ici ont été détaillés au paragraphe 1.4.3 et 1.4.4.2.

Nous utilisons par la suite quatre modélisations différentes:

FLT-EL. Approche par modification du polynôme tensoriel de El-Baz et Launder (1.40) basée sur le modèle FLT et correspondant à la proposition originale des auteurs. La destruction de la dissipation est modélisée selon l'équation (1.64).

SSG & Sarkar. La compressibilité est prise en compte dans les termes de corrélation pression-dilatation (1.51) et dissipation dilatationnelle (1.65). Le terme relatif à la partie déviatrice de la corrélation pression-déformation garde sa forme incompressible.

LRR-CCM. Nous avons remarqué dans le paragraphe 1.4.3.3 que des propositions suffisamment générales dans l'esprit de la modélisation structurelle n'existent pas à l'heure actuelle. Les tests a priori pour la modélisation du terme redistributeur X_{ij} (paragraphe 3.3.1.3) ont montré que les modèles classiques (à l'exception du modèle SL90) ont tendance à surestimer la valeur des composantes diagonales. La valeur de la composante tangentielle, par contre, est sous-estimée à très haut nombre de Mach de distorsion. Au vu de ces observations, l'idée de Cambon *et al.* – avancée dans le cas d'une déformation pure (voir paragraphe 1.4.3.3) – d'amortir toutes les composantes de la partie rapide du modèle de redistribution ne semble pas être entièrement applicable à ce problème. De plus, comme nous l'avons mentionné ci-dessus, le rôle de la compressibilité est différent selon le caractère irrotationnel ou rotationnel de la déformation.

Nous avons néanmoins également proposé des calculs préliminaires avec le modèle suivant:

$$\begin{aligned} X_{ij} &= \frac{\Pi_{ij}^r + \Pi_{ij}^s}{2kS}, \\ \Pi_{ij}^r &= \Pi_{ij}^r)_{LRR} \cdot \exp(-M_d^2), \quad \Pi_{ij}^s = \Pi_{ij}^s)_{LRR} \quad . \end{aligned} \quad (3.33)$$

La forme exponentielle de la fonction d'amortissement a été inspirée par le modèle de Cambon *et al.* (d'où l'abréviation LRR-CCM). Une justification partielle est l'évolution décroissante de toutes les composantes du terme X_{ij} en fonction du nombre de Mach de distorsion observé sur la figure 3.13. Dans un premier temps, les termes énergétiques (pression-dilatation et dissipation dilatationnelle) ont été négligés afin de présenter isolément l'influence compressible de la correction structurelle.

LRR-CCM & Sarkar. Approche structurelle de l'équation (3.33) en conjonction avec les modèles de Sarkar *et al.* pour la pression-dilatation (1.51) et pour la dissipation compressible (1.65).

Résultats pour l'anisotropie b_{ij} . En ce qui concerne l'anisotropie de la tension de Reynolds (figure 3.33), les termes énergétiques de Sarkar n'ont pas d'influence visible sur les résultats obtenus avec le modèle SSG (ceci est également vrai pour le modèle LRR en conjonction avec les termes de Sarkar; résultats non montrés ici). La modification de El-Baz et Launder aussi n'apporte pas non plus une amélioration substantielle à la prédiction de l'anisotropie, seule la composante b_{12} est en meilleur accord pour des temps courts ($St \leq 7$). Le modèle LRR-CCM, par contre, apporte une modification considérable au comportement du tenseur de l'anisotropie b_{ij} par rapport au modèle de base LRR (voir la figure 3.34). L'anisotropie des composantes normales est augmentée en accord avec les résultats de la simulation directe. La valeur absolue de la composante tangentielle est diminuée par la modification structurelle LRR-CCM, le niveau étant néanmoins trop élevé. Pendant une phase transitoire ($St \leq 15$), une gradation importante des courbes selon la valeur initiale du nombre de Mach M_{d0} est obtenue. Contrairement au modèle LRR, le modèle LRR-CCM prédit correctement le croisement de l'évolution de la composante b_{12} à $St \approx 5$. Pour des raisons discutées ci-dessus, à des temps grands, les courbes convergent vers un état unique et distinct de celui obtenu par le modèle LRR (voir le tableau 3.4). L'inclusion des modèles de Sarkar sur les termes énergétiques dans le modèle de structure (LRR-CCM & Sarkar) amplifie les tendances du modèle LRR-CCM: la différence de l'évolution des b_{ij} selon la valeur de M_{d0} est plus marquée, le niveau de la valeur absolue de b_{12} est diminué davantage.

Les paramètres scalaires. Le taux de croissance de l'énergie cinétique turbulente Λ est très bien prédit par le modèle SSG avec les termes de Sarkar (voir la figure 3.35). Le croisement des courbes – légèrement retardé – ainsi que l'écart obtenu à grand St selon la condition initiale est visible dans les résultats obtenus avec ce modèle. Le modèle FLT-EL, par contre, surestime largement la stabilisation de l'écoulement due à la compressibilité en prédisant une décroissance de l'énergie

	SSG & Sarkar	FLT-EL	LRR-CCM	LRR-CCM & Sarkar
b_{11}	0.230	0.155	0.535	0.569
b_{22}	-0.148	-0.101	-0.268	-0.285
b_{12}	-0.167	-0.148	-0.163	-0.144
η	3.44	3.88	6.27	4.10
Λ	0.031	0.018	0.165	0.033

Tab. 3.4: L'état asymptotique prédit par les fermetures au second ordre qui incluent des corrections de compressibilité.

cinétique k pendant une grande partie de la simulation. Les résultats pour Λ obtenus avec les modèles LRR-CCM et LRR-CCM & Sarkar (figure 3.36) montrent que la correction structurelle tend à augmenter l'écart entre les courbes dans une phase initiale ($St \leq 5$) puis à inverser la tendance. Cependant, un croisement n'est pas obtenu et la valeur asymptotique est légèrement inférieur à celui du modèle LRR. L'inclusion des modèles pour la pression-dilatation et pour la dissipation dilatationnelle (LRR-CCM & Sarkar) améliore la prédiction de Λ de façon analogue au résultat obtenu en utilisant le modèle SSG & Sarkar.

Les courbes du paramètre Y_P permettent d'expliquer les différentes prédictions pour le taux de croissance selon le modèle (voir la relation (3.30)). Dans le cas du modèle SSG & Sarkar, la surestimation de $(-2b_{12})$ est compensée par une surestimation de la valeur pour Y_P (figure 3.35). Malgré la mauvaise prédiction de l'anisotropie du tenseur de Reynolds, la croissance Λ est alors bien prédit. L'inclusion des termes de trace agit de façon analogue sur les autres modèles (LRR-CCM & Sarkar, FLT-EL). En utilisant uniquement la correction structurelle LRR-CCM, l'évolution du paramètre Y_P est similaire à celle obtenue avec un modèle classique et par conséquent, ce modèle surestime également la croissance temporelle du nombre de Mach turbulent.

Les résultats pour les deux autres paramètres caractéristiques formés à partir des échelles de temps, ε/Sk et M_d , sont montrés sur la figure 3.37. Nous voyons que les termes de trace de Sarkar ont tendance à diminuer l'échelle de temps turbulent par rapport à l'échelle de la déformation. Par conséquent, la croissance temporelle du nombre de Mach de distorsion est sous-estimée. La modification de la structure induite par le modèle LRR-CCM, par contre, n'affecte pas ces deux paramètres.

3.4 Conclusion

Les travaux conduits aujourd'hui en ce qui concerne la prise en compte des effets de compressibilité s'appuient en homogène pour une large partie sur les résultats de simulation directe dans des configurations de déformation pure et des configurations de cisaillement mais toujours pour des nombres de Reynolds faibles. On dispose donc de données sur des situations à processus diagonaux dominants (déformation pure) et sur des situations impliquant des effets non-diagonaux importants (cisaillement). Les modèles considérés aujourd'hui ne possèdent pas le degré d'universalité suffisant pour approcher de façon globale les deux types de situations. Les tentatives faites ici ont pour but d'étendre au cisaillement des corrections avancées dans des cas de déformation pure.

De nombreuses interrogations restent à lever sur différents points. Les simulations numériques directes ont été effectuées à bas nombre de Reynolds et de ce fait le caractère anisotrope des mécanismes de dissipation reste très pesant. Le nombre de Reynolds devrait en toute rigueur apparaître dans la modélisation et il apparaît de plus difficile de caractériser l'influence de la compressibilité sur cette anisotropie.

Pour ce qui concerne les modèles du second ordre, le rôle de la compressibilité doit être situé

en terme d'acteur sur les mécanismes représentés par la corrélation pression-déformation ou sur les mécanismes responsables de la dissipation, voir sur les deux mécanismes de façon combinée. Certains travaux font intervenir des corrections sur les deux mécanismes. Le travail particulier de Cambon *et al.* (CCM) propose de privilégier le rôle direct de la corrélation pression-déformation.

Une interrogation supplémentaire est à lever. C'est le fait de savoir si la compressibilité agit de façon privilégiée sur des mécanismes énergétiques ou sur l'anisotropie. Les interprétations actuelles des simulations directes tendent à accréditer l'idée qu'il faut apporter des corrections sur le déviateur des corrélations pression-déformation.

Le présent travail a comporté deux parties. La première partie a consisté à évaluer directement la validité de différents modèles à partir des résultats de la simulation numérique directe. La seconde partie a consisté à effectuer des résolutions du système d'équations au second ordre en introduisant ces modèles et en comparant les résultats à ceux de la simulation numérique directe.

- Les évaluations directes ont montré l'insuffisance des modèles à grands Reynolds appliqués pour représenter l'ensemble des termes de redistribution. Le modèle à bas Reynolds SL90 se comporte de manière plus satisfaisante sur les processus diagonaux. La correction de El-Baz et Launder permet une amélioration de la composante tangentielle en particulier.
- Les simulations du second ordre peuvent être analysées en termes d'effets énergétiques d'une part et en termes d'effets structurels d'autre part.

Sur les effets énergétiques, les simulations confirment les résultats globaux positifs du modèle de Sarkar sur les grandeurs telles que la croissance de l'énergie cinétique turbulente, ou le nombre de Mach turbulent. Néanmoins, on fait le constat que l'anisotropie est évidemment peu affectée par les corrections ce qui est problématique quant à la réalité physique du modèle dans la mesure où l'anisotropie du tenseur de Reynolds est directement responsable du taux de croissance de l'énergie.

Sur les approches structurelles le travail a nécessité de repartir sur le cisaillement avec des propositions faites d'une part en déformation pure (modèle LRR-CCM) et d'autre part en zone de mélange non-homogène (modèle FLT-EL). Le modèle FLT-EL est à forte dominante énergétique et la structure est peu affectée. L'effet de correction sur les termes de trace ne donne pas une bonne évolution d'énergie. Le modèle LRR-CCM a un effet important sur le caractère anisotrope de la turbulence, mais il reste, bien sûr, insuffisant quant à la prise en compte de l'évolution de l'anisotropie tangentielle b_{12} . On retrouve là, pour une part, l'insuffisance des modèles actuels compressibles à suivre des niveaux d'anisotropie marqués sur des échelles de temps longues par les conditions initiales.

On verra dans la suite d'autres éléments d'analyse du cisaillement dans le cas de la zone de mélange où les effets aux limites se substituent à la "mémoire" des conditions initiales ce qui conduit à d'autres interprétations quant aux états asymptotiques.

Chapitre 4

Etude des écoulements inhomogènes, libres

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons en particulier à des champs qui se développent dans des domaines non-confinés par des parois solides. La configuration étudiée est la couche de mélange qui se développe vers un état d'équilibre caractérisé essentiellement par la présence d'une seule direction privilégiée d'inhomogénéité.

Nous avons d'abord effectué des calculs pour une couche de mélange en régime incompressible (paragraphe 4.2). La comparaison des résultats numériques avec des données expérimentales sert à valider notre fermeture de base ainsi que la méthode numérique; en même temps, elle montre l'influence du choix du modèle pour la corrélation entre pression et déformation.

Sur cette base, nous considérons ensuite (paragraphe 4.3) en détail l'effet de la compressibilité sur le développement d'une couche de mélange. Nous étudions en particulier l'influence du nombre de Mach convectif sur le taux d'épanouissement ainsi que son influence sur l'anisotropie de la tension de Reynolds en regard des tendances observées dans le cas du cisaillement homogène. L'adéquation de différents modèles de fermeture du second ordre proposés est évaluée quantitativement par une comparaison entre nos calculs et les données expérimentales.

4.2 La couche de mélange en régime incompressible

On rencontre une couche de mélange dans de nombreuses configurations d'écoulements industriels (chambre de combustion, mélangeurs, aérodynamique externe en aval du bord de fuite d'un aile d'avion, ...). La figure 4.1 montre la configuration de ce type d'écoulement. Deux courants de différentes vitesses, initialement séparés par une paroi, se rejoignent au bord de fuite. Au contact des deux courants, le gradient transversal de la vitesse axiale à l'interface induit une zone d'échange de quantité de mouvement dont l'épaisseur b croît avec la distance axiale x . Finalement, le développement atteint un état asymptotique où le taux d'épanouissement devient constant et les profils transversaux de la vitesse moyenne ainsi que les grandeurs statistiques – convenablement normalisées – sont auto-similaires. La distance nécessaire pour atteindre cet état de similitude dépend de nombreux facteurs tels que le rapport des vitesses externes, la géométrie du séparateur de courants, le taux de turbulence externe (voir la référence [198] pour une discussion de ces influences). Un autre facteur important est le régime (laminaire ou turbulent) des couches limites initiales [198, 199], puisque dans le cas initialement laminaire, l'écoulement subit d'abord la transition vers le régime turbulent. Nous considérons par la suite uniquement le cas de la couche de

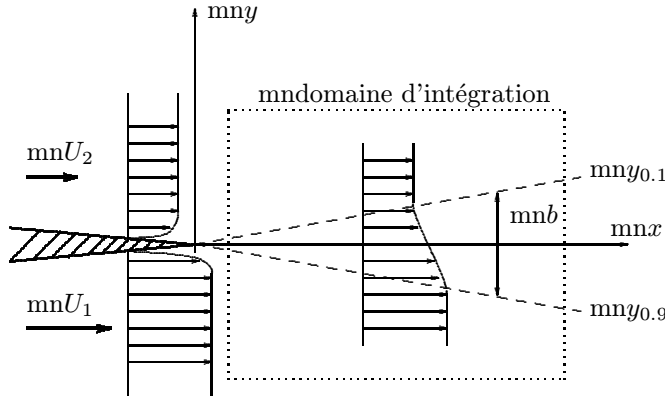


Fig. 4.1: Schéma d'une couche de mélange.

mélange se développant à partir des couches limites turbulentes.

4.2.1 Présentation du cas test

Nous analysons les calculs en s'appuyant sur l'expérience effectuée par Bell et Mehta [199] avec de l'air à conditions atmosphériques. Leur couche de mélange est créée à partir de deux courants avec un rapport de vitesse $r \equiv U_2/U_1 = 0.6$. L'intensité de la turbulence à l'extérieur de la zone d'interaction est de $\sqrt{k}/U_e \approx 0.12\%$. La valeur maximale du nombre de Reynolds, calculé à partir de la différence de vitesses extérieures, $Re \equiv \Delta U x/\nu$ est de 10^6 . Bell et Mehta ont mesuré les fluctuations de vitesse dans les trois directions spatiales à plusieurs stations axiales. Les calculs ont été effectués à partir de la première station de mesure à $x = 0.078m$ jusqu'au delà de la dernière station de mesure qui est située à $x = 2.5m$ (i.e. sur une longueur de $L_x = 2.5m$). Le domaine d'intégration couvre une distance transversale de $L_y = 0.8m$ ce qui est suffisamment important pour imposer une condition de glissement sur les frontières supérieure et inférieure (il s'agit d'une distance de plus de 10 fois l'épaisseur de la zone de mélange à la sortie).

Puisqu'il s'agit d'un problème subsonique, nous devons imposer toutes les variables sauf la pression à l'entrée du domaine ainsi que la pression à la sortie du domaine. Les mesures réalisées permettent de reconstruire toutes les grandeurs à l'entrée sauf la vitesse transversale v et le taux de dissipation ε . Nous supposons que la vitesse v est nulle dans la section d'entrée. Afin de reconstruire la valeur de la dissipation à l'entrée à partir des mesures des gradients de vitesse moyenne et des tensions turbulents, nous avons utilisé l'hypothèse de Boussinesq. D'autres reconstructions (telles qu'une relation fondée sur l'équilibre entre production et dissipation de l'énergie turbulente) ont été expérimentées ce qui a conduit à des résultats équivalents [184]. On est toutefois obligé de choisir une valeur finie pour le taux de dissipation dans l'écoulement sain où le gradient de vitesse est nul (hypothèse de décroissance de la turbulence à l'extérieur de la zone de mélange). Dans le calcul, nous avons remarqué une certaine sensibilité du champ des tensions pour les variations de la valeur de la dissipation à l'extérieur de la zone de mélange (voir annexe G). Néanmoins, nous pensons que l'incertitude associée à la valeur de la dissipation à l'entrée n'a pas une importance majeure quant à la comparaison des différents modèles.

Nous supposons que la pression dans la section de sortie est uniforme. Au lieu d'utiliser la valeur atmosphérique, nous avons adapté la valeur de la pression afin de baisser la température (voir le tableau 4.1) telle que le nombre de Mach atteint une valeur maximale de 0.1. Dans cette gamme, des effets de compressibilité sont encore absents, mais la résolution numérique – contrainte par une condition de type CFL – est accélérée.

Le maillage utilisé est constitué de 5940 nœuds, distribués de manière uniforme dans la direction

fluide	U_1	U_2	ν	T	Ma_1	Ma_2
air	15.0	9.0	15×10^{-6}	55	0.1	0.06

Tab. 4.1: Conditions utilisées pour le calcul de la couche de mélange à basse vitesse d'après l'expérience de Bell et Mehta [199], unités S.I.

axiale x et raffinés autour de l'axe $y = 0$ avec un rapport maximal de $\Delta y_{max}/\Delta y_{min} = 7$. Nous avons effectué des tests de raffinement successifs à partir de 3950 nœuds jusqu'à 23760 nœuds d'après lesquels nous considérons les résultats obtenus sur le maillage à 5940 nœuds comme convergés.

4.2.2 Résultats des calculs

4.2.2.1 Le champ de vitesse moyenne

L'échelle de vitesse caractéristique de cet écoulement est la différence de vitesse moyenne axiale entre les deux courants $U_0 \equiv U_1 - U_2$. Elle permet de définir une vitesse normalisée:

$$U^*(x, y) \equiv (u(x, y) - U_2) / U_0 \quad . \quad (4.1)$$

Goertler (cf. Schlichting [19, p.737]) a trouvé une solution analytique approchée basée sur une hypothèse de longueur de mélange qui mène à une distribution de la vitesse moyenne en fonction de l'intégrale exponentielle,

$$U^*(x, y) = (1 + \operatorname{erf}((y - y_0)/\delta(x))) / 2 \quad , \quad (4.2)$$

où δ est l'échelle de longueur transversale et y_0 le centre de la zone de mélange. Notons que δ représente une mesure de la demi-largeur de la couche de mélange. Dans l'étude de Bell et Mehta, les profils mesurés sont très bien représentés par la fonction (4.2) à partir d'une petite distance axiale de développement. Sur la figure 4.2 sont montrés plusieurs profils successifs issus du calcul avec le modèle SSG. Ces courbes – représentatives de tous nos résultats – sont en accord avec la relation (4.2). Par la suite nous utilisons donc la fonction (4.2) pour définir l'échelle de longueur δ afin d'effectuer la normalisation de la coordonnée transversale:

$$\eta \equiv \frac{y - y_0}{\delta} \quad . \quad (4.3)$$

La valeur de δ pour chaque calcul et à chaque station axiale est obtenue par une méthode des moindres carrés appliquée à la différence entre les valeurs numériques et la fonction analytique. Ce problème non-linéaire de minimisation est résolu par la méthode itérative de Newton.

Sur les figures 4.3 et 4.4 est montré l'évolution axiale de la longueur δ pour les différents modèles de fermeture expérimentés dans ce travail. Après une adaptation initiale, le développement spatiale devient approximativement linéaire à partir de $x = 1m$ (fermetures de premier ordre, fig. 4.4) et $x = 1.5m$ respectivement (fermetures de second ordre, fig. 4.3). Le taux d'épanouissement $\delta' \equiv d(\delta)/dx$ calculé à partir des valeurs dans la région de croissance linéaire est donné dans le tableau 4.2. On constate que les prédictions obtenues avec les modèles du second ordre, surtout LRR et SSG, sont très bonnes. Néanmoins, celles du modèle SL90 restent inférieures à la valeur expérimentale (écart de 48%). Cette très faible valeur est liée à la sous-estimation de la contrainte turbulente par le modèle SL90 (voir le paragraphe suivant).

Les valeurs associées aux modèles du type $k-\varepsilon$ sont inférieures au taux d'épanouissement de l'expérience, avec une déviation maximale de 25% dans le cas du modèle SZL.

En supposant que le champ de la vitesse axiale u suit exactement la relation de Goertler (4.2), nous pouvons calculer analytiquement le gradient axial $\partial_x(u)$. Celui-ci permet d'obtenir la

	expérience	LRR	SSG	FLT	SL90	Boussinesq	SZL	SZL-b
δ'	0.019	0.019	0.018	0.017	0.010	0.016	0.014	0.015

Tab. 4.2: Le taux d'épanouissement de la couche de mélange incompressible dans la région de similitude.

distribution de la vitesse transversale v par intégration de l'équation de continuité, à savoir:

$$\frac{v(x, y)}{U_0} = \frac{\delta'}{2\sqrt{\pi}} \cdot \exp(-\eta^2) \quad , \quad (4.4)$$

où la condition d'intégration $\lim_{y \rightarrow \infty}(v) = 0$ (correspondant à la condition de glissement à la frontière externe utilisée dans le calcul) a été utilisée. La comparaison des résultats numériques avec la relation (4.4) est une vérification supplémentaire du champ moyen. Nous voyons sur la figure 4.5 que l'accord est bon dans la zone centrale de mélange. Plus loin de l'axe, nous ne nous attendons pas à un bon accord puisque la relation approximative (4.2) pour la vitesse axiale ne donne pas un accord parfait à l'extérieur.

4.2.2.2 Le champ des corrélations turbulentes

Les tensions de Reynolds. Nous vérifions d'abord la similitude des profils des corrélations de vitesse qui est une condition nécessaire pour l'équilibre de l'écoulement. Sur les figures 4.6 et 4.7 sont montrées l'évolution des valeurs maximales de la contrainte turbulente R_{12} et de l'énergie cinétique turbulente qui tendent effectivement vers des niveaux asymptotiques dans les différents cas de calcul. Par un bilan transversal de l'équation de la quantité de mouvement (dans le cadre d'une approximation de type couche limite), Townsend [200, p.237] montre que le profil de similitude de la vitesse axiale (4.2) implique une proportionnalité directe entre la valeur maximale de la contrainte et le taux de croissance δ' . Les différents niveaux de $R_{12,max}$ obtenus selon le modèle utilisé reflètent donc les différences entre les prédictions pour δ' constatées auparavant (à noter la faible valeur obtenue avec le modèle SL90). Néanmoins, cette proportionnalité n'explique pas la différence de valeurs de δ' constatées entre les modèles de second ordre et celles de premier ordre (cf. tableau 4.2), ces derniers prédisant assez bien le niveau maximal de la contrainte R_{12} . Nous avons constaté que la forme des profils de vitesse moyenne u diffère légèrement, ceux-ci obtenus avec les modèles du type $k-\varepsilon$ étant plus "carré" que ceux calculés par un modèle de transport (voir la figure 4.8). De même, la forme des profils de la tension de Reynolds (figure 4.9) est distincte selon le type de fermeture utilisé. Concernant le résultat de la fermeture au second ordre, nous notons en particulier que la partie où la contrainte turbulente R_{12} est non-nulle s'étend au delà de la limite où le gradient de vitesse moyenne est non-nul ($|\eta| > 1.5$). Ceci montre le caractère du modèle de transport, où la tension n'est pas liée de manière rigide au champ de déformation moyenne. La zone transversale plus large du profil de la contrainte R_{12} obtenue avec la fermeture de second ordre explique le taux d'épanouissement plus élevé prédit par cette classe de modèles.

En ce qui concerne les valeurs maximales de k , nous remarquons que les résultats numériques sont systématiquement inférieurs aux valeurs expérimentales, avec des écarts compris entre 10% et 40%. D'après les tests de l'annexe G le fort niveau de viscosité turbulente dans l'écoulement sain de notre calcul (dû à l'incertitude de la valeur de la dissipation à l'entrée) pourrait être responsable pour le faible niveau de l'énergie cinétique.

L'anisotropie. Pour étudier la structure de la tension de Reynolds prédite par le calcul, nous considérons les composantes du tenseur d'anisotropie. Sur les figures 4.10 à 4.12 sont représentés les profils de b_{ij} dans la région de similitude. Nous notons que pour $|\eta| > 1.5$ les courbes ne sont pas significatives parce que l'intensité de la turbulence est résiduelle. Nous notons que dans l'expérience, les composantes b_{11} et b_{12} prennent une valeur approximativement constante à travers

la largeur de la couche de mélange (la région $-1 < \eta < 1$), tandis que la composante transversale b_{22} semble avoir un maximum sur l'axe avec une décroissance marquée en dehors de l'axe. Les résultats des calculs ne sont pas en accord avec cette dernière tendance: ils prédisent essentiellement des états d'équilibre marqués pour les trois composantes.

Il est utile de situer les valeurs de l'anisotropie quantitativement par rapport à celles de l'écoulement homogène cisailé pour deux raisons. D'abord il s'agit dans les deux cas d'écoulements dominés par le cisaillement. De plus, la fermeture de second ordre prédit une structure du tenseur de Reynolds qui est quasiment identique dans les deux cas. Ceci est montré sur la figure 4.13 pour le modèle SSG, où on constate que les valeurs asymptotiques $b_{ij\infty}$ obtenues dans le cisaillement homogène (cf. tableau 3.1) sont très rapidement atteintes dans la région intérieure de la couche de mélange. La valeur du paramètre caractéristique Sk/ε , qui représente le rapport des échelles du temps de la turbulence et de la déformation, se comporte de manière analogue (voir figure 4.14), restant néanmoins inférieure à la valeur du cisaillement homogène d'environ 20%. Cette similitude entre les deux écoulements souligne l'importance de l'étude du cas homogène pour la modélisation. Qualitativement, la structure du tenseur de Reynolds est équivalente entre les deux cas (avec $R_{11} > R_{33} > R_{22}$). Par contre, les valeurs maximales de l'anisotropie des composantes normales b_{11} et b_{22} mesurées dans l'expérience de Bell et Mehta sont inférieures à celles de l'expérience [178] et de la DNS du cisaillement homogène [185, 179] de 50% environ, la valeur de la composante tangentielle étant approximativement équivalente (cf. tableau 3.1).[†] Le modèle de fermeture du second ordre surestime les valeurs de b_{11} et b_{22} dans la région intérieure de la couche de mélange (figures 4.10 et 4.11) puisque les modèles pour la corrélation pression-déformation sont essentiellement calibrés par référence aux écoulements homogènes. En ce qui concerne l'anisotropie de la contrainte b_{12} , nous constatons – comme dans le paragraphe 3.2.2 – l'accord satisfaisant obtenu avec les modèles SSG et FLT, la valeur trop élevée du modèle LRR et la sous-estimation en utilisant le modèle SL90 (figure 4.12).

Parmi les modèles du premier ordre, nous notons l'accord remarquable obtenu avec le modèle non-linéaire SZL. La modification SZL-b, qui a amélioré les résultats dans le cas du cisaillement homogène, mène ici à une dégradation de la prédiction de l'anisotropie.

4.2.2.3 Test du modèle de diffusion

Bell et Mehta ont également mesuré la corrélation triple de vitesses $\overline{uvv}$ qui représente le transport transversale de la contrainte $\overline{uv}$. Nous montrons sur la figure 4.15 une comparaison avec le modèle isotrope de diffusion (1.81) utilisé dans notre fermeture. Il s'agit d'une évaluation externe en utilisant des valeurs expérimentales de la contrainte $\overline{uv}$, de l'énergie cinétique turbulente k et du profil de vitesse axiale $\overline{u}$ selon la relation (1.81). Pour cette évaluation, nous avons reconstruit la distribution de la dissipation ε par l'hypothèse de Boussinesq. Nous constatons l'accord général des deux courbes. Il faut remarquer que le modèle (1.81) est une approximation pour la somme des termes de transport diffusif. Néanmoins, parmi ceux-ci, la corrélation triple est en général le terme dominant.

4.2.3 Conclusion

La méthode de calcul a été validée sur un écoulement libre à bas nombre de Mach. Nous avons montré la similitude avec le cisaillement homogène en ce qui concerne la structure du tenseur de Reynolds prédite par la fermeture du second ordre. Ceci est qualitativement en accord avec l'expérience. Les prédictions pour le taux d'épanouissement sont également satisfaisantes sauf pour le modèle SL90 qui prédit une valeur très faible. Les différences entre les résultats pour δ' obtenus selon les fermetures du second ordre sont directement liées à la prédiction de l'anisotropie b_{12} de chaque modèle. A cet égard, la validité des différents modèles de pression-déformation peut

[†]Nous notons cependant que les valeurs de l'anisotropie des composantes normales varient selon différents auteurs (e.g. les références [201, 202]).

être déduite directement de résultats obtenus dans le cas du cisaillement homogène. Ceci n'est pas vrai pour le niveau quantitatif de l'anisotropie des composantes diagonales qui est moins élevé dans le cas de la couche de mélange. Ici, les modèles de pression-déformation qui prédisent bien l'écoulement homogène (FLT, SSG, LRR) surestiment la valeur des composantes b_{11} et b_{22} .

4.3 La couche de mélange en régime compressible

4.3.1 Influence de la compressibilité sur le développement de l'écoulement

Des expériences indiquent que la couche de mélange à vitesse relative élevée évolue également vers un état d'équilibre [10, 11, 12]. L'influence de la compressibilité sur l'évolution asymptotique ainsi que sur les profils de similitude a été l'objet d'un grand nombre d'études expérimentales. Nous résumons par la suite les effets les plus importants qui ont pu être constatés dans la littérature.

4.3.1.1 Le taux d'épanouissement

L'observation principale lors du développement spatial d'une couche de mélange est la réduction du taux d'épanouissement avec l'intensité de la compressibilité [22, 203, 204, 10, 11, 12]. Ce phénomène a également été constaté dans des simulations directes d'une zone de mélange en évolution temporelle [13]. Les profils de vitesse axiale moyenne mesurés sont similaires au cas incompressible et ils peuvent souvent être exprimés par une fonction "erreur" [11] ou par une loi en tangente hyperbolique [10]. La définition de l'échelle de longueur transversale varie selon les études (épaisseur de quantité de mouvement intégrale δ_m , épaisseur de vorticité δ_ω , épaisseur correspondant à 10% de différence de vitesse axiale b , épaisseur de pression de pitot δ_p) mais la tendance à la réduction est toujours constatée.

Dans le cas strictement incompressible, le taux d'épanouissement de la zone de mélange est essentiellement une fonction du rapport des deux vitesses extérieures. La compressibilité du fluide fait intervenir deux paramètres supplémentaires: le rapport des densités extérieures $s \equiv \rho_1/\rho_2$ qui exprime l'effet de pure dilatation; le nombre de Mach qui traduit l'intensité des effets induits par une haute vitesse par rapport à l'échelle acoustique. Pour la propagation des structures cohérentes, l'échelle significative est la vitesse relative par rapport aux conditions externes. Bogdanoff [203] et ensuite Papamoschou et Roshko [204] ont déduit la vitesse de convection U_c des structures à l'intérieur de la zone de mélange par une approche isentropique. A partir de cette vitesse, deux nombres de Mach convectifs peuvent être construits. Quand il s'agit de deux gaz équivalents ($\gamma_1 = \gamma_2$), l'approche de Papamoschou et Roshko implique l'égalité de ces deux nombres de Mach et le seul paramètre s'écrit:

$$M_c \equiv \frac{U_1 - U_2}{c_1 + c_2} \quad , \quad (4.5)$$

où c_i sont les vitesses du son moyennes des deux courants extérieures. Ce nombre de Mach est largement utilisé dans la littérature. Il faut cependant noter que des mesures de Papamoschou [205] et Hall *et al.* [206] dans des couches de mélange se développant à des valeurs de $M_c > 1$, ont révélé un écart entre la vitesse de convection mesurée et sa valeur théorique.

En retenant M_c , nous obtenons donc un problème à trois paramètres globaux:

$$\delta' = f \left(\frac{U_2}{U_1}, \frac{\rho_2}{\rho_1}, M_c \right) \quad . \quad (4.6)$$

Afin d'isoler l'influence de la compressibilité à grande vitesse, une normalisation par la valeur du

taux d'évasement δ'_0 à $M_c = 0$ peut être utilisée [204]:

$$\delta'_0 \equiv \left(\frac{U_2}{U_1}, \frac{\rho_2}{\rho_1}, M_c = 0 \right) = C_\delta \frac{(1 - \frac{U_2}{U_1})(1 + \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}})}{1 + \frac{U_2}{U_1} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}} . \quad (4.7)$$

La relation (4.7) constitue une approximation s'appuyant sur le concept de la vitesse convective (voir également la référence [207]). La constante C_δ dépend essentiellement de la méthode utilisée pour déterminer l'épaisseur δ . Ainsi normalisée, la variation du taux d'épanouissement δ'/δ'_0 est décroissante avec le nombre de Mach convectif et la valeur semble approcher un niveau constant d'environ 40% à partir de $M_c = 1$. Ceci représente un consensus d'un grand nombre d'expériences dans la littérature (voir la figure 4.16).

4.3.1.2 Les tensions turbulentes

Des études expérimentales montrent que l'énergie cinétique de turbulence est réduite dans un écoulement à haut nombre de Mach convectif. Normalisée par l'énergie cinétique moyenne relative U_0^2 , l'intensité des fluctuations de vitesse dans les directions axiale et transversale diminue progressivement en fonction de la valeur de M_c (e.g. [10, 11]). En même temps, la forme des profils transversaux de ces tensions semble peu affectée. L'intensité de la contrainte tangentielle turbulente a également tendance à diminuer avec le nombre de Mach convectif. Barre *et al.* [12] ont vérifié par comparaison de diverses expériences que le rapport des densités n'est pas responsable de cette tendance stabilisante qui est donc un véritable effet de compressibilité.

Le comportement de l'anisotropie du tenseur de Reynolds est encore l'objet de discussions dans la littérature. Des tendances constatées dans différentes études expérimentales, sont parfois en désaccord. Cette situation est aggravée par le fait que, souvent, des mesures des fluctuations de vitesse ne sont pas disponibles dans la troisième direction. Il manque alors des informations nécessaires pour déduire strictement les composantes du tenseur de l'anisotropie b_{ij} . Des mesures de Goebel et Dutton [11] indiquent que la composante $\overline{w}w$ est presque identique à la composante transversale $\overline{v}v$ (voir la figure 4.17) ce qui permettrait de calculer l'énergie cinétique turbulente par la formule approximative $k = (\overline{u}u + 2\overline{v}v)/2$. Nous utiliserons cette hypothèse ultérieurement pour déduire la condition à la limite de notre calcul numérique. Ici, nous nous contentons de discuter la structure du tenseur de Reynolds en termes des composantes $\overline{u}u$, $\overline{v}v$ et $\overline{w}w$.

Le rapport des tensions normales $\overline{u}u/\overline{v}v$ augmente légèrement en fonction du M_c dans la série de mesures de Samimy et Elliott [10] (voir la figure 4.18) tandis que celui-ci est amplifié considérablement dans l'étude de Goebel et Dutton (figure 4.19). Cette modification est plus marquée du côté basse vitesse de la zone de mélange. Dans les deux études, le niveau général de la valeur de l'anisotropie des composantes normales est plus élevée que dans une couche de mélange incompressible.

L'anisotropie de la contrainte $\overline{w}w/(\sqrt{\overline{u}u}\sqrt{\overline{v}v})$ prend une valeur comparable au cas incompressible, avec une légère décroissance en fonction du nombre de Mach convectif dans ces deux études (voir les figures 4.20 et 4.21). Cette tendance a également été constatée par Barre *et al.* par référence à des mesures d'un grand nombre d'auteurs.

Nous remarquons que ces observations concernant la structure du tenseur de Reynolds sont qualitativement en accord avec les résultats dans un écoulement homogène cisailé, i.e. l'influence de la compressibilité tend à augmenter l'anisotropie des composantes normales et à diminuer l'anisotropie de la tension tangentielle. Nous allons discuter l'analogie entre ces deux écoulements par la suite.

4.3.1.3 Les corrélations triples

Les composantes principales du transport diffusif des tensions turbulentes dans cet écoulement sont $(\overline{uuu})_{,y}$, $(\overline{vvv})_{,y}$ et $(\overline{uvv})_{,y}$. Ces trois corrélations triples de vitesses ont été déterminées par Samimy et Elliott. Normalisées par la vitesse relative U_0 , ces grandeurs diminuent en fonction de M_c . La figure 4.22 montre la composante $\overline{uvv}$, où on constate que le niveau général est néanmoins plus élevé que celui observé dans une couche de mélange incompressible. L'évaluation des divers rapports des corrélations triples ne révèle pas de différence de comportement selon la direction [184].

4.3.1.4 Le flux de masse turbulent

Les corrélations entre fluctuations de vitesse et de densité ont deux rôles dans un écoulement inhomogène compressible à haut nombre de Reynolds: elles apparaissent explicitement dans les équations de bilan d'énergie totale et de la tension de Reynolds (voir le paragraphe 1.4.6); elles servent par ailleurs à distinguer la moyenne de Favre de la moyenne de Reynolds d'une variable.

La différence entre les moyennes de Favre et Reynolds s'écrit simplement, pour la vitesse:

$$\bar{u}_i - \tilde{u}_i = \overline{u_i''} \quad . \quad (4.8)$$

Pour les corrélations doubles nous obtenons la différence suivante:

$$\overline{u_i' u_j'} - \widetilde{u_i'' u_j''} = \overline{u_i''} \cdot \overline{u_j''} - \frac{\overline{\rho' u_i' u_j'}}{\bar{\rho}} \quad , \quad (4.9)$$

qui dépend d'un terme de flux de masse au carré et de la corrélation d'ordre trois entre densité et vitesses. Nous n'avons pas accès à mesures de ce dernier terme, mais nous supposons que celui-ci est négligeable devant le premier terme.

Nous n'avons trouvé qu'une seule étude, où les profils du flux de masse $\overline{u_i''}$ ont été déterminés dans une couche de mélange (Bowersox et Schetz [208, 93]). Les valeurs des nombres caractéristiques ($M_c = 0.39$, $r = 0.74$ et $s = 0.32$) correspondent à la gamme étudiée numériquement dans la présente étude. La figure 4.23 montre les deux composantes axiale et transversale de $\overline{u_i''}$. Le maximum est de 0.5% et 0.3% respectivement de la vitesse moyenne de Favre. En vue d'une comparaison entre nos résultats numériques et des mesures expérimentales, nous considérons cette différence négligeable. En ce qui concerne la tension de Reynolds, le premier terme de la relation (4.9) conduit à une différence de 0.1% pour la composante axiale si on considère une valeur de $\overline{u'' u''}_{max} \approx 0.07 \tilde{u}^2$ (représentative d'une couche de mélange à ce nombre de Mach convectif). Des rapports analogues sont obtenus pour les autres composantes. Nous allons donc par la suite confondre les deux types de moyennes lors de la comparaison entre le calcul et l'expérience.

Evaluation des termes supplémentaires. Nous avons évalué l'ordre de grandeur des termes supplémentaires liés au flux de masse turbulent en utilisant les données des expériences de Bowersox et Schetz et de Goebel et Dutton (cas 2 à $M_c = 0.46$) ainsi qu'une approximation analytique des profils de similitude (voir l'annexe H.1 pour les détails).

Sur les figures 4.24 et 4.25 nous constatons que le terme source $-(\overline{u_i''} \bar{p}_{,j} + \overline{u_j''} \bar{p}_{,i})$ dans l'équation du tenseur de Reynolds est petit devant le terme dominant (la production et la dissipation respectivement). Ceci est dû à la faible valeur du gradient de pression qui apparaît comme un facteur multiplicatif.

La figure 4.26 montre les deux expressions liées au flux de masse dans l'équation de l'énergie totale en comparaison avec le terme de dissipation visqueuse. Le terme de gradient de pression $-\bar{p}_{,y} \overline{v''}$ est négligeable. Notre estimation de l'expression faisant intervenir le gradient du flux de masse $\bar{p} \overline{v''}_{,y}$, par contre, donne un ordre de grandeur comparable à celui du terme de dissipation. Il faut noter que ces valeurs approximatives s'appuyent sur un certain nombre d'hypothèses.

Néanmoins, cette comparaison semble indiquer que le terme de gradient du flux de masse n'est probablement pas négligeable dans l'équation de l'énergie totale.

Test des modèles pour le flux de masse turbulent. Finalement, nous pouvons faire quelques remarques qualitatives sur les propositions pour la modélisation du flux de masse présentées dans le paragraphe 1.4.6.1. En utilisant les profils de similitude du paragraphe précédent, le modèle de transport isotrope par gradient de densité (1.96) donne les formules suivantes (voir l'annexe H.2):

$$\frac{\overline{v''}}{\tilde{u}} = \frac{0.008}{\sigma_\rho} \cdot g(\eta), \quad \frac{\overline{u''}}{\tilde{u}} = -\eta \delta' \frac{\overline{v''}}{\tilde{u}} \quad (4.10)$$

Sur la figure 4.27 nous constatons un bon accord avec l'expérience pour la composante transversale en utilisant une valeur de $\sigma_\rho = 7.0$ pour le coefficient du modèle isotrope. Dans la littérature, les valeurs utilisées sont habituellement de l'ordre un (e.g. Sarkar et Lakshmanan [52] utilisent $\sigma_\rho = 0.7$). Pour la composante axiale, le modèle isotrope donne une valeur zéro sur l'axe et un niveau généralement faible à cause du facteur δ' . Ceci est en contradiction avec l'expérience, où cette composante est de l'ordre de la composante transversale (voir la figure 4.23).

Dans le cas d'un modèle algébrique, non-isotrope (e.g. la relation (1.95)) nous pouvons estimer les résultats par les expressions suivantes:

$$\frac{\overline{u''}}{\tilde{u}} = f(M_t) g(\eta) \left\{ (-\eta \delta') (b_{11} + \frac{1}{3}) + b_{12} \right\}, \quad \frac{\overline{v''}}{\tilde{u}} = f(M_t) g(\eta) \left\{ (-\eta \delta') b_{12} + (b_{22} + \frac{1}{3}) \right\}, \quad (4.11)$$

où la fonction $g(\eta)$ est maximale pour $\eta = 0$. Ici, les deux composantes sont de même ordre puisque b_{12} et $b_{22} + 1/3$ sont comparables (à noter que le changement de signe entre les deux flux $\overline{u''}$ et $\overline{v''}$ est représenté par les valeurs de l'anisotropie). Nous remarquons cependant que la composante axiale est encore moins importante que la composante transversale pour le développement de ce type d'écoulement.

On peut donc conclure que la différence entre les moyennes de Favre et de Reynolds est faible dans le cas d'une couche de mélange à $M_c = 0.4$ et $\rho_2/\rho_1 = 0.74$. Néanmoins, le flux de masse turbulent dans la direction transversale $\overline{v''}$ pourrait jouer un rôle dans le bilan de l'énergie totale même dans le cadre de la moyenne de Favre. Un modèle algébrique isotrope semble capable de capter la composante principale $\overline{v''}$ avec un coefficient adapté ($\sigma_\rho = 7.0$).

4.3.2 Les approches pour expliquer la stabilisation de la couche de mélange

Un certain nombre d'études ont été publiées qui tentent d'expliquer le phénomène de stabilisation de la couche de mélange par différentes approches.

- Papamoschou et Roshko ont souligné le problème de propagation d'ondes. Dans un écoulement supersonique, une perturbation est confinée à un cône de Mach et l'information ne peut pas remonter contre le courant. Dans cette situation, on peut s'attendre à une modification du processus d'instabilité qui est à la base de la turbulence. Des analyses de stabilité linéaire de Sandham et Reynolds [209] montrent que l'amplification de l'onde la plus déstabilisée est effectivement réduite en fonction du nombre de Mach convectif. Des simulations numériques directes de l'instabilité temporelle avec un profil de vitesse en tangente hyperbolique ont confirmé ces résultats. Des simulations directes tridimensionnelles du problème temporel [210] ont ensuite révélé une modification de la structure des régions tourbillonnaires qui tendent progressivement à prendre une forme tridimensionnelle. L'étude expérimentale des structures cohérentes à haut nombre de Mach convectif est compliquée par des problèmes de visualisation [206] et une confirmation définitive des observations numériques n'a pas été reportée dans la littérature.

- Le concept des chocs instationnaires (*shocklets*, voir le paragraphe 1.4.4.2) a mené Zeman [76] à expliquer la stabilisation de la couche de mélange par la dissipation supplémentaire associée à ces événements. Avec une certaine calibration, les modèles pour la partie dilatationnelle de la dissipation prédisent une réduction du mélange turbulent en fonction de la valeur de M_c ainsi que la diminution du taux d'épanouissement correspondante. L'existence des *shocklets* n'a pu être confirmée avec certitude dans des expériences, sauf pour l'étude de Papamoschou [80]. Par contre, des *shocklets* ont été observés par les DNS bi- et tridimensionnelles avec et sans cisaillement moyen [47, 78] ainsi que par la DNS de la couche de mélange temporelle à $M_c = 1.2$ effectuée par Vreman (voir également la référence [14]). Malgré la présence de ces chocs instationnaires dans l'écoulement, la contribution de la dissipation compressible reste néanmoins faible dans l'étude de Vreman avec une valeur maximale localisée qui est inférieure à 10% de la dissipation totale. L'auteur conclut que l'influence de cet effet sur la réduction du taux d'épanouissement est négligeable. Vreman montre que le deuxième terme explicite associé à la dilatation, la corrélation pression-dilatation, n'est également pas significatif dans cette gamme de M_c . On peut donc en déduire que les effets énergétiques ne sont pas responsables de la stabilisation de la couche de mélange. Ceci correspond aux conclusions tirées lors de l'étude du cisaillement homogène (voir le paragraphe 3.3).
- Dans le paragraphe 1.4.3, nous avons déjà présenté l'approche structurale de Vreman qui tente à expliquer la réduction du taux d'épanouissement par le comportement de la corrélation pression-déformation. Vreman travaille avec les grandeurs intégrées sur une section transversale. Dans ce cadre, toutes les composantes du tenseur de pression-déformation diminuent en fonction du nombre de Mach convectif. Il démontre avec un modèle algébrique pour les grandeurs intégrales que la prise en compte de cette variation des termes redistributeurs est capable de prédire la stabilisation de la couche de mélange temporelle entre $M_c = 0.2$ et $M_c = 1.2$. L'approche globale de Vreman est analogue à notre approche locale de modélisation des effets structurels dans l'écoulement homogène cisailé (voir la relation (3.33)) que nous allons appliquer à la couche de mélange. Dans le paragraphe suivant, nous nous intéressons plus particulièrement à l'analogie entre la situation homogène et l'écoulement inhomogène dans une couche de mélange.

4.3.3 L'analogie entre le cisaillement homogène et la couche de mélange

Sarkar [68] a établi une analogie entre le taux de croissance asymptotique de l'énergie cinétique turbulente dans un écoulement homogène cisailé et l'épanouissement d'une couche de mélange spatiale en équilibre. Pour un profil de similitude de k donné, l'évolution longitudinale de l'intégrale transversale de l'énergie turbulente $k^* \equiv \int_{-\infty}^{\infty} k \, dy$ dans une couche de mélange s'écrit :

$$\frac{d_x k^*}{k^*} = \frac{\delta'}{\delta} . \quad (4.12)$$

L'évolution temporelle de k dans un cisaillement homogène peut être transformée par une vitesse de convection $U_c = x/t$ en une évolution spatiale, à savoir:

$$\frac{d_x k}{k} = \Lambda_{\infty} \frac{S}{U_c} , \quad (4.13)$$

où Λ_{∞} correspond à la valeur asymptotique du taux de croissance de k dans l'écoulement homogène cisailé. Sarkar pose l'égalité des deux expressions (4.12) et (4.13), ce qui permet d'obtenir la relation suivante (avec $S = \Delta U/\delta$):

$$\delta' = \Lambda_{\infty} \frac{\Delta U}{U_c} . \quad (4.14)$$

D'après l'équation (4.14), le taux d'épanouissement d'une couche de mélange serait directement proportionnel à la croissance de k du cisaillement homogène correspondant. Nous rappelons que Λ_{∞} décroît quand on augmente soit la valeur initiale du nombre de Mach turbulent soit celle du

nombre de Mach de la déformation. Malgré l'analogie qui existe donc entre les grandeurs globales des deux écoulements, nous notons deux différences importantes:

- Dans la zone de mélange, une région à cisaillement moyen constant n'existe pas. De l'énergie turbulente est transportée vers les cotés par l'effet diffusif; une vitesse de convection transversale est présente; les profils des tensions turbulentes sont inhomogènes dans la direction transversale. Il est important de noter que les champs moyen et turbulent sont couplés mutuellement, contrairement au cas du cisaillement homogène, où le couplage est unidirectionnel par définition. Néanmoins, nous avons déjà noté dans le cas incompressible que la structure du tenseur de Reynolds est constante à travers une grande partie de la région de mélange et qu'elle est très similaire à celle rencontrée en cisaillement homogène.
- Dans le cas du cisaillement homogène, il s'agit d'un problème temporel à valeurs initiales. L'influence de la compressibilité varie en fonction des valeurs des nombres de Mach au début de la simulation et elle se répercute sur la structure asymptotique de la turbulence (i.e. à la fin de la simulation). Dans une zone de mélange spatial, par contre, l'influence des conditions en amont, i.e. des conditions génératrices, est perdue quand l'équilibre est établie. Le fait que le seul paramètre M_c réussisse à corrélérer raisonnablement les diverses expériences est un indice que le développement à l'équilibre n'est effectivement pas dicté par les conditions initiales. Pour ce qui concerne l'état de similitude, les conditions de l'écoulement externe maintiennent dans chaque section transversale le niveau des nombres de Mach locaux. L'importance des effets de compressibilité est donc directement contrôlée par la condition aux limites.

Le deuxième point est fondamental puisqu'il implique la possibilité d'une modélisation locale (i.e. sans mémoire) de l'influence de la compressibilité sur le développement de la couche de mélange.

A cause de la différence du type des deux écoulements, il est difficile de situer quantitativement les niveaux de compressibilité. Sur les figures 4.28 et 4.29 nous avons tracé des distributions d'équilibre des nombres de Mach de l'expérience de Goebel et Dutton à $M_c = 0.2$ et $M_c = 0.69$. Le maximum au centre de la zone de mélange atteint des valeurs de $M_t = 0.3$ et $M_d = 0.8$ dans le deuxième cas. Celui-ci est caractérisé par un taux d'épanouissement relatif de $\delta'/\delta'_0 \approx 0.6$. L'analogie de Sarkar donne, pour le taux de croissance relatif du cisaillement homogène correspondant:

$$\frac{\Lambda_\infty}{\Lambda_\infty(M_c = 0)} = \frac{U_c}{U_c(M_c = 0)} \cdot \frac{\delta'}{\delta'_0} \quad , \quad (4.15)$$

où la formule de Papamoschou et Roshko [204] pour la vitesse de convection peut être utilisée:

$$U_c = \frac{c_2 U_1 + c_1 U_2}{c_1 + c_2} \quad . \quad (4.16)$$

Dans le cas de la couche de mélange se développant à $M_c = 0.69$, la valeur équivalente donnée par les formules (4.15) et (4.16) est de $\Lambda_\infty/\Lambda_\infty(M_c = 0) \approx 0.67$. Ceci correspond à ce qui est obtenu dans la simulation directe A2 de Sarkar évoluant à partir de $M_{t0} = 0.4$ et $M_{d0} = 1.02$. Ces valeurs initiales des paramètres caractéristiques sont alors comparables au maxima de la couche de mélange. Néanmoins, en cours de la simulation du cisaillement homogène, la différence augmente.

L'analogie entre le cisaillement homogène et la couche de mélange est imparfaite. Son caractère de problème à conditions aux limites distingue, en particulier, la zone de mélange de l'écoulement homogène. Par conséquent, nous ne nous attendons pas à une importance des effets de mémoire de la compressibilité dans la couche de mélange.

4.3.4 Les études numériques précédentes

Le travail de Zeman [76], déjà mentionné dans ce qui précède, a permis de retrouver les tendances observées expérimentalement avec une modélisation linéaire de la pression-déformation et un modèle de dissipation dilatationnelle (1.66).

	U_2/U_1	$\bar{\rho}_2/\bar{\rho}_1$	M_c	T_t	$\bar{p}$	M_1	M_2	U_1	U_2
cas 1	0.78	0.76	0.2	295	46000	2.01	1.38	515	404
cas 3	0.18	0.57	0.69	285	53000	1.96	0.27	499	92

Tab. 4.3: Conditions de l'expérience de Goebel et Dutton [11], unités S. I.

Gatski *et al.* [69] et Sarkar et Lakshmanan [52] ont utilisé les modèles LRR et SSG en conjonction avec un modèle de transport par gradient isotrope (1.96) pour le flux de masse turbulent. Ils ont étudié le cas avec un rapport de densité de un. Les résultats de ces études montrent une réduction du taux d'épanouissement en fonction de M_c quand les expressions énergétiques ε_d et $\overline{p'u''_{k,k}}$ sont négligées. Quantitativement, cette réduction est néanmoins faible. L'inclusion du modèle (1.65) de Sarkar *et al.* pour la dissipation dilatationnelle a permis d'obtenir une réduction plus forte, proche de l'expérience. La même conclusion a été tirée de l'étude de Sarkar [192] utilisant le modèle pour la dissipation dilatationnelle et le modèle pour la pression-dilatation (1.51) avec des constantes $\alpha_{1...3}$ réajustées.

El-Baz et Launder [46] ont appliqué le modèle FLT-EL ((1.40) et (1.64)) aux cas de Samimy et Elliott. Dans la région de similitude, l'accord avec l'expérience est qualitativement correct en ce qui concerne les profils des tensions turbulentes et le taux d'épanouissement.

Cruaud [211] a effectué des calculs numériques avec une fermeture au second ordre à masse volumique variable, i.e. les termes explicites de compressibilité ont été négligés. Elle a utilisé la forme simplifiée du modèle LRR pour calculer deux des cas à bas nombre de Mach convectif ($M_c = 0.2; 0.45$) de l'expérience de Goebel et Dutton. Un bon accord avec les mesures est obtenu en ce qui concerne le développement initial ainsi que l'état d'équilibre.

4.3.5 Les calculs effectués avec nos fermetures du second ordre

4.3.5.1 Les cas traités

Nous avons consulté la base de données des écoulements libres compressibles de Settles et Dodson [212] afin de choisir une étude expérimentale comme support pour le calcul. Nous avons retenu l'expérience de Goebel et Dutton. Les expérimentateurs conseillent explicitement le cas 3 de la série de mesures pour la comparaison avec le calcul numérique [212]. Ce cas est caractérisé par un nombre de Mach convectif de 0.69 qui provoque une réduction considérable du taux d'épanouissement. Nous avons également effectué des calculs du cas 1 à faible M_c comme référence. Ces deux cas offrent l'avantage d'une température totale approximativement constante et égale dans les deux courants. Ceci simplifie la reconstruction des profils des variables thermodynamiques qui n'ont pas été mesurés à l'entrée du domaine de calcul. Les caractéristiques des deux courants sont données dans le tableau 4.3. Puisque les rapports de vitesse et de densité ne sont pas les mêmes dans les deux cas, nous serons obligés d'utiliser la formule (4.7) de Papamoschou et Roshko pour normaliser la valeur de l'épanouissement.

4.3.5.2 Les maillages utilisés

Le domaine de calcul commence à la première section de mesure de l'expérience qui se situe à $x = 10 \text{ mm}$ du bord de fuite. Il couvre une distance axiale de 0.45 m et 0.3 m respectivement pour chacun des deux cas. Pour la distance transversale, les domaines considérés tiennent compte de l'épanouissement qui est plus élevé dans le cas 3. Une distance supérieure à dix fois l'épaisseur maximale de la région de mélange est utilisée (longueur du domaine dans la direction y dans le cas 1: $L_y = 0.1$, cas3: $L_y = 0.2$).

Nous présentons ici des résultats obtenus sur des maillages à 6900 nœuds dans le cas 1 et à 9480 nœuds dans le cas 3 où les gradients transversaux sont plus importants. Les maillages sont issus d'une série de calculs où nous avons raffiné la distribution des nœuds autour de l'axe de la zone de mélange.

4.3.5.3 Les conditions aux limites – rôle de la pression moyenne

L'expérience nous fournit des mesures de la vitesse axiale moyenne $\tilde{u}$, des trois tensions $\tilde{u}\tilde{u}$, $\tilde{v}\tilde{v}$ et $\tilde{u}\tilde{v}$. La température totale est de plus constante dans une section transversale. Il nous manque principalement la variation de la masse volumique, de la vitesse transversale $\tilde{v}$ et de la pression. Pour les grandeurs liées à la turbulence, nous utilisons l'hypothèse d'égalité des tensions normales $\tilde{w}\tilde{w}$ et $\tilde{v}\tilde{v}$ pour déduire l'énergie cinétique k (voir paragraphe 4.3.1.2) et l'hypothèse de Boussinesq (G.1) pour calculer le profil d'entrée de la dissipation.

En l'absence des mesures détaillées, nous supposons que la pression est constante sur la frontière du domaine d'intégration. Afin de déduire le profil de la masse volumique à l'entrée, nous supposons que la vitesse transversale est nulle, ce qui permet d'écrire:

$$\bar{p} = \frac{\bar{p}}{RT_t - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \tilde{u}^2} . \quad (4.17)$$

Cependant, un simple bilan de masse montre que le processus de mélange crée une vitesse transversale dirigée vers le côté à faible quantité de mouvement. De plus, un bilan de quantité de mouvement transversale pour la couche de mélange montre que la pression varie avec y en fonction de la tension $\bar{p}\tilde{v}\tilde{v}$ [25]:

$$\partial_y(\bar{p}) \approx -\partial_y(\bar{p}\tilde{v}\tilde{v}) . \quad (4.18)$$

Néanmoins, n'ayant pas de mesures pour la vitesse $\tilde{v}$ et la pression, on est obligé d'utiliser la relation (4.17). Ceci a pour conséquence de créer une perturbation du champ de pression sur l'axe près de l'entrée, qui se propage sous forme d'une onde de détente dans la partie supersonique du domaine (voir les figures 4.30 et 4.31). Afin d'éviter l'interaction et la réflexion de cette onde sur la frontière latérale, nous imposons une condition de sortie supersonique (paragraphe 2.5.2) le long de cette frontière.

Une différence importante entre les deux cas est due au fait que le cas 1 est entièrement supersonique alors que le cas 3 a un courant supersonique et un courant subsonique. La configuration mixte est habituellement utilisée dans l'expérience afin d'obtenir plus facilement un haut nombre de Mach convectif. En ce qui concerne le traitement de la condition aux limites en pression, ce dernier cas est très distinct du cas purement supersonique. En accord avec les lois de propagation d'ondes, la pression est imposée dans le courant supersonique rentrant dans le domaine ainsi que dans le courant subsonique sortant du domaine. La dépression due à l'incertitude sur les variables d'entrée affecte la valeur de la pression dans le courant subsonique proche de l'entrée. Ceci crée un gradient axial positif puisque la pression de référence doit être respectée à la sortie. Dans la zone de mélange, les profils de la pression suivent essentiellement la formule de couche limite (4.18), i.e. un minimum de pression sur l'axe est obtenu correspondant au maximum de la tension de Reynolds $\bar{p}\tilde{v}\tilde{v}$. Enfin, la montée du niveau de pression du côté subsonique se propage dans le courant supersonique sous forme des lignes de Mach. Le résultat principal de cette situation est une diminution de la vitesse axiale dans l'écoulement subsonique.

Les figures 4.32 et 4.33 montrent les profils successifs de la vitesse axiale obtenue par le calcul et mesurée dans l'expérience. Le ralentissement dans le calcul est de l'ordre de 20%. Nous constatons que cet effet est encore plus marqué dans l'expérience. Apparemment, un fort gradient de pression a été créé dans le dispositif expérimental. Goebel et Dutton ne donnent pas d'information sur la source du ralentissement dans le cas 3. L'apparition des gradients de pression axiaux dans le cas supersonique-subsonique a été observée et discutée dans la référence [204].

b'	expérience	équation (4.7)	LRR	SSG	FLT	Boussinesq	SZL
cas 1	0.020	0.020	0.026	0.023	0.023	0.020	0.017
cas 3	0.059	0.103	0.068	0.067	0.050	0.060	0.046

Tab. 4.4: Taux d'épanouissement de la couche de mélange de Goebel et Dutton dans la région de similitude: comparaison entre les mesures, les résultats des calculs et la formule de Papamoschou et Roshko (4.7) pour une expérience effectuée dans des conditions équivalentes mais à nombre de Mach convectif nul.

4.3.5.4 Résultats des calculs

Au regard des résultats de la couche de mélange en régime incompressible, nous avons abandonné le modèle SL90 et la variante SZL-b de la fermeture algébrique non-linéaire.

Le champ moyen. En accord avec l'expérience, l'épaisseur de la région de mélange est défini par le critère suivant:

$$b \equiv y_1(\tilde{u} = 0.9 U^*) - y_2(\tilde{u} = 0.1 U^*) \quad . \quad (4.19)$$

Les profils transversaux seront alors présentés en fonction de la coordonnée $\eta = (y - y_0)/b$, où y_0 est le milieu des deux points y_1 et y_2 .

L'évolution de l'épaisseur b devient linéaire très rapidement et nous voyons sur la figure 4.34 que les résultats des calculs sont proches de la courbe expérimentale dans les deux cas traités. Le taux d'épanouissement calculé dans la région établie est donné dans le tableau 4.4 en comparaison avec l'expérience. Dans les deux cas, les calculs avec les fermetures du second ordre et du premier ordre donnent des prédictions qui sont contenues dans une marge d'environ $\pm 20\%$ par rapport à la valeur de l'expérience. La dispersion des points de mesures, nous amène à considérer ceci comme un bon accord. Comme nous l'avons observé précédemment, le modèle LRR donne le plus fort épanouissement, le modèle $k-\varepsilon$ non-linéaire conduit à un épanouissement faible.

Afin d'évaluer l'effet de la compressibilité sur l'épanouissement, nous avons inclus dans le tableau 4.4 le taux d'épanouissement donné par la formule (4.7) avec $C_\delta = 0.165$ [11]. D'après cette valeur de référence, le cas 1 peut être classé comme cas "incompressible", tandis que les résultats obtenus dans le cas 3 font apparaître une réduction de 40% de l'épanouissement. Nous remarquons que la réduction de l'épanouissement par rapport à sa valeur "incompressible" est qualitativement prédit par l'ensemble des modèles.

Sur la figure 4.35 nous avons tracé le taux d'épanouissement relatif b'/b'_0 en fonction du nombre de Mach convectif. Ce que nous obtenons en utilisant le modèle SSG est comparé au résultats de Sarkar et Lakshmanan [52]. Leur fermeture au second ordre sans corrections de compressibilité prédit une réduction de l'épanouissement très faible, seulement l'utilisation d'un modèle pour la dissipation dilatationnelle permet un accord avec l'expérience. Nos résultats, par contre, suivent la tendance donnée par les mesures sans termes explicites de compressibilité. Puisque nous employons uniquement un modèle à masse volumique variable, il ne s'agit pas d'un effet de nombre de Mach que nous observons dans notre calcul. Il faut souligner que Sarkar et Lakshmanan ont simulé un cas avec une égalité de la masse volumique dans les deux courants. Pour la comparaison, il reste alors une incertitude quant à la formule approximative (4.7) qui donne la valeur de normalisation b'_0 . Nous notons de plus sur cette figure que la réduction du taux d'épanouissement relatif obtenue par Cruaud [211] avec le modèle LRR simplifié (IP) sans corrections est qualitativement en accord avec nos résultats. Nous pensons que l'évolution du rapport b'/b'_0 en fonction du nombre de Mach dans l'expérience de Goebel et Dutton peut en partie être attribuée à l'influence du rapport des densités. Ceci pourrait expliquer la bonne performance des fermetures à masse volumique variable dans ce cas particulier, contrairement aux résultats de Sarkar et Lakshmanan et d'autres auteurs [76].

La réduction du taux d'épanouissement relativement à la valeur théorique pour $M_c = 0$ est prédite par notre fermeture sans corrections de compressibilité.

Les tensions de Reynolds. La figure 4.36 montre l'évolution des maxima des contraintes turbulentes. Un état constant est atteint vers la fin du domaine d'intégration dans le cas 1. Dans le cas 3, la tension $\widetilde{uu}$ croît encore à la dernière station de mesure dans le calcul ainsi que dans l'expérience. Les profils de cette grandeur ne sont alors pas strictement des profils de similitude. Ceci pourrait être dû au gradient de vitesse axiale qui est présent dans la partie subsonique de l'écoulement. Sauf pour la région proche de l'entrée, qui a plutôt un caractère de sillage, l'évolution des maxima des tensions est bien prédit par la fermeture du second ordre.

Les profils des tensions turbulentes à la dernière station de mesure ($x = 450mm$ pour le cas 1; $x = 200mm$ pour le cas 3) sont montrés sur les figures 4.37 et 4.38. Nous notons d'abord la dispersion plus marquée des mesures dans le cas 3 qui induira des variations importantes quand on calculera par la suite des rapports des grandeurs (anisotropie). Nous constatons ici la diminution de l'intensité des tensions dans le cas à haut nombre de Mach convectif par rapport au cas 1. Le calcul prédit cette tendance. Nous remarquons que Samimy et Elliott [10] ont exprimé des doutes sur l'utilisation de l'échelle U_0^2 pour la normalisation des tensions. Pourtant, ceci semble le seul choix qui se présente. En considérant la qualité des mesures, les prédictions de la fermeture du second ordre sont généralement satisfaisantes. L'exception est la composante transversale dans le cas 3 qui est surestimée de 40% environ.

Nous observons que les profils de toutes les composantes de la tension de Reynolds sont plus larges dans le cas à bas nombre de Mach convectif. Dans le cas 3, la zone où les fluctuations de vitesse sont importantes est visiblement réduite du côté de haute vitesse et densité (η positif). Les profils sont alors asymétriques par rapport à la position du maximum. Ceci est cohérent avec la forme des profils de la vitesse moyenne (cf. figure 4.33) qui induit une dissymétrie du cisaillement (voir également les profils correspondant dans la référence [76]).

Nous notons que la contrainte tangentielle a un signe positif dans le courant à basse vitesse du cas 1. Ceci est dû à la condition d'entrée dont l'influence persiste visiblement très loin en aval par convection.

La réduction de l'intensité des tensions turbulentes à haut M_c par rapport à l'échelle U_0^2 est qualitativement prédite par la fermeture au second ordre.

L'anisotropie. Nous considérons maintenant l'anisotropie du tenseur de Reynolds. Le rapport des composantes normales $\widetilde{uu}/\widetilde{vv}$ (figure 4.39) est très bien prédit par les modèles du second ordre dans le cas 1. Dans le cas à haut nombre de Mach convectif, les modèles ne suivent pas l'augmentation importante constatée dans l'expérience. Ici, il faut probablement être prudent puisque les mesures sont très dispersées. Néanmoins, nous constatons une anisotropie marquée dans le courant subsonique qui est consistante avec le ralentissement de l'écoulement extérieur si on considère que la production de la composante axiale $\widetilde{uu}$ dépend directement du gradient axial de la vitesse $\widetilde{u}$: $P_{11}/2 = -\overline{\rho}\widetilde{uu}\widetilde{u}_{,x} - \overline{\rho}\widetilde{uv}\widetilde{u}_{,y}$. Cette anisotropie de l'écoulement externe dans le cas 3 est prédite par les calculs numériques.

En ce qui concerne l'anisotropie de la contrainte $-\widetilde{uv}/(\sqrt{\widetilde{uu}}\sqrt{\widetilde{vv}})$ (figure 4.40), un accord satisfaisant est obtenu avec l'ensemble des modèles de second et de premier ordre dans les deux cas simulés. Une comparaison plus précise n'est pas possible à cause de la qualité des mesures dans le cas à haut M_c . Néanmoins, la correspondance générale entre le calcul et les mesures dans les deux cas explique l'accord obtenu pour le taux d'épanouissement.

La figure 4.41 montre les composantes du tenseur d'anisotropie b_{ij} obtenues par le calcul avec le modèle SSG dans les deux cas traités. L'anisotropie donnée par ce modèle – tout comme pour les autres variantes de la fermeture du second ordre – est quasi-identique dans les deux cas (à l'exception de la partie hors de la zone de mélange dans le cas 3 où un gradient de vitesse est présent). L'analyse des bilans des équations pour les tensions de Reynolds (non montrées ici)

confirme que dans les deux cas les termes individuels se comportent de manière très similaire. Par conséquent, la structure du tenseur est analogue. La réduction du taux d'épanouissement calculé n'est alors pas accompagnée par un changement de l'équilibre entre les expressions.

En prédisant un profil d'anisotropie indépendant du nombre de Mach convectif, les fermetures du second ordre classiques ne peuvent pas capter l'augmentation de l'anisotropie des composantes diagonales constatée dans l'expérience.

Application du modèle LRR-CCM. Nous avons effectué des calculs de la couche de mélange à $M_c = 0.69$ avec le modèle LRR-CCM qui constitue une correction structurelle par une modification de la partie rapide du modèle de base LRR. Nous rappelons ici sa formulation:

$$\Pi_{ij}^r = \Pi_{ij}^r)_{LRR} \cdot \exp(-M_d^2 \cdot \alpha), \quad \Pi_{ij}^s = \Pi_{ij}^s)_{LRR} \quad , \quad (4.20)$$

où $\alpha = 1$ correspond à la version testée dans l'écoulement homogène du chapitre 3. Ici nous avons fait varier la valeur de la constante entre $\alpha = 1$ et $\alpha = 40$ puisque la similitude des deux écoulements n'est pas parfaite comme nous l'avons remarqué ci-dessus.

La figure 4.42 montre que la forme des profils de vitesse est pratiquement insensible à la modification apportée par le modèle LRR-CCM. Le taux de croissance b' montre une tendance qui s'inverse: la modification avec $\alpha = 1$ amplifie légèrement le taux d'épanouissement, l'augmentation de la valeur de la constante à $\alpha = 40$ fait retomber l'épanouissement à la valeur du modèle de base. Les courbes de la contrainte turbulente (figure 4.44) sont cohérentes avec cette observation.

Les profils de l'anisotropie sont reproduits sur les figures 4.45 et 4.46. Nous constatons l'augmentation progressive de l'anisotropie des composantes normales avec la valeur de la constante α . Avec $\alpha = 1$, nous avons déjà observé cette augmentation lors du calcul du cisaillement homogène. Dans le cas présent nous remarquons que l'effet est dissymétrique puisque la distribution du nombre de Mach de déformation a un biais vers le fluide à haut densité à cause de la définition de la vitesse du son.

En accord avec l'état asymptotique du calcul du cisaillement homogène, le modèle LRR-CCM induit seulement une faible modification de l'anisotropie tangentielle. Par conséquent, la vitesse moyenne axiale est peu affectée. Néanmoins, la tendance observée dans le cas présent est opposée à celle constatée dans le cas homogène, i.e. nous obtenons une légère diminution de la valeur de b_{12} qui est plus marquée dans le courant inférieure (η négatif). De ce côté de l'axe, un gradient axial de vitesse est présent et le nombre de Mach de déformation est moins élevé. Ceci explique la dissymétrie des profils. Le fait que l'effet de la modification LRR-CCM est inversé dans la couche de mélange souligne l'imperfection de l'analogie entre les deux types d'écoulements.

Finalement, la figure 4.47 donne une vue du développement axial des maxima des tensions selon le modèle LRR-CCM. Ce graphe montre que le niveau des tensions normales est sensible au modèle utilisé sans que la contrainte tangentielle soit beaucoup modifiée. Nous n'avons pas essayé d'optimiser la valeur de la constante α . Sur la base d'un calcul particulier ceci ne serait pas significatif.

Une correction structurelle du type LRR-CCM est capable de reproduire la modification de l'anisotropie constatée dans l'expérience de Goebel et Dutton à haut nombre de Mach convectif. La correction du modèle a peu d'influence sur le taux d'épanouissement.

4.3.6 Conclusion

Dans une première partie du chapitre, nous avons discuté quelques aspects de l'écoulement d'une couche de mélange compressible à l'aide des données expérimentales et de la DNS. L'évaluation du flux de masse turbulent a montré qu'il pouvait affecter par son gradient transversal le bilan de l'énergie totale même si la différence entre la moyenne de Favre et celle de Reynolds est petite.

Nous avons ensuite simulé le mélange turbulent entre deux courants à haut nombre de Mach

relatif. L'accord entre le calcul et deux expériences particulières est généralement satisfaisant. La réduction du taux d'épanouissement relatif b'/b'_0 est correctement prédit. Ce résultat est obtenu avec une fermeture qui est l'extension à masse volumique variable des modèles conçus pour le régime incompressible.

Nous avons montré que l'anisotropie des composantes normales de la tension turbulente peut être augmentée par une réduction du terme de redistribution par la pression en fonction du nombre de Mach de gradient local. Il faut cependant noter que la zone de mélange devrait avoir tendance à faire intervenir de façon privilégiée le rôle des conditions aux limites au dépens du rôle des conditions initiales (et donc de la mémoire) plus marqué en turbulence homogène. Il faudrait néanmoins des expériences plus précises afin de déterminer avec certitude si une telle tendance existe en général. Le modèle de pression-déformation modifié LRR-CCM a peu d'influence sur la contrainte tangentielle. L'introduction de termes supplémentaires (pression-dilatation, dissipation dilatationnelle) pour améliorer la prédiction de l'épanouissement ne semble pas nécessaire dans la gamme du nombre de Mach convectif étudiée ($M_c \leq 0.7$).

Nous avons noté la bonne performance des fermetures au premier ordre pour ce qui concerne la prédiction des paramètres globaux comme le taux d'épanouissement. Dans ce type d'écoulements dominé par le cisaillement, où la convection des tensions ne joue pas un rôle dominant, la fermeture au premier ordre suffit probablement pour décrire l'écoulement moyen. A l'égard du caractère local de l'écoulement (i.e. des effets de mémoire ne semblent pas jouer un rôle important), une éventuelle correction de la structure du tenseur de Reynolds pourrait être incorporée dans une relation constitutive. Analogue à l'idée du modèle LRR-CCM, les coefficients de cette relation (cf. équation 1.118) pourraient varier non seulement en fonction de la rapidité de la déformation τ_t/τ_d (prise en compte dans le modèle SZL) mais également en fonction d'un nombre de Mach, e.g. τ_a/τ_d . Cette possibilité n'a pas encore été exploitée à l'heure actuelle.

Chapitre 5

Etude des écoulements compressibles en présence des parois

5.1 Introduction

La plupart des problèmes de la mécanique des fluides sont caractérisés par la présence de parois solides. Dans les écoulements turbulents, ce sont les effets d'adhérence et de la non-perméabilité qui modifient considérablement le champ des fluctuations. Face à la complexité de la modélisation de ces zones et à l'alourdissement de la méthode de résolution numérique, nous avons choisi l'approche par des lois représentatives de la zone de très proche paroi (voir paragraphe 2.5.3). Ici il s'agit d'abord de valider notre fermeture en conjonction avec cette condition pariétale sur une configuration standard, i.e. une couche limite générique se développant sur une plaque plane. Nous avons effectué des calculs d'une part à haut nombre de Mach de l'écoulement externe et d'autre part dans des conditions quasi-incompressibles. La comparaison avec des mesures permettra de juger la cohérence de notre approche.

Les conditions aux limites pour les frontières solides reposent sur la structure "universelle" de couche limite établie. Cette formulation s'appuie sur un certain nombre d'approximations, notamment celles de gradients longitudinaux négligeables. En réalité, la situation idéalisée d'une couche limite sans perturbation est rarement rencontrée. A grande vitesse, l'écoulement pariétal peut être soumis à un système d'ondes créé à l'extérieur de la couche limite (dans une configuration d'aile d'avion ou dans une chambre de combustion supersonique, par exemple), elle peut aussi être influencée par des ondes générées à l'intérieur de la couche limite (rampe de compression, marche, par exemple). Dans tous ces cas, la présence d'un gradient de pression induit une déformation qui s'ajoute au cisaillement. Dans un premier temps, nous avons simulé l'écoulement supersonique sur une plaque plane avec un gradient de pression adverse imposé. Ce cas permet d'analyser le comportement de notre méthode sans courbure des lignes de courant.

Finalement, nous avons effectué des calculs d'interaction entre une couche limite et une onde de choc suffisamment forte pour provoquer un décollement qui est évidemment en conflit avec l'hypothèse d'une loi de paroi "universelle". Il est néanmoins intéressant d'évaluer l'importance du niveau de fermeture pour la prédiction des phénomènes aussi complexes engendrant une anisotropie généralement très marquée. De plus, ce type d'écoulement hors équilibre est plus influencé par l'effet de transport que les configurations étudiées auparavant. A priori, c'est un cas où l'utilisation d'une fermeture au second ordre semble appropriée. Nous notons lors de ces calculs que le champ moyen est extrêmement sensible au choix du modèle.

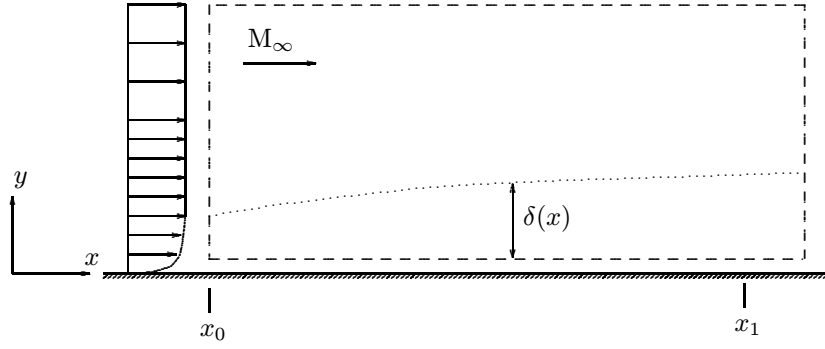


Fig. 5.1: Schéma de la configuration du calcul d'une couche limite simple.

$\nu [m^2/s]$	$u_\infty [m/s]$	$Re_\theta(x_0)$
1.6×10^{-5}	15.24	7620

Tab. 5.1: Conditions de l'expérience de Klebanoff.

5.2 La couche limite générique

On montre dans ce paragraphe les résultats de calculs des couches limites établies classiques. Le cas à basse vitesse nous sert d'abord à valider les prédictions pour les composantes du tenseur de Reynolds. A cet effet, nous avons choisi l'expérience de Klebanoff [213] qui est une référence utilisée dans des nombreuses études numériques et expérimentales.

Afin de tester la méthode de loi de paroi dans un écoulement à haute vitesse, nous avons effectué le calcul d'un cas à la limite du régime hypersonique étudié expérimentalement par Mabey (cf. [214]).

Dans les deux cas, un profil de couche limite établie correspondant à l'expérience est utilisé comme condition à la frontière amont x_0 et le résultat du calcul est ensuite comparé aux mesures sur une section aval x_1 , près de la sortie (voir schéma 5.1).

5.2.1 L'écoulement en régime incompressible

Les paramètres caractéristiques de l'expérience de Klebanoff sont donnés dans le tableau 5.1, les détails du maillage utilisé lors de notre calcul dans le tableau 5.2.

Dans son étude, Klebanoff a documenté l'écoulement dans une seule section transversale. Afin de permettre une comparaison entre les résultats du calcul et les mesures, on suppose que les profils du tenseur de Reynolds sont auto-similaires. Une solution de similitude dans le sens strict n'existe pas pour la couche limite [174]. Néanmoins, des mesures (e.g. [215, 216]) montrent un très proche équilibre au niveau des profils des corrélations doubles de vitesse successifs quand le nombre de Reynolds est suffisamment élevé ($Re_\theta \geq 6000$). La normalisation adéquate est la suivante:

$$\widetilde{u_i u_j} / u_\tau^2 = f(y/\delta) \quad , \quad (5.1)$$

que nous adoptons ici.

N	L_x	L_y	d	$y^+(d)$
6000	$3\,m$	$0.5\,m$	$2 \times 10^{-3}\,m$	$80 \dots 90$

Tab. 5.2: Quelques détails du maillage utilisé. Nous rappelons que d désigne la distance entre la paroi physique et le premier point du maillage.

5.2.1.1 Résultats du calcul

L'évolution axiale de l'épaisseur de quantité de mouvement δ_θ peut être comparée à une formule empirique donnée par Schlichting [19]:

$$\delta_\theta(x) = 0.036\,x\,(Re_x)^{(1/5)} \quad . \quad (5.2)$$

La figure 5.5 montre un bon accord obtenu avec le modèle SSG représentatif de l'ensemble des modèles testés (LRR, FLT, et les modèles du premier ordre).

Nous rappelons que nous n'utilisons pas une correction du modèle de pression-déformation pour tenir compte explicitement de l'influence de la paroi sur la redistribution de l'énergie cinétique turbulente ("terme d'écho"). L'objectif principal est alors de vérifier que la représentation des composantes individuelles du tenseur de Reynolds est acceptable. Sur les figures 5.6 à 5.8 nous constatons en effet une amélioration très nette par rapport aux fermetures de premier ordre notamment en ce qui concerne la prédiction des composantes diagonales $\widetilde{uu}$ et $\widetilde{vv}$. Néanmoins, le transfert d'énergie de la composante normale $\widetilde{vv}$ à la composante longitudinale $\widetilde{uu}$ près de la paroi ($y < 0.1\,\delta$) n'est pas entièrement capté par l'ensemble des fermetures du second ordre. Nous notons de plus l'effet de la condition de Dirichlet qui est appliquée sur les composantes du tenseur de Reynolds au premier nœud voisin de la paroi, visiblement, les valeurs imposées sont consistantes avec l'expérience (on peut noter, néanmoins, sur les résultats des calculs une variation non-monotone de la contrainte tangentielle $\widetilde{uv}$ entre les trois premiers points de maillage).

Concernant l'ensemble des trois composantes de la tension turbulente, le modèle SSG permet d'obtenir la meilleure prédiction. Dans la suite, on retiendra plus particulièrement ce modèle pour l'étude de configurations complexes.

5.2.2 L'écoulement supersonique

5.2.2.1 Considérations préliminaires

A partir des données expérimentales disponibles à l'époque, Morkovin [217] a conclu que les fluctuations acoustiques $p'/\bar{p}$ ainsi que celles de la température totale $T'_t/\bar{T}_t$ sont petites dans une couche limite non-hypersonique ($M_\infty < 5$). Il montre que, dans le cas d'une paroi adiabatique, cette hypothèse induit un nombre de Prandtl turbulent constant et égale à 1 (d'où la terminologie *strong Reynolds analogy*). De plus, une proportionnalité entre les fluctuations de densité et de vitesse en fonction du nombre de Mach est obtenue sous cette hypothèse, à savoir:

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \approx (\gamma - 1) M^2 \frac{u'}{\bar{u}} \quad . \quad (5.3)$$

On note que, dans la zone de couche limite turbulente hors de la zone de proche paroi, le nombre de Mach moyen est croissant alors que l'intensité des fluctuations $u'/\bar{u}$ est décroissante en fonction de la distance normale à la paroi. Par l'hypothèse de Morkovin, l'intensité des fluctuations de densité ne devrait pas atteindre des niveaux très élevés [22].

L'hypothèse de Morkovin prédit une similitude des couches limites se développant à différentes valeurs du nombre de Mach. Malgré certaines différences entre une couche limite à basse vitesse

Re_u	M_∞	u_∞	T_∞	p_∞
2.82×10^7	4.5	711 m/s	62 K	3120 Pa

Tab. 5.3: Conditions de l'expérience de Mabey.

et une couche limite supersonique (e.g. concernant la taille et la convection des grandes structures [218]), les profils de la contrainte turbulente sont en effet similaires dans les deux cas si on adopte la normalisation suivante pour les profils transversaux [219]:

$$\overline{\rho u'_i u'_j} / (\rho_w u_\tau^2) = f(y/\delta) \quad . \quad (5.4)$$

Fernholz et Finley [219] n'ont pas constaté un consensus dans la littérature concernant la similitude des profils des tensions diagonales $\overline{\rho u' u'}$ et $\overline{\rho v' v'}$. Néanmoins, il semble que la normalisation (5.4) permette – ici aussi – de retrouver une variation proche de l'incompressible (voir par exemple la référence [220]).

Les simulations numériques directes de l'écoulement supersonique dans un canal plan ($M = \{1.5, 3\}$) effectués par Huang *et al.* [87] et Coleman *et al.* [49] donnent des informations sur les termes explicites de compressibilité dans un écoulement pariétal. Malgré le fait qu'il s'agit, dans ces études, de parois refroidies, quelques observations importantes des auteurs permettent de tirer des conclusions générales pour la couche limite non-hypersonique:

- La corrélation pression-dilatation et la dissipation dilatationnelle sont négligeables.
- La différence entre la moyenne de Favre et la moyenne de Reynolds est négligeable pour tous les termes significatifs de l'approximation de couche limite.
- l'hypothèse de Morkovin pour les corrélations de vitesse est confirmée, notamment au niveau de l'analyse des tensions de Reynolds.

L'ensemble des observations semble indiquer que l'influence de la compressibilité sur le champ turbulent est plus faible en présence d'une paroi que dans un écoulement libre. Cette différence fondamentale est probablement due à l'effet de blocage qu'exerce la paroi non-perméable sur l'écoulement (voir Friedrich [196]).

Au vu de ces réflexions, nous nous attendons à ce qu'une fermeture au second ordre à masse volumique variable puisse prédire l'essentiel d'une couche limite non-hypersonique sans corrections explicites liées à la compressibilité. Dans le cas d'une paroi fortement refroidie, par contre, la limite de validité de l'hypothèse de Morkovin pourrait être réduite [22].

5.2.2.2 Le cas simulé numériquement

L'expérience de Mabey (cf. [214, cas 7402]) se déroule à $M_\infty = 4.5$ sur une paroi adiabatique. Le champ moyen est précisément documenté, mais les fluctuations de vitesse n'ont pas été mesurées. Nous utilisons comme condition d'entrée les valeurs de l'énergie cinétique de la turbulence et de son taux de dissipation obtenues par un calcul préliminaire de type couche limite [221]. Les composantes du tenseur de Reynolds à l'entrée du domaine d'intégration sont reconstruites à l'aide de l'hypothèse de Boussinesq. Les détails de l'expérience sont donnés dans le tableau 5.3, ceux du maillage dans le tableau 5.4.

5.2.2.3 Résultats du calcul

Nous avons étudié trois influences sur les résultats du calcul, à savoir:

N	L_x	L_y	d	$y^+(d)$
4000	1.2 m	0.3 m	$2 \times 10^{-3} \text{ m}$	90 ... 200

Tab. 5.4: Quelques détails du maillage utilisé dans le calcul de la couche limite de Mabey.

- le modèle de fermeture,
- la valeur du nombre de Prandtl turbulent Pr_t ,
- le type de loi de paroi.

Concernant le premier point, nous avons pu noter dans des expériences numériques (non reportées ici) que les différents modèles de corrélation pression-déformation conduisent à des résultats équivalents pour le champ moyen. De plus, la différence entre les prédictions obtenues avec les modèles de second ordre et avec la fermeture au premier ordre (k - ε) est petite, par exemple sur le coefficient de frottement local $c_f \equiv 2 \tau_w / (\rho_\infty u_\infty)$. La figure 5.9 donne une idée préliminaire de l'ordre de grandeur des écarts au niveau de c_f .

L'évolution du coefficient de frottement montre également l'importance de l'utilisation d'une loi logarithmique qui tienne compte de la variation de la masse volumique moyenne. Une condition à la limite s'appuyant sur la loi incompressible mène à une surestimation importante du coefficient de frottement (cf. figure 5.9). Néanmoins, nos résultats obtenus avec la loi de van Driest (voir (2.101)) et un nombre de Prandtl turbulent $Pr_t = 0.72$ se situent également légèrement au-dessus des mesures de Mabey pour c_f . Ceci nous a incité de changer la valeur de Pr_t à 0.9. L'effet est une diminution du frottement pariétale due à une modification du profil de température comme nous le verrons par la suite.

Les profils de la vitesse axiale et de la masse volumique moyenne sont affectés par la loi logarithmique utilisée. Nous voyons sur les figures 5.10 a) et 5.10 b) que les calculs avec la loi de van Driest donnent un très bon accord sur la densité mais une légère surestimation de la vitesse dans la zone logarithmique. La différence entre les deux traitements de la paroi est encore plus claire dans le graphe semi-logarithmique de la vitesse en coordonnées caractéristiques de la paroi $U_c^+ = f(y^+)$ (voir figure 5.11). Les mesures de Mabey suivent une loi classique entre $y^+ \approx 30$ et $y^+ \approx 300$. L'utilisation de la loi de paroi de van Driest permet un accord satisfaisant avec l'expérience tandis que la loi incompressible surestime largement la valeur de U_c^+ (cette appréciation est néanmoins tempérée du fait que le premier point de calcul est situé loin de la paroi).

Les variables thermiques sont montrées sur les figures 5.12 a) et 5.12 b). La température statique augmente d'un facteur 3.5 à la paroi à cause du frottement visqueux. Le calcul prédit très précisément la distribution de la température quand la valeur 0.72 est utilisée pour le nombre de Prandtl turbulent. L'augmentation de cette valeur à 0.9 diminue le flux de chaleur turbulent. Par conséquent, l'évacuation de la chaleur produite dans la zone près de la paroi est réduite. Dans le calcul avec $Pr_t = 0.90$ la température est donc surestimée près de la paroi.

La température totale $\tilde{T}_t \equiv \tilde{T} + \tilde{u}_i^2 / (2 c_p)$ diminue dans l'expérience près de la paroi pour atteindre une valeur de $T_w / T_{t\infty} \approx 0.93$ ce qui correspond à la variation donnée par la relation de Crocco modifiée (relation de Walz, cf. [222, 223]) avec un facteur de récupération de $r = 0.9$. A cause de la surestimation de la vitesse dans le calcul, la valeur de la température totale près de la paroi est également surestimée (par 7% dans le cas à $Pr_t = 0.72$). L'utilisation de la valeur $Pr_t = 0.90$ conduit à une surestimation d'environ 15%.

Finalement nous avons tracé le résultat du calcul pour la distribution des deux nombres de Mach définis lors de l'étude du cisaillement homogène et de la couche de mélange (voir figures 5.13 a) et 5.13 b)). Nous notons que le nombre de Mach de distorsion M_d et le nombre de Mach turbulent M_t atteignent des valeurs de l'ordre de 0.7 et 0.25 respectivement, voisines de celles obtenues dans la couche de mélange à $M_c = 0.69$ (cf. figures 4.28 et 4.29). Quand on utilise

la distance à la paroi y comme échelle de longueur à la place de $k^{3/2}/\varepsilon$, la distribution de M_d ne change pas de manière très significative. Par conséquent, ces deux paramètres (M_d , M_t) ne permettent pas de mettre en évidence des effets de compressibilité différenciés pour une couche limite à $M_\infty = 4.5$ et une couche de mélange à $M_c = 0.69$. Les modèles de compressibilité conçus pour la couche de mélange surestiment le niveau des termes de compressibilité qui apparaissent explicitement dans un écoulement pariétal [49] ce qui mène à une dégradation des résultats dans le calcul [87] (en particulier, une non-conformité des résultats avec la loi logarithmique de la vitesse est notée). Il s'agirait donc ici de faire intervenir dans les modèles des paramètres qui mettent en évidence les spécificités propres de la couche limite.

5.2.2.4 Conclusion

Ce cas test a montré les possibilités de la fermeture de second ordre et de l'approche de loi de paroi pour simuler une couche limite simple à vitesse supersonique élevée. L'influence du choix du modèle de la corrélation pression-déformation sur la prédiction du champ moyen est faible. Dans le cadre d'un modèle algébrique pour le flux de chaleur turbulent, le choix de la valeur du nombre de Prandtl turbulent s'est montré important pour la prédiction du profil de la température près de la paroi.

5.3 La couche limite sous l'influence d'un gradient de pression adverse

5.3.1 Considérations préliminaires

Dans un écoulement compressible, un gradient de pression longitudinal positif crée une compression moyenne $-\tilde{u}_{i,i}$. Quand l'écoulement est supersonique dans une grande partie de la couche limite ($M_\infty > 1.8$), un gradient de pression adverse induit une augmentation de la tension pariétale (contrairement à ce qui est observé à basse vitesse bien que l'épaisseur de quantité de mouvement continue à croître [224]. Ce comportement est dû au rôle de la masse volumique moyenne qui augmente plus rapidement que la vitesse ne décroît en fonction du gradient de pression.

Dans un écoulement subsonique, on utilise souvent un paramètre qui traduit le rapport entre l'action de la pression et celle de la tension pariétale, à savoir:

$$\beta \equiv \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \cdot \frac{\delta^*}{\tau_w} \quad , \quad (5.5)$$

où δ^* est l'épaisseur de déplacement de la couche limite. Bradshaw [225] propose comme paramètre pour l'écoulement supersonique le rapport entre la déformation supplémentaire (la compression dans notre cas) et la déformation principale (le cisaillement $\tilde{u}_{,y}$). Une estimation globale de ce rapport dans un écoulement isentropique est donnée par la formule suivante [225]:

$$\frac{\tilde{u}_{i,i}}{\tilde{u}_{,y}} \approx - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \frac{\delta}{0.3 \gamma \bar{p}} \quad . \quad (5.6)$$

Des expériences montrent qu'une faible compression de l'ordre de quelques pour cents du cisaillement peut déjà provoquer une amplification importante des fluctuations de vitesse [226]. Pour la prédiction d'un écoulement supersonique qui est caractérisé par la présence des ondes de pression, il est important de décrire précisément la réponse du champ turbulent à ce type de déformation supplémentaire.

Dans l'expérience, le gradient de pression est souvent créé directement par une paroi courbée ce qui ajoute une autre forme de déformation due à la courbure des lignes de courant. Afin d'isoler l'effet du gradient de pression, une configuration de plaque plane peut être étudiée avec le champ

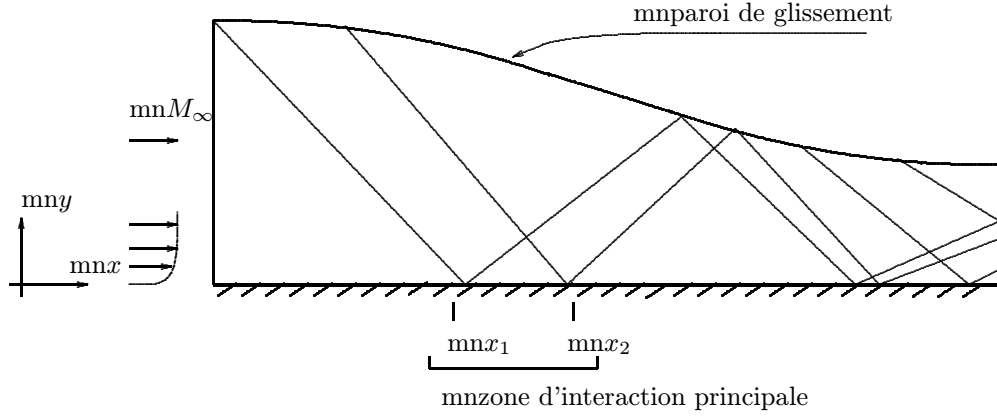


Fig. 5.2: Schéma de la configuration d'une couche limite soumise à un gradient de pression adverse par un système d'ondes réfléchies.

Re_u [1/m]	M_∞	T_{t_∞}	p_∞	β_{max}	$(\tilde{u}_{i,i}/\tilde{u}_y)_{max}$
6.3×10^7	2.92	270 K	21000 Pa	5.8	-0.22

Tab. 5.5: Paramètres caractéristiques de la couche limite de Fernando et Smits.

de pression induit par des ondes de compression générées à l'extérieur de la couche limite (voir la figure 5.2).

5.3.2 Le cas simulé numériquement

Nous nous appuyons sur l'expérience de Fernando et Smits [226] dans laquelle un système d'ondes de compression est généré par une paroi courbée montée au-dessus d'une plaque plane (voir la figure 5.2). Nous nous intéressons à l'évolution de la couche limite sur la paroi inférieure qui est soumise à une première augmentation de la pression (entre x_1 et x_2) d'environ 100% sur une distance de 11 fois l'épaisseur δ_∞ , ce qui constitue une déformation assez importante (voir le tableau 5.5 pour les valeurs des paramètres caractéristiques). La seconde interaction plus loin, en aval de la section x_2 , n'a pas été étudiée [226].

Dans la publication de Fernando et Smits, la géométrie de la paroi génératrice supérieure n'est pas donnée. Afin de créer un champ de pression équivalent à l'expérience, nous avons d'abord estimé l'évolution de la paroi supérieure par la méthode des caractéristiques, ajustant ensuite la géométrie à l'aide des calculs non-visqueux (pour les détails de la géométrie voir la figure 5.14). Le calcul avec les équations de Navier-Stokes moyennes modélisées a, par la suite, confirmé l'accord des courbes de pression numériques avec les mesures expérimentales (voir la figure 5.15). Il est important de noter que la pression pariétale obtenue dans le calcul n'est visiblement pas sensiblement influencée par la couche limite. Par conséquent, le gradient de pression peut être considéré comme un paramètre fixe du problème.

Nous traitons la paroi supérieure par une condition de glissement ce qui permet de réduire le nombre des points du maillage ($N = 10000$ pour les résultats présentés ici).

5.3.3 Résultats du calcul

Nous notons que les profils de vitesse sur les résultats d'expériences de Fernando et Smits sont en accord avec la loi logarithmique de van Driest jusqu'à $y^+ \approx 1000$, le gradient de pression agissant sur la vitesse principalement à l'extérieur de la zone de proche paroi. La loi de paroi n'est alors pas mise en défaut a priori dans ce cas.

Nous voyons sur la figure 5.16 l'augmentation de la contrainte pariétale τ_w due à la compression assez bien prédite par les deux types de fermeture utilisés, le niveau du frottement obtenu par le modèle au second ordre (SSG) étant légèrement supérieur à celui du modèle $k-\varepsilon$. La dispersion des mesures ne permet pas un jugement quantitatif. Nous notons que la vitesse de frottement u_τ diminue pendant l'interaction ce qui est analogue au cas subsonique.

Les profils de la vitesse moyenne axiale dans une section avant l'interaction ($x_1 = 1\text{ m}$) et à la fin de la compression ($x_2 = 1.381\text{ m}$) sont tracés sur la figure 5.17. La qualité des prédictions dans la partie extérieure de la couche limite ($y > 0.6\delta$) obtenues avec le modèle de transport (SSG) est légèrement supérieure au modèle de Boussinesq.

Sur les figures 5.18 à 5.20 nous voyons que toutes les composantes du tenseur de Reynolds $\widetilde{\rho u_i u_j}$ sont amplifiées par la compression moyenne: il s'agit d'un effet combiné de l'augmentation de la masse volumique et des corrélations de vitesses. La tendance est prédite par les deux types de fermeture. Le modèle de transport donne un accord très satisfaisant pour toutes les composantes dans la couche limite avant l'action du gradient de pression ainsi que dans la section affectée par la compression. L'hypothèse de Boussinesq, par contre, conduit à une sous-estimation de la tension longitudinale $\widetilde{\rho u u}$ et à une surestimation de la tension normale $\widetilde{\rho v v}$ (l'anisotropie est mal représentée par la relation constitutive linéaire). Néanmoins, la contrainte tangentielle est en très bon accord avec les mesures, ce qui explique la bonne prédiction du champ moyen obtenu en utilisant le modèle $k-\varepsilon$.

Dans l'expérience, les maxima des valeurs des tensions turbulentes s'éloignent de la paroi au cours de l'interaction ($y(\widetilde{\rho u_i u_{j_{max}}}) \approx 0.4\delta$). Le calcul prédit des maxima systématiquement plus près de la surface ($y(\widetilde{\rho u_i u_{j_{max}}}) \approx 0.3\delta$). Malgré la correspondance de la pression pariétale, il serait possible que la distribution transversale de la pression dans notre simulation ne corresponde pas exactement à celle de l'expérience. Malheureusement, la publication de Fernando et Smits ne donne pas plus d'information sur les champs de pression et de masse volumique.

Nota: Nous observons ici encore une influence de la condition de Dirichlet (voir le paragraphe 2.5.3.3) sur les composantes du tenseur de Reynolds du modèle de transport (figure 5.18 et 5.20) qui crée un comportement non-monotone près de la paroi.

5.3.4 Conclusion

L'étude de cas nous a permis de conclure les deux points suivants:

- la capacité de la fermeture au second ordre à prédire l'amplification de la turbulence due à une compression moyenne induite par des ondes de pression,
- la faible influence de l'anisotropie des composantes diagonales $\widetilde{\rho u_\alpha u_\alpha}$ sur le développement du champ moyen.

Malgré le taux de compression important (20% du cisaillement), le cas de Fernando et Smits est encore proche de la validité de l'approximation de couche limite et l'utilisation d'un modèle de transport des tensions de Reynolds n'offre pas un grand avantage par rapport à une fermeture au premier ordre.

5.4 Interaction entre une onde de choc et une couche limite turbulente avec décollement

5.4.1 Considérations préliminaires

L'interaction entre un choc fort et une couche limite turbulente est une situation extrêmement complexe faisant intervenir l'ensemble des problèmes de modélisation discutés auparavant ainsi que des phénomènes nouveaux.

L'intensité d'une onde de choc diminue dans une couche limite à cause de la variation du nombre de Mach près de la paroi et elle approche zéro à la ligne sonique. Dans la partie subsonique de la couche limite, la perturbation de la pression due à la présence du choc peut remonter contre le courant ce qui conduit à une augmentation de la pression (par rapport à la pression p_∞ à l'amont) dans cette partie de l'écoulement. En revanche, la modification de pression est propagée sous forme d'ondes de compression dans la région supersonique voisine induisant une déformation du choc primaire. L'interaction entre la couche limite et l'onde de choc est ainsi réciproque [1].

Dans le cas d'une interaction avec décollement, les lignes de courant près de la bulle de recirculation sont fortement courbées ce qui constitue une déformation supplémentaire. De plus, le taux de cisaillement important, présent au bord de la région de recirculation, est une source principale d'intensité turbulente.

Au regard des modèles de fermeture, quatre points d'intérêt doivent être abordés:

- les phénomènes de transport,
- le rôle de l'anisotropie,
- la prise en compte de la paroi,
- les effets de la compressibilité du champ de fluctuations.

Phénomènes de transport. L'interaction entre une onde de choc et une couche limite induit une distorsion importante localisée. On s'attend à ce que le changement imposé sur la structure de la turbulence persiste sur une certaine distance par l'effet de convection. Il nous semble important dans ce cas de tenir compte de la mémoire le long d'une ligne de courant afin de déterminer le tenseur de Reynolds. Les conditions nécessaires pour l'existence d'une relation constitutive locale pour le tenseur de Reynolds (voir paragraphe 1.6.1) ne sont certainement pas vérifiées et une fermeture au second ordre semble a priori plus appropriée.

L'anisotropie des composantes diagonales du tenseur de Reynolds joue un rôle plus important en présence des déformations autres que le cisaillement principale $\tilde{u}_{,y}$. Ceci est évident en considérant les termes qui contribuent à la production de l'énergie cinétique turbulente:

$$P_{kk} = -\bar{\rho} \tilde{u} \tilde{u} \cdot \tilde{u}_{,x} - \bar{\rho} \tilde{v} \tilde{v} \cdot \tilde{v}_{,y} - \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{v} (\tilde{u}_{,y} + \tilde{v}_{,x}) \quad , \quad (5.7)$$

les composantes diagonales intervenant comme coefficient devant les déformations irrotationnelles $\tilde{u}_{,x}$ et $\tilde{v}_{,y}$ induites principalement par les ondes de pression. D'autre part, la courbure des lignes de courant autour de la zone décollée se manifeste surtout par la déformation $\tilde{v}_{,x}$ [6] contribuant à la production de la contrainte tangentielle,

$$P_{12} = -\bar{\rho} \tilde{u} \tilde{u} \cdot \tilde{v}_{,x} - \bar{\rho} \tilde{v} \tilde{v} \cdot \tilde{u}_{,y} - \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{v} (\tilde{u}_{,x} + \tilde{v}_{,y}) \quad , \quad (5.8)$$

avec comme facteur la tension axiale $\tilde{u} \tilde{u}$. Nous verrons par la suite qu'une meilleur représentation de l'anisotropie (par l'utilisation de la fermeture au second ordre ou par une relation constitutive non-linéaire) permet une prédiction plus réaliste d'une couche limite subissant une séparation.

La paroi solide. Dans la région d'écoulement séparé, les conditions de validité de la loi de paroi ne sont pas vérifiées. L'hypothèse la plus problématique est probablement celle de convection

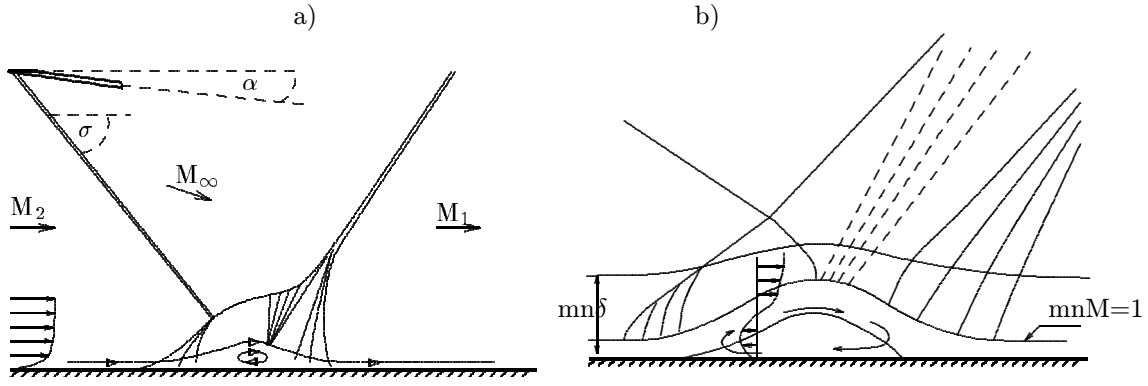


Fig. 5.3: Schéma de l'écoulement: a) Vue globale. b) Agrandissement de la zone d'interaction.

Re_u	Re_θ	M_∞	T_{t_∞}	p_∞	u_∞	δ_∞
7×10^6	12500	2.4	317K	5123Pa	584m/s	8mm

Tab. 5.6: Paramètres caractéristiques de la couche limite turbulente en amont de l'interaction.

nulle (écoulement de Couette). Un deuxième point plus subtil est lié à la position de la ligne sonique démarquant la partie où l'information peut remonter contre le courant dans la couche limite. Quand le nombre de Mach extérieur est suffisamment élevé (ce qui est le cas dans le calcul présenté par la suite), le premier nœud du maillage de discrétisation se trouve déjà en dehors de la région subsonique, ce qui ne permet pas de restituer le phénomène de propagation d'onde à contre courant dans la partie subsonique.

Compressibilité de la turbulence. Dans le cas de l'interaction choc-couche limite il est difficile d'estimer l'influence des différents termes de compressibilité explicites et le rôle implicite au niveau des modèles de turbulence. Les chapitres antérieurs ont permis de séparer des configurations de type couche limite et les écoulements libres et on retrouve ces dominantes dans différentes régions de la zone d'interaction. Le rôle particulier de l'onde de choc individualisée sur la turbulence a fait l'objet d'une étude en annexe I et a permis de mettre en évidence les performances comparées des modèles du second ordre et des modèles de premier ordre par rapport à la DNS. On fait assez largement le constat que les modèles ne représentent de grands propriétés d'universalité et l'application au cas complexe choc-couche limite a été ici réduite à l'utilisation de modèles standards de type Boussinesq, SZL, SSG.

5.4.2 Le cas simulé numériquement

5.4.2.1 La structure générale de l'écoulement

Nous avons simulé numériquement l'écoulement d'une onde de choc oblique réfléchie par une plaque plane (expérience de Délerly [227]). La configuration de l'écoulement est montrée schématiquement sur la figure 5.3 a). L'onde de choc initiale est créée par un déflecteur monté au-dessus de la plaque plane sur laquelle une couche limite turbulente se développe à $M_\infty = 2.4$ (voir le tableau 5.6 pour les paramètres de la couche limite non-perturbée). Le choc primaire induit une augmentation de pression d'environ 100% hors de la zone pariétale ainsi qu'une déflexion de l'écoulement d'un angle $\alpha_1 = 11^\circ$ (voir la tableau 5.7 pour les détails concernant l'intensité du choc primaire [†]).

[†]Les valeurs données initialement par Délerly ont été corrigées dans une publication suivante [228].

M_1	$\bar{p}_1$	$\tilde{u}_1$	$\tilde{v}_1$	σ_1	α_1
1.94	10135 Pa	513 m/s	-103 m/s	34.4°	11.4°

Tab. 5.7: Paramètres caractéristiques de la couche limite turbulente en amont de l'interaction.

La forme des lignes de courant autour de l'écoulement de retour induit un système d'ondes de compression en amont et en aval de la zone d'interaction (courbure concave) ainsi qu'un faisceau de détente au centre (courbure convexe). L'origine du choc réfléchi est translatée vers l'amont par rapport à une réflexion non-visqueuse (voir la figure 5.3 b)). Dans les approches analytiques non-visqueuses, la zone de recirculation est souvent remplacée par une paroi équivalente induisant un système d'ondes analogue [1, 228].

5.4.2.2 Détails du calcul numérique

Le choc primaire est généré par un saut des variables imposé comme condition à la limite (voir figure 5.4). La longueur du domaine d'intégration est choisie de telle sorte que l'interaction ne soit pas affectée par la frontière aval (où la pression correspondant au cas d'une réflexion non-visqueuse est imposée dans la couche subsonique près de la paroi). La hauteur de la paroi supérieure est ajustée pour assurer que le choc réfléchi traverse la frontière de sortie aval plutôt que la frontière supérieure (ce dernier cas poserait le problème du conflit entre un traitement sans réflexion de l'onde sortante et la nécessité d'imposer la pression de l'état $()_1$ après le choc primaire).

Le profil de couche limite imposé en amont est issu de l'étude expérimentale en ce qui concerne les variables aérodynamiques et les corrélations de vitesse $\tilde{uu}$, $\tilde{vv}$ et $\tilde{uv}$. L'énergie cinétique est calculée à l'aide de la formule approximative $k = 3/4(\tilde{uu} + \tilde{vv})$ suggérée par Déler. Le taux de dissipation à l'entrée a été reconstruit par une formule de longueur de mélange [229]:

$$\varepsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{l}, \quad l = \min(2.5y, 0.5\delta) \quad . \quad (5.9)$$

Yudiana [221] a montré que le niveau du taux de dissipation imposé à l'entrée du domaine peut avoir une influence sur le mécanisme d'interaction: un niveau de dissipation plus élevé conduit à une zone de recirculation plus importante.

Le maillage utilisé est constitué de 10070 nœuds dont une grande partie est accumulée dans la zone d'interaction.

5.4.2.3 Résultats

Champ moyen. Une vue globale de l'écoulement est montrée sur la figure 5.21 qui représente les lignes d'isovaleur de la pression obtenues par le calcul avec le modèle SSG. Les détails de la structure du système d'ondes observée dans l'expérience sont reproduits: le décollement et l'écoulement de retour induisant des ondes de compression, un faisceau de détente et la récompression progressive au cours de l'établissement d'une nouvelle couche limite. Le calcul avec le modèle de Boussinesq (figure 5.22), par contre, ne prédit pas de décollement, l'interaction n'est visiblement pas très marquée. La fermeture non-linéaire au premier ordre (modèle SZL), en revanche, permet d'obtenir un champ de pression beaucoup plus réaliste, proche de la prédiction du modèle au second ordre.

Les courbes de la pression pariétale sont comparées aux mesures expérimentales sur la figure 5.23. Nous constatons que l'ensemble des résultats numériques prédit une augmentation de pression retardée. L'étendue du plateau de pression – caractéristique de la région de l'écoulement de retour – est plus importante dans l'expérience. Cette figure confirme les observations précédentes: le modèle de transport donne une recirculation plus étendue que le modèle algébrique SZL, l'hypothèse de Boussinesq prédisant une montée de pression uniforme.

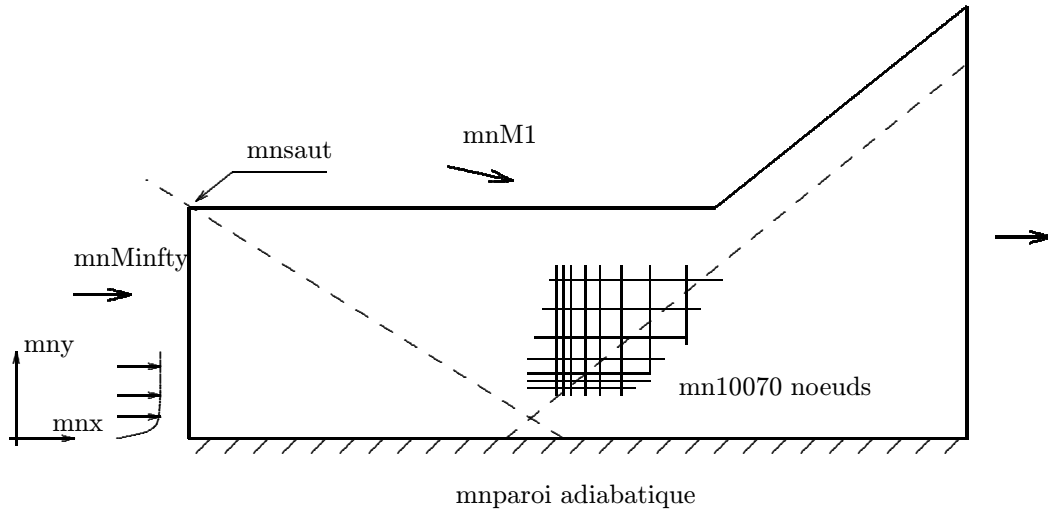


Fig. 5.4: Le domaine de calcul pour l'interaction choc-couche limite. Dans le repère de l'expérience, nous avons: $x_1 = 80 \text{ mm}$, $x_2 = 350 \text{ mm}$ et $y_1 = 62.4 \text{ mm}$.

d	$2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$3 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
y_{∞}^+	263.5	72.5	39.5

Tab. 5.8: La valeur de y^+ dans la couche limite non-perturbée pour différentes distances d entre maillage et paroi physique dans le calcul avec le modèle SSG.

Nous remarquons de plus sur cette figure que tous les résultats numériques sont caractérisés par un gradient de pression trop important en aval de l'interaction ($x > 170 \text{ mm}$). Ceci indique que le processus de recollement prédit par nos calculs est trop rapide avec une courbure trop importante des lignes de courant. Nous allons considérer la structure des lignes de courant ultérieurement.

Un défaut général de la loi de paroi est responsable de la tendance à prédire une augmentation brusque de pression dans les zones de décollement et de recollement. Puisque le vecteur vitesse est forcé de s'aligner avec la paroi sur le premier nœud du maillage (hypothèse d'écoulement de Couette), la ligne de courant correspondante ne peut pas se courber en amont du point de décollement. Par conséquent, la vitesse sur la première ligne du maillage doit être décélérée à partir d'une valeur importante (correspondant à la zone logarithmique) jusqu'à zéro afin d'obtenir un décollement. Ceci conduit à un retard du décollement et un taux de compression trop important dans le calcul. La même argumentation explique la surestimation de la rapidité de la compression au point de recollement.

Sur la figure 5.24 nous avons représenté des résultats de la pression pariétale obtenus en faisant varier la valeur de la distance d entre la paroi physique et le premier nœud du maillage discret (voir également le tableau 5.8). Nous observons une très forte influence de ce paramètre sur la courbe de pression qui montre une proportionnalité inverse entre la valeur de d et la dimension de la zone de recirculation, une séparation n'étant pas obtenue dans le cas où la distance d est maximale. Afin d'expliquer ce phénomène, nous avons représenté la ligne sonique et la ligne de vitesse axiale nulle sur la figure 5.25. Evidemment, la zone de recirculation – caractérisée par un changement de signe de la vitesse axiale – doit être contenue dans la région subsonique de l'écoulement. Dans le cas où d est grand, la zone subsonique ne peut pas s'étendre suffisamment loin en amont pour provoquer l'augmentation graduelle de la pression qui mène au décollement. Ce mécanisme est spécifique de la loi de paroi dans un écoulement principalement supersonique. Concernant l'utilisation de

cette approche dans un écoulement supersonique avec séparation, il existe alors une limitation de la distance d plus contraignante que la limitation donnée par l'étendue de la zone logarithmique. Afin d'obtenir une indépendance des résultats par rapport à la distance d choisie, il faudrait probablement assurer qu'une couche subsonique est effectivement résolue par le calcul tout le long de la paroi. Le traitement de la paroi par un modèle à bas nombre de Reynolds permet une certaine amélioration des résultats dans ce sens [221].

Les profils de la vitesse axiale (figure 5.27) montrent la supériorité des résultats obtenus avec le modèle de transport pour le tenseur de Reynolds, en particulier dans la région de l'écoulement de retour ($x = 160mm$). Néanmoins, nous observons un déficit de vitesse dans la couche limite après le recollement ainsi qu'un excès de vitesse près de la paroi, persistant assez loin en aval. Cette distribution de la vitesse axiale a son origine dans un mode de recollement particulier. Nous notons sur la figure 5.26 que la vitesse axiale change de signe le long de la ligne de courant de recollement. Les lignes de courant obtenues avec la fermeture au premier ordre (SZL), par contre, n'ont pas ce comportement; elles semblent être en accord avec les observations de l'expérience [227].

D'autres auteurs [230, 91, 231] ont noté des problèmes avec la fermeture au second ordre dans une couche limite hors équilibre. Obi *et al.* [230] (au point de recollement derrière une marche descendante) et Abid *et al.* [231] (en aval de l'interaction avec une onde de choc induite par une rampe de compression) ont de même obtenu des profils de vitesse avec un déficit dans la couche limite et un excès de vitesse marqué près de la paroi. La raison de cette mauvaise représentation du processus de recollement n'est pas détaillée dans ces publications [230, 231]. Notre analyse du champ des tensions turbulentes n'a pas révélé d'anomalie dans la zone de recollement. Cependant, nous notons que la loi de paroi a été utilisée dans les deux études mentionnées. Il pourrait alors s'agir d'un effet spécifique de ce type de traitement de la zone pariétale. Un calcul avec un modèle du second ordre à bas nombre de Reynolds serait utile pour déterminer la cause du problème au point de recollement.

Les tensions turbulentes. Dans l'expérience, deux caractéristiques de l'écoulement sont constatées (voir les figures 5.28 à 5.30): la "trace" que laissent les ondes de choc sur les profils des composantes du tenseur de Reynolds et l'amplification de la turbulence dans la zone pariétale due à l'écoulement de retour.

En ce qui concerne l'amplification directe des fluctuations par l'onde de choc, nous notons une quasi-absence des maxima marquant le passage du choc dans les résultats obtenus avec le modèle du second ordre. Cette observation est consistante avec l'analyse du comportement des modèles à l'intérieur d'une onde de choc de l'annexe I. Il est également attendu que l'utilisation des modèles au premier ordre conduise à des niveaux des tensions localement très amplifiés, coïncidant avec la position des ondes de choc.

Dans la zone pariétale, on constate expérimentalement une augmentation progressive du niveau maximum de la contrainte tangentielle $\widetilde{uv}$ jusqu'à la dernière station ($x = 200mm$), tandis que le maximum de la tension axiale $\widetilde{uu}$ est atteint dans la zone de recirculation ($x = 150mm$). Seul le modèle du second ordre est capable de prédire ces deux tendances.

Sur les figures 5.31 et 5.32 nous avons tracé l'anisotropie de la composante tangentielle $b'_{12} \equiv \widetilde{uv}/(3/2(\widetilde{uu} + \widetilde{vv}))$ et le rapport des composantes diagonales $\widetilde{uu}/\widetilde{vv}$. D'une part nous remarquons que les profils des deux composantes de l'anisotropie obtenus par le calcul avec la fermeture du second ordre sont en bon accord avec l'expérience en amont de l'interaction ainsi que dans la zone en aval du point de rattachement. D'autre part, la modification de l'anisotropie dans la zone de recirculation est qualitativement captée, mais les niveaux sont sous-estimés par le calcul. En particulier, la diminution importante de la contrainte b'_{12} au point de séparation et la forte augmentation de l'anisotropie des composantes normales près de la paroi ($\widetilde{uu}/\widetilde{vv}_{max} \approx 8$) ne sont pas représentés de manière satisfaisante par les calculs avec la fermeture au second ordre.

Au vu des incertitudes associées à l'utilisation de la loi de paroi, il est difficile de tirer des conclusions sur la pertinence des modèles testés. Du fait que les champs de pression et de vitesse

moyenne obtenus par le calcul sont quantitativement très différents des mesures, nous ne pouvons pas effectuer une analyse plus fine des modèles pour les différentes expressions constituant la fermeture au second ordre.

5.4.2.4 Conclusion

Le calcul de l'interaction forte entre une onde de choc oblique et une couche limite turbulente nous a d'abord permis d'identifier les problèmes associés au traitement de la zone pariétale par une loi de paroi. Comme dans un écoulement entièrement subsonique, la séparation de la couche limite est retardée par l'application de l'hypothèse d'un écoulement tangentiel sur la première ligne du maillage. Il est en outre nécessaire de rappeler que la zone subsonique permet la remontée d'ondes de pression qui joue un rôle important sur le mécanisme de décollement et son positionnement. L'emploi de modèles permettant de couvrir correctement cette zone subsonique jusqu'à la paroi semble donc indispensable.

Nous avons constaté une supériorité de la fermeture au second ordre au niveau des prédictions pour le champ moyen et le champ des tensions turbulentes: tous les détails du système d'ondes sont représentés, l'évolution de l'anisotropie dans la région de l'écoulement de retour est en accord qualitatif avec l'expérience. Quantitativement, cet avantage du modèle de transport pour le tenseur de Reynolds par rapport aux modèles algébriques se manifeste par une meilleure prédiction de l'évolution du coefficient de pression pariétale.

Néanmoins, en utilisant la fermeture au second ordre nous avons obtenu une inclinaison adverse des lignes de courant au voisinage du point de recollement. Cette observation est en accord avec d'autres études et semble constituer un problème général des modèles du second ordre utilisés à l'heure actuelle.

Finalement, nous avons pu montrer, sur cet écoulement, la bonne performance (relative) du modèle algébrique à relation constitutive non-linéaire pour le tenseur de Reynolds. Les résultats – obtenus à faible coût – sont assez voisins des prédictions de la fermeture au second ordre.

Conclusion

Le présent travail a comporté trois parties. La première partie a consisté en une étude bibliographique sur les modèles de fermeture au second ordre pour le tenseur de Reynolds dans un écoulement compressible à haut nombre de Mach. La seconde partie a été dédiée à la résolution numérique du système d'équations modélisée. Dans une troisième partie, nous avons évalué l'adéquation de la fermeture au second ordre dans différents types d'écoulement à cisaillement dominant: homogènes et inhomogènes, libres et pariétaux.

I Nous avons d'abord présenté en détail l'approche de fermeture au second ordre pour le tenseur de Reynolds et les problèmes associés à la prise en compte des effets de compressibilité. Avec pour but d'établir le cadre de la fermeture à mettre en œuvre, notre étude bibliographique a été guidée essentiellement par deux principes: le réalisme des prédictions obtenues avec les différents modèles proposés dans la littérature par rapport à l'expérience (physique ou numérique) et la théorie de réalisabilité physique des modèles.

En ce qui concerne le premier point, nous avons noté que la majorité des fermetures constituent une traduction directe des modèles avancés dans un écoulement homogène et/ou incompressible en ajoutant ensuite des expressions supplémentaires selon le principe de superposition. Le modèle final n'est souvent pas d'une très grande généralité.

Le bilan de l'ensemble du système des équations modélisées a montré que la plupart des modèles pour les différentes inconnues (notamment les expressions pour la corrélation pression-gradient de vitesse et le flux de masse turbulent) n'est pas en accord avec les contraintes de la réalisabilité. Le dilemme consiste à ce niveau à choisir entre une fermeture conforme à la théorie de la réalisabilité (par exemple le modèle SL85 pour la pression-déformation) et une autre fermeture offrant une meilleure performance en pratique (e.g. le modèle SSG).

II Nous nous sommes ensuite intéressés à la partie hyperbolique du système (constitué des termes différentiels d'ordre un). Cette partie du système d'équations sous forme non-conservative est caractérisée par un système d'ondes particulier, avec une paire d'ondes linéairement dégénérées supplémentaires (non-existante dans le cas Euler ou k - ε). Pour le système non-conservatif, nous avons déterminé analytiquement les solutions du problème de Riemann dans les régions régulières ainsi qu'à travers des discontinuités. Dans le cas d'un choc, nous avons établi une solution approchée à l'aide d'une connexion des variables de part et d'autre de la discontinuité par un chemin linéaire. Avec les éléments de l'analyse, deux méthodes de résolution numérique pour le système non-conservatif de convection-production ont été construites, s'appuyant sur une décomposition caractéristique des flux ou des variables. Les résultats des calculs quasi-monodimensionnels sur une configuration de type tube à choc sont très satisfaisants, notamment au niveau du traitement des nouvelles ondes (discontinuités de contact) qui peuvent – dans certains cas extrêmes – provoquer des fortes oscillations quand une méthode simplifiée (basée essentiellement sur le système conservatif de la dynamique des gaz) est utilisée. Néanmoins, ces nouvelles méthodes de résolution de manière “couplée” du système d'équations des moments d'ordre deux n'ont pas encore été validées sur des configurations multi-dimensionnelles. Pour les calculs bidimensionnels de cette étude, nous nous sommes contentés d'une méthode plus conventionnelle basée sur une

découplage entre les équations de masse, quantité de mouvement, énergie totale et énergie cinétique de la turbulence d’une part et les composantes du tenseur de Reynolds et le taux de dissipation d’autre part. Ce choix nous a permis la construction d’une méthode implicite à faible coût de calcul se comportant de manière très satisfaisante dans de nombreux test de validation.

III Cisaillement homogène. Afin d’étudier la prise en compte de l’influence de la compressibilité sur un écoulement cisailé, nous avons d’abord considéré la situation homogène. Par une évaluation directe à partir des résultats de la DNS, nous avons constaté l’insuffisance des modèles appliqués pour représenter l’ensemble des termes de redistribution quand le nombre de Mach de distorsion est élevé. En particulier, les modèles actuels compressibles ne sont pas capables de suivre des niveaux d’anisotropie forts sur des échelles de temps longues. Les calculs ont confirmé l’observation que l’amélioration de la prédiction du taux de croissance de k par l’utilisation des modèles récemment développés pour les termes énergétiques (prise en compte de la pression-dilatation et de la dissipation dilatationnelle) ne reflète pas le mécanisme physique [67, 68]. Parmi les approches structurelles, l’utilisation d’une correction avancée dans le cas de déformation irrotationnelle (LRR-CCM) a permis une meilleure représentation de l’anisotropie des composantes diagonales. Une caractéristique principale, à savoir l’évolution de la contrainte tangentielle en fonction du nombre de Mach de distorsion initial, est représentée de manière insuffisante par les modèles testés.

Couche de mélange. Les conclusions concernant l’écoulement homogène cisailé ne se traduisent pas directement sur la couche de mélange établie où les conditions aux limites se substituent à la “mémoire” des conditions initiales. Dans la gamme du nombre de Mach convectif étudiée ($M_c \leq 0.7$) et pour les conditions particulières choisies, l’évolution du taux d’épanouissement en fonction de M_c mesurée dans l’expérience est prédite avec une fermeture qui est l’extension à masse volumique variable des modèles conçus pour le régime incompressible. Néanmoins, dans l’expérience considérée [11], l’anisotropie des composantes diagonales du tenseur de Reynolds augmente considérablement en fonction du nombre de Mach convectif. L’utilisation du modèle LRR-CCM dans cette situation permet la prise en compte qualitative de cette influence.

Quant aux mécanismes d’inhomogénéité, nous avons évalué l’importance des termes liés au flux de masse turbulent (en s’appuyant sur les mesures des références [208, 93] à $M_c = 0.4$ et $\rho_1/\rho_2 = 0.74$). Selon nos estimations, le bilan de l’énergie totale pourrait être affecté par le gradient transversal du flux de masse turbulent bien que la différence entre la moyenne de Favre et celle de Reynolds soit faible pour les variables cinématiques.

Ecoulements pariétaux. Dans nos calculs de couches limites sur plaque plane nous avons obtenu des bonnes prédictions sans corrections de compressibilité jusqu’au régime supersonique élevé ($M_\infty = 4.5$). L’amplification des composantes du tenseur de Reynolds par un gradient de pression adverse qui ajoute une compression moyenne à la déformation du cisaillement est correctement représentée par la fermeture du second ordre.

Dans le cas d’une interaction forte entre une onde de choc oblique et une couche limite, les prédictions sont en moins bon accord avec l’expérience. Ceci est partiellement dû à l’utilisation de lois de paroi qui perdent leur validité dans le cas d’une zone décollée. De plus, nous avons identifié un deuxième défaut de cette méthode de traitement de la zone pariétale, celui de ne pas reproduire suffisamment la propagation des perturbations de pression dans la couche subsonique pariétale. L’utilisation de la fermeture au second ordre permet néanmoins l’obtention des détails du système très complexe d’ondes de pression moyenne et une meilleure représentation de la physique de la bulle de recirculation par rapport aux modèles de fermeture au premier ordre.

Sur ce sujet de recherche, de nombreuses interrogations restent à lever, parmi lesquelles certaines nous semblent à la portée d’études à moyen terme.

- La méthode de résolution du système de convection-production de manière “couplée” pourrait être étendue à un système qui inclut un modèle fortement réalisable pour la partie rapide de la corrélation pression-déformation (e.g. le modèle de la référence [98]). Ceci constituerait un pas supplémentaire vers l’analyse théorique et la solution numérique très précise de l’ensemble des contributions hyperboliques des systèmes d’équations statistiques des écoulements turbulents.
- Puisque les deux parties (rapide et lente) du mécanisme de redistribution d’énergie entre les composantes du tenseur de Reynolds agissent en même temps dans un écoulement à déformation non-nulle, nous proposons la simulation numérique directe du processus de retour à l’isotropie à différentes valeurs du nombre de Mach turbulent. Les résultats pourraient aider à clarifier l’origine de la modification des termes de redistribution par la compressibilité.
- La classe des modèles de fermeture au premier ordre ayant une relation constitutive généralisée (non-linéaire) s’est montrée très attractive au cours de ce travail. Une correction locale de compressibilité du type CCM pourrait être intégrée dans l’expression algébrique pour le tenseur de Reynolds par une modification des coefficients en fonction du nombre de Mach de distorsion.

D’autres questions liées à ce travail nécessitent des études plus fondamentales.

- Le faible nombre de Reynolds des simulations numériques directes constitue une difficulté majeure quant au développement des modèles pour des écoulements pleinement turbulents. Une meilleure compréhension des effets de bas nombre de Reynolds à haut nombre de Mach pourrait aider à mieux exploiter les bases de données de DNS.
- Dans ce travail, nous avons utilisé un modèle très simple pour l’ensemble des termes de transport diffusif du tenseur de Reynolds. On pourrait envisager une étude plus approfondie sur l’adéquation de ce type de modélisation à haut nombre de Mach (par référence aux mesures et simulations de la couche de mélange par exemple).
- L’interaction idéalisée entre une onde de choc et un champ de turbulence homogène a été traité de manière simplifiée dans notre étude. La performance des modèles du second ordre dans cette situation mérite une analyse détaillée, notamment dans le cas d’un choc d’intensité plus élevée. A l’égard du problème d’interaction entre une onde de choc et une couche limite, il serait également intéressant d’étudier un cas où le champ en amont du choc est anisotrope.

Bibliographie

- [1] J. Détery and J.G. Marvin. Shock-wave boundary layer interactions. Technical Report 280, AGARDograph, 1977.
- [2] S.K. Lele. Compressibility effects on turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 26, 1994.
- [3] J.L. Lumley. Some comments on turbulence. *Phys. Fluids A*, 2:203–211, 1992.
- [4] B.E. Launder. Turbulence modelling for the nineties: Second moment closure ... and beyond? In *Twelfth Int. Conf. Num. Fluid Dynamics*, 1990.
- [5] C.G. Speziale. Analytical methods for the development of Reynolds stress closures in turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 23:107–157, 1991.
- [6] M.A. Leschziner. Computation of aerodynamic flows with turbulence-transport models based on second-moment closure. *Computers & Fluids*, 24(4):377–392, 1995.
- [7] O. Zeman. On the decay of compressible isotropic turbulence. *Phys. Fluids A*, 3:951–955, 1991.
- [8] G.A. Blaisdell, N.N. Mansour, and W.C. Reynolds. Numerical simulations of compressible homogeneous turbulence. Technical Report TF-50, Dept. Mech. Eng., Stanford University, 1991.
- [9] G.N. Coleman and N.N. Mansour. Simulation and modeling of homogeneous compressible turbulence under isotropic mean compression. In *Eighth Symposium on Turbulent Shear Flows, Munich*, September 1991.
- [10] M. Samimy and G.S. Elliott. Effects of compressibility on the characteristics of free shear layers. *AIAA J.*, 28(3):439–445, 1990.
- [11] S.G. Goebel and J.C. Dutton. Experimental study of compressible turbulent mixing layers. *AIAA J.*, 29(4):538–546, 1991.
- [12] S. Barre, C. Quine, and J.P. Dussauge. Compressibility effects on the structure of supersonic mixing layers: experimental results. *J. Fluid Mech.*, 259:47–78, 1994.
- [13] A.W. Vreman. *Direct and large-eddy simulation of the compressible turbulent mixing layer*. PhD thesis, University of Twente, 1995.
- [14] K.H. Luo. Pressure and dilatation effects in high-speed turbulence. In *2nd ERCOFTAC workshop on direct and Large Eddy simulation*, volume 2, page E.3.1, 1996.
- [15] J.L. Lumley. Computational modelling of turbulent flows. *Advances in Applied Mechanics*, 18:123–176, 1978.
- [16] J.M. Hérard. Basic analysis of some second moment closures. Part I: incompressible isothermal turbulent flows. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 6(4):213–233, 1994.

- [17] J. Jannicka and J.L. Lumley. Second-order modelling in non-constant density flows. Technical Report FDA-81-01, Dept. Mech. Eng., Cornell University, 1981.
- [18] J.O. Hinze. *Turbulence*. McGraw-Hill, second edition, 1975.
- [19] H. Schlichting. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, seventh edition, 1979.
- [20] A.S. Monin and A.M. Yaglom. *Statistical fluid mechanics: mechanics of turbulence*. MIT Press, 1971.
- [21] A. Favre. Equations des gaz turbulents, parties I et II. *J. de Mécanique*, 4(3):362–421, 1965.
- [22] P. Bradshaw. Compressible turbulent shear layers. In *Ann. Rev. Fluid Mech.*, pages 33–54. 1977.
- [23] S.K. Lele. Notes on the effects of compressibility on turbulence. Technical Report 145, CTR, Stanford University, 1993.
- [24] R.S. Amano and P. Goel. Investigation of third-order closure model of turbulence for the computation of incompressible flows in a channel with a backward facing step. *J. Fluids Eng.*, 109:424–428, 1987.
- [25] R. Friedrich. Compressible turbulence. In *Space Course, Munich*, Octobre 1993.
- [26] J. He, J.Y. Kazakia, and J.D. Walker. An asymptotic two-layer model for supersonic turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 295:159–198, 1995.
- [27] T.P. Sommer, R.M. So, and H.S. Zhang. Supersonic flow calculations using a Reynolds-stress and a thermal eddy diffusivity turbulence model. *J. Fluids Eng.*, 116, 1994.
- [28] T.-H. Shih and J.L. Lumley. Modelling of pressure correlation terms in Reynolds stress and scalar flux equations. Technical Report FDA-85-3, Cornell University, 1985.
- [29] J. Rotta. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. *Zeitschrift für Physik*, 129:547–572, 1951.
- [30] B.A. Daly and F.H. Harlow. Transport equations in turbulence. *Phys. Fluids*, 13:2634–2649, 1970.
- [31] K. Hanjalic and B.E. Launder. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. *J. Fluid Mech.*, 52:609–638, 1972.
- [32] D. Naot, A. Shavit, and M. Wolfshtein. Two-point correlation model and the redistribution of Reynolds stresses. *Phys. Fluids*, 16:738–743, 1973.
- [33] G.L. Mellor and H.J. Herring. A survey of the mean field closure models. *AIAA J.*, 11:590–599, 1973.
- [34] B.E. Launder, G.J. Reece, and W. Rodi. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.*, 68:537–566, 1975.
- [35] F.H. Harlow and P.I. Nakayama. Turbulence transport equations. *Phys. Fluids*, 10:2323–2331, 1967.
- [36] U. Schumann. Realizability of Reynolds-stress turbulence models. *Phys. Fluids*, 20:721–724, 1977.
- [37] C.G. Speziale. Invariance of turbulent closure models. *Phys. Fluids*, 22(6):1033–1037, 1979.
- [38] S. Fu, B.E. Launder, and D.P. Tselepidakis. Accommodating the effects of high strain rates in modelling the pressure-strain correlation. Technical Report TFD/87/5, UMIST Mechanical Engineering Dept., 1987.

- [39] S.H. El Tahry. k - ϵ equations for compressible reciprocating engine flows. *Journal of Energy*, 7:345–353, 1983.
- [40] L. Lepenven and G. Serre. A generalized k - ϵ model for compressed turbulence. In *EU-ROTHERM Toulouse, France*, December 1991.
- [41] M.W. Rubesin. A one-equation model of turbulence for use with the compressible Navier-Stokes equations. Technical Report TM X-73128, NASA, 1976.
- [42] M.W. Rubesin. Extra compressibility terms for Favre averaged two-equation models of inhomogeneous turbulent flows. Technical Report CR-177556, NASA, 1990.
- [43] J.R. Ristorcelli. A representation for the turbulent mass flux contribution to Reynolds stress and two-equation closures for compressible turbulence. Technical Report 93-88, NASA ICASE, 1993.
- [44] S. Sarkar, G. Erlebacher, M.Y. Hussaini, and H.O. Kreiss. The analysis and modelling of dilatational terms in compressible turbulence. *J. Fluid Mech.*, 227:473–493, 1991.
- [45] S. Sarkar, G. Erlebacher, and M.Y. Hussaini. Compressible homogeneous shear: Simulation and modelling. Technical Report 92-6, ICASE, 1992.
- [46] A.M. El-Baz and B.E. Launder. Second-moment modelling of compressible mixing layers. In W. Rodi and F. Martinelli, editors, *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 2*, pages 63–72, 1993.
- [47] T. Passot and A. Pouquet. Numerical simulation of compressible homogeneous flows in the turbulent regime. *J. Fluid Mech.*, 181:441–466, 1987.
- [48] S. Lee, S.K. Lele, and P. Moin. Direct numerical simulation of isotropic turbulence interacting with a weak shock wave. *J. Fluid Mech.*, 251:533–562, 1993.
- [49] G.N. Coleman, J. Kim, and R.D. Moser. A numerical study of turbulent supersonic isothermal-wall channel flow. *J. Fluid Mech.*, 305:159–183, 1995.
- [50] D. Vandromme. *Contribution à la modélisation et à la prédiction d'écoulements turbulents à masse volumique variable*. Thèse d'état, Université de Lille, 1983.
- [51] C. Cambon, G.N. Coleman, and N.N. Mansour. Rapid distortion analysis and direct simulation of compressible homogeneous turbulence at finite Mach numbers. *J. Fluid Mech.*, 257:641–665, 1993.
- [52] S. Sarkar and B. Lakshmanan. Application of a Reynolds stress turbulence model to the compressible shear layer. *AIAA J.*, 29:743–749, 1991.
- [53] J.H. Morrison. A compressible Navier-Stokes solver with two-equation and Reynolds stress turbulence closure models. *Report No. CR 4440*, NASA, 1992.
- [54] F.S. Lien and M.A. Leschziner. Modelling shock/turbulent boundary-layer interaction with second-moment closure within a pressure-velocity strategy. In *Thirteenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Rome*, July 1992.
- [55] L. Davidson. Reynolds stress transport modelling of shock induced separated flow. *Computers & Fluids*, 24(3):253–268, 1995.
- [56] D. Vandromme. Turbulence modelling for compressible flows and implementation in Navier-Stokes solvers. Lecture series, von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1991.
- [57] J.L. Lumley. Pressure-strain correlation. *Phys. Fluids*, 18(6):750, 1975.

- [58] C.G. Speziale. Modeling the pressure gradient–velocity correlation of turbulence. *Phys. Fluids*, 28(1):69–71, 1985.
- [59] P.Y. Chou. On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation. *Quart. Appl. Mech.*, 3:38–54, 1945.
- [60] F.H. Champagne, V.G. Harris, and S. Corrsin. Experiments on nearly homogeneous turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.*, 41(81–139), 1970.
- [61] V.G. Harris, J.A. Graham, and S. Corrsin. Further experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.*, 81(4):657–687, 1977.
- [62] C.G. Speziale, S. Sarkar, and T.B. Gatski. Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach. *J. Fluid Mech.*, 227:245–272, 1991.
- [63] A.V. Johansson and M. Hallback. Modelling of rapid pressure strain in Reynolds–stress closures. *J. Fluid Mech.*, 269(143–168), 1994.
- [64] T.-H. Shih and J.L. Lumley. Critical comparison of second order closures with direct numerical simulations of homogeneous turbulence. *AIAA J.*, 31:663–670, 1993.
- [65] S. Sarkar and C.G. Speziale. A simple nonlinear model for the return to isotropy in turbulence. *Phys. Fluids*, A 2(1):84–93, 1990.
- [66] S. Sarkar. The pressure–dilatation correlation in compressible flows. *Phys. Fluids A*, 4:2674–2682, 1992.
- [67] C.G. Speziale, R. Abid, and N.N. Mansour. Evaluation of Reynolds stress turbulence closures in compressible homogeneous shear flow. Technical Report 94-17, NASA ICASE, 1994.
- [68] S. Sarkar. The stabilizing effect of compressibility in turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.*, 282:163–186, 1995.
- [69] T. Gatski, S. Sarkar, C. Speziale, L. Balakrishnan, R. Abid, and E. Anderson. Assessment and application of Reynolds stress closure models to high–speed compressible flows. AIAA paper no. 90–5247, 1990.
- [70] M. Tagawa, Y. Nagano, and T. Tsuji. Turbulence model for the dissipation components of Reynolds stresses, Septembre 1991.
- [71] B.E. Launder and D.B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 3:269–289, 1974.
- [72] W.C. Reynolds. Modeling of fluid motions in engines – an introductory overview. In J.N. Mattavi and C.A. Amann, editors, *Combustion modeling in reciprocating engines*, 1980.
- [73] C. Cambon, Y. Mao, and D. Jeandel. On the application of time dependent scaling to the modelling of turbulence undergoing compression. *Eur. J. Mech. B*, 11(6):683–703, 1992.
- [74] Y. Mao, M. Buffat, and D. Jeandel. Simulation of the turbulent flow inside the combustion chamber of a reciprocating engine with a finite element method. *J. Fluids Eng.*, 116:363–369, 1994.
- [75] H.S. Zhang, R.M. So, C.G. Speziale, and Y.G. Lai. A near–wall two–equation model for compressible turbulent flows. AIAA paper no. 92–0442, 1992.
- [76] O. Zeman. Dilatational dissipation: The concept and application in modelling compressible mixing layers. *Phys. of Fluids A2*, 2:178–188, 1990.
- [77] G.A. Erlebacher, M.Y. Hussaini, H.O. Kreiss, and S. Sarkar. The analysis and simulation of compressible turbulence. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 2:73–95, 1990.

- [78] G.A. Blaisdell, N.N. Mansour, and W.C. Reynolds. Compressibility effects on the growth and structure of homogeneous turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.*, 256:443–485, 1993.
- [79] J.F. Debiève, P. Dupont, A.J. Smits, and J.P. Dussauge. Compressibility versus density variations and the structure of turbulence: a viewpoint from experiments. Marseille, France, 1996. IUTAM Symp. variable density flow.
- [80] D. Papamoschou. Evidence of shocklets in a counterflow supersonic shear layer. *Phys. Fluids*, 7(2):233–235, 1995.
- [81] J.L. Lumley. The role of entropy fluctuations in turbulent flow. Lecture Notes, Sibley School of Mech. Eng., Cornell University, 1989.
- [82] O. Zeman. Toward a constitutive relation in compressible flows. In T.B. Gatski, S. Sarkar, and C.G. Speziale, editors, *Studies in Turbulence*. Springer Verlag, 1992.
- [83] J.R. Ristorcelli. A pseudo-sound constitutive relationship for the dilatational covariances in compressible turbulence: an analytical theory. Technical Report 95-22, NASA ICASE, 1995.
- [84] L. Shao and J.P. Bertoglio. Large-eddy simulations of weakly compressible isotropic turbulence. In S. Gavrilakis, L. Machiels, and P.A. Monkewitz, editors, *Advances in turbulence VI*, Sixth European Turbulence Conference, pages 287–290, Lausanne, CH, July 1996.
- [85] O. Praud. Etude spectrale d’une turbulence isotrope, homogène, stationnaire, faiblement compressible. Technical report, LMFA, Ecole Centrale Lyon, 1996.
- [86] H.P. Irwin. Measurements in a self-preserving plane wall jet in a positive pressure gradient. *J. Fluid Mech.*, 61(1):33–63, 1973.
- [87] P.G. Huang, G.N. Coleman, and P. Bradshaw. Compressible turbulent channel flows: DNS results and modelling. *J. Fluid Mech.*, 305:185–218, 1995.
- [88] L. Shao. *Etude d’une couche de mélange turbulente non cisailée par simulation des grandes échelles*. Thèse, Ecole Centrale Lyon, 1992.
- [89] D.A. Briggs, J.H. Ferziger, J.R. Koseff, and S.G. Monismith. Entrainment in a shear-free mixing layer. *J. Fluid Mech.*, 310:215–241, 1996.
- [90] C.C. Shir. A preliminary numerical study of atmospheric turbulent flows in the idealized planetary boundary layer. *J. Atmosph. Sci.*, 30:1327–1339, Octobre 1973.
- [91] F.S. Lien and M.A. Leschziner. Assessment of turbulence transport models including non-linear RNG eddy viscosity formulation and second-moment closure for flow over a backward facing step. *Computers & Fluids*, 23(8):983–1004, 1994.
- [92] O. Zeman. Compressible turbulence subjected to shear and rapid compression. In *Eighth Symposium on Turbulent Shear Flows, Munich*, September 1991.
- [93] R.D. Bowersox and J.A. Schetz. Measurements of compressible turbulent flow structure in a supersonic mixing layer. *AIAA J.*, 33(11):2101–2106, 1995.
- [94] A. Yoshizawa. Simplified statistical approach to complex turbulent flows and ensemble-mean compressible turbulence modeling. *Phys. Fluids*, 7(12):3105–3117, 1995.
- [95] T.-H. Shih, J.L. Lumley, and J.Y. Chen. Second-order modelling of a passive scalar in a turbulent shear flow. *AIAA J.*, 28(4):610–617, 1990.
- [96] J.-M. Hérard, A. Forestier, and X. Louis. A non strictly hyperbolic system to describe compressible turbulence. *Report No. HE-41/94/11/A*, Electricité de France, 1994.

- [97] S.B. Pope. PDF methods for turbulent reactive flows. *Prog. Energy Combust. Sci.*, 11:119–192, 1985.
- [98] J.-M. Hérard and G. Pot. On the suitability of some algorithms to compute realisable Reynolds stress closures. Venezia, Italy, 1995.
- [99] T.-H. Shih and A. Shabbir. Methods of ensuring realizability for non-realizable second order closures. Technical Report 106681, NASA TM, 1994.
- [100] T.-H. Shih, J. Zhu, and J.L. Lumley. Modeling of wall-bounded complex flows and free shear flows. Technical Report TM 106513, NASA ICOMP, 1994.
- [101] C.G. Speziale, R. Abid, and P.A. Durbin. New results on the realizability of Reynolds stress turbulence closures. Technical Report 93-76, NASA ICASE, 1993.
- [102] J.-M. Hérard. Suitable algorithms to preserve the realisability of Reynolds stress closures. In *ASME FED 215*, 2nd joint ASME/JSME Fluids Engineering Division Summer Meeting, pages 73–80, Hilton Head, SC, USA, August 1995.
- [103] G. Brun, J.M. Hérard, L. Leal de Sousa, and M. Uhlmann. Numerical modelling of turbulent compressible flows using second order models. In *Finite Volumes for Complex Applications*, First Int. Symp., pages 337–346, Rouen, France, 1996.
- [104] S.B. Pope. A more general effective-viscosity hypothesis. *J. Fluid Mech.*, 72:331–340, 1975.
- [105] J.L. Lumley. Toward a turbulent constitutive relation. *J. Fluid Mech.*, 41:413–434, 1970.
- [106] T.-H. Shih and J.L. Lumley. Remarks on turbulent constitutive relations. *Math. Comput. Modelling*, 18(2):9–16, 1993.
- [107] T.-H. Shih, W.W. Liou, A. Shabbir, Z. Yang, and J. Zhu. A new k - ϵ eddy viscosity model for high Reynolds number turbulent flows — model development and validation. Technical Report TM 106721, NASA ICOMP, 1994.
- [108] W. Rodi. A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses. *ZAMM*, 56:219–221, 1976.
- [109] T.B. Gatski and C.G. Speziale. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, 254:59–78, 1993.
- [110] S. Wallin and A.V. Johansson. A new explicit algebraic Reynolds stress turbulence model including an improved near-wall treatment. In C.-J. Chen, C. Shih, J. Lienau, and R.J. Kung, editors, *Flow Modelling and Turbulence Measurements VI*, pages 399–406, Tallahassee, Florida, September 1996.
- [111] A. Yoshizawa. Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy viscosity representation. *Phys. Fluids*, 27(6), 1984.
- [112] R. Rubinstein and J.M. Barton. Nonlinear Reynolds stress models and the renormalization group. *Phys. Fluids*, 2(8), 1990.
- [113] C.G. Speziale. On nonlinear k - l and k - ϵ models of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 178:459–475, 1987.
- [114] T.-H. Shih, J. Zhu, and J.L. Lumley. A realizable Reynolds stress algebraic equation model. Technical Report 105993, NASA TM, 1993.
- [115] M. Uhlmann. Préparation d’un solveur des équations Navier–Stokes d’un fluide compressible pour l’introduction d’un modèle de turbulence du second ordre. Technical Report 95–1, LMFA, Ecole Centrale de Lyon, France, 1995.

- [116] A. Jameson, W. Schmidt, and E. Turkel. Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge–Kutta time stepping schemes. AIAA paper no. 81–1259, 1981.
- [117] P. Woodward and P. Colella. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *J. Comp. Physics*, 54:115–173, 1984.
- [118] P.D. Lax. *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*. CBMS Monographs. SIAM, Philadelphia, 1973.
- [119] R. Courant and K.O. Friedrichs. *Supersonic flow and shock waves*. Springer, 1976.
- [120] A. Harten. On the symmetric form of systems of conservation laws with entropy. *J. Comp. Physics*, 49:151–164, 1983.
- [121] S. Godunov, A. Zabrodine, M. Ivanov, A. Kraiko, and G. Prokopov. *Résolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz*. Editions MIR, Moscou, 1979.
- [122] P.L. Roe. Characteristic-based schemes for the Euler equations. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 18:337–365, 1986.
- [123] C.G. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*. J. Wiley, 1990.
- [124] P.L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J. Comp. Physics*, 43, 1981.
- [125] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comp. Physics*, 49:357–393, 1983.
- [126] S. Osher and S. Chakravarthy. Upwind schemes and boundary conditions with applications to Euler equations in general geometries. *J. Comp. Physics*, 50:447–481, 1983.
- [127] W. Dai and P.R. Woodward. A simple Riemann solver and high-order Godunov schemes for hyperbolic systems of conservation laws. *J. Comp. Physics*, 121:51–61, 1995.
- [128] J.L. Steger and R.F. Warming. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamics equations with applications to finite-difference methods. *J. Comp. Physics*, 40:263–293, 1981.
- [129] B. van Leer. Flux-vector splitting for the Euler equations. In *Proceeding, 8th Int. Conf. Num. Meth. Fluid Dyn.* Springer, 1982.
- [130] P. Le Floch. Entropy weak solutions to nonlinear hyperbolic systems under nonconservative form. *Commun. In Partial Differential Equations*, 13(6):669–727, 1988.
- [131] P. Le Floch and T.-P. Liu. Existence theory for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form. *Report No. 254*, Ecole Polytechnique, Centre de Math. App., 1992.
- [132] J.-M. Hérard. Solveur de Riemann approché pour un système hyperbolique non conservatif issu de la turbulence compressible. *Report No. HE-41/95/009/A*, Electricité de France, 1995.
- [133] A. Page and M. Uhlmann. Traitement de la partie hyperbolique du système des équations Navier-Stokes moyennées et des équations de transport issues d’une fermeture au premier ordre pour un fluide compressible. Technical Report 96-1, LMFA, Ecole Centrale de Lyon, France, 1996.
- [134] L. Hallo. *Etude de schémas numériques pour la simulation des écoulements tridimensionnels turbulents compressibles réactifs*. Thèse, Ecole Centrale de Lyon, 1995.
- [135] G. Brun and L. Hallo. Développement d’un code de calcul par éléments finis des écoulements turbulents réactifs subsonique et supersoniques. société METRAFLU, 1994.

- [136] B. Stoufflet, J. Periaux, F. Fezoui, and A. Dervieux. Numerical simulation of 3D hypersonic Euler flows around space vehicles using adapted finite elements. AIAA paper no. 87-0560, 1987.
- [137] P. Rostand. *Sur une Methode de Volume Finis en Maillage non Structure pour le Calcul D'Écoulements Visqueux Compressible*. Thèse, L'Université Paris VI, Mars 1989.
- [138] M. Uhlmann and G. Brun. Solveur pour le système des équations hyperboliques non-conservatives issu d'un modèle de transport des tensions de Reynolds. Technical Report 95-2, LMFA, Ecole Centrale de Lyon, France, 1995.
- [139] T. Gallouet and J.-M. Masella. Un schéma de Godunov approché. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I: Analyse numérique*, 323:77–84, 1995.
- [140] J.-M. Masella, I. Faille, and T. Gallouet. On a rough Godunov scheme. *Int. J. Comp. Fluid Dynamics*, 1996. submitted.
- [141] T. Buffard, T. Gallouet, and J.-M. Hérard. Schéma VFROE en variables caractéristiques. Principe de base et applications aux gaz réels. *Report No. HE-41/96/041/A*, Electricité de France, 1996.
- [142] F.S. Lien and M.A. Leschziner. Upstream monotonic interpolation for scalar transport with application to complex turbulent flows. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 19:527–548, 1994.
- [143] F. Ladeinde. Supersonic flux-split procedure for second moments of turbulence. *AIAA J.*, 33(7):1185–1195, 1995.
- [144] J.H. Morrison. A compressible Navier–Stokes solver with two-equation and Reynolds stress turbulence closure models. *Report No. CR 4440*, NASA, 1992.
- [145] B. Larrouturou. How to preserve the mass fractions positivity when computing compressible multi-component flows. *J. Comp. Phys.*, 95:59–84, 1991.
- [146] G.A. Sod. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *J. Comp. Phys.*, 27:1–31, 1978.
- [147] D.H. Munro. *Yorick: an interpreted language*. Regents of the University of California, 1994. Public domain software: <ftp.irisa.fr:/News/comp.sources.misc/volume46>.
- [148] B. Einfeldt, C.D. Munz, P.L. Roe, and B. Sjögreen. On Godunov-type methods near low densities. *J. Comp. Physics*, 92:273–295, 1991.
- [149] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. *J. Comp. Phys.*, 32:101–136, 1979.
- [150] H. Steve. *Schemas Implicites Linéarises Décentrés pour la Résolution des Equations d'Euler en Plusieurs Dimensions*. PhD Thesis, L'Université de Provence Aix-Marseille 1, Juillet 1988.
- [151] P.L. Roe. Discrete models for the numerical analysis of time-dependent multidimensional gas dynamics. *J. Comp. Physics*, 63:458–476, 1986.
- [152] J.C. Carette, H. Deconinck, H. Paillere, and P.L. Roe. Multidimensional upwinding: its relation to finite elements. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 20:935–955, 1995.
- [153] S. Aubert. *Etude de schémas à haute précision pour la simulation d'écoulements trans-soniques instationnaires ou visqueux. Application aux turbomachines*. Thèse, Ecole Centrale de Lyon, 1993.
- [154] K.H. Huebner. *The finite element method for engineers*. J. Wiley, 1975.

- [155] W.P. Jones. Numerical solution of 'elliptic flow' equations. Short course: Advanced flow calculation, Cranfield Fluid Engineering Unit, March 1981.
- [156] P. Sonneveld. CGS, a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 10(1):36–52, 1989.
- [157] O. Axelsson. A class of iterative methods for finite element equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 9:123–137, 1976.
- [158] H.A. Van Der Vorst. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of non-symmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 13(2):631–644, 1992.
- [159] C.C. Chuang and C.C. Chieng. Comparison of variants of the bi-conjugate gradient method for compressible Navier–Stokes solver with second moment closure. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 20:233–253, 1995.
- [160] L. Cambier, W. Ghazzi, J.P. Veulliot, and H. Viviani. Une approche par domaines pour le calcul d'écoulements compressibles. In *5e Colloque Int. sur les méthodes de calcul scientifique et technique de l'INRIA, Versailles*, Décembre 1981.
- [161] B. Perot and P. Moin. Shear-free turbulent boundary layers. Part 1. Physical insights into near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, 295:199–227, 1995.
- [162] K. Hanjalic and B.E. Launder. Contribution towards a Reynolds-stress closure for low-Reynolds-number turbulence. *J. Fluid Mech.*, 74:593–610, 1976.
- [163] M.M. Gibson and B.E. Launder. Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 86:491–511, 1978.
- [164] T.J. Craft and B.E. Launder. New wall-reflection model applied to the turbulent impinging jet. *AIAA J.*, 30:2970–2972, 1992.
- [165] B.E. Launder and D.P. Tselepidakis. Progress and paradoxes in modelling near-wall turbulence. In *Eighth Symposium on Turbulent Shear Flows, Munich*, September 1991.
- [166] R.A. Antonia and J. Kim. A numerical study of local isotropy of turbulence. *Phys. Fluids*, 6(2):834–841, 1994.
- [167] B.E. Launder and W.C. Reynolds. Asymptotic near-wall stress dissipation rates in a turbulent flow. *Phys. Fluids*, 26:1157–1158, 1983.
- [168] V.C. Patel, W. Rodi, and G. Scheuerer. Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: A review. *AIAA J.*, 23:1308–1319, 1985.
- [169] R.M. So, Y.G. Lai, and H.S. Zhang. A review of near-wall Reynolds–stress closures. Technical Report CR 4369, NASA, 1991.
- [170] P. Debaty. *Performances des modèles de turbulence au second ordre appliqués à des configurations axisymétriques simulés par éléments finis*. Thèse, Ecole Centrale de Lyon, France, 1994.
- [171] P.A. Durbin. A Reynolds stress model for near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, 249:465–498, 1993.
- [172] P.A. Durbin. Near-wall turbulence closure modeling without “damping functions”. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 3:1–13, 1991.
- [173] R.M. So, H.S. Zhang, T.B. Gatski, and C.G. Speziale. Logarithmic laws for compressible turbulent boundary layers. *AIAA J.*, 32(11):2162–2168, 1994.

- [174] M. Gad el Hak and P.R. Bandyopadhyay. Reynolds number effects in wall-bounded turbulent flows. *Appl. Mech. Rev.*, 47(8):307–364, 1994.
- [175] P.G. Huang and P. Bradshaw. Law of the wall for turbulent flows in pressure gradients. *AIAA J.*, 33(4):624–632, 1995.
- [176] R.M. So, H.S. Zhang, and C.G. Speziale. Near-wall modeling of the dissipation rate equation. *AIAA J.*, 29:2069–2076, 1991.
- [177] W. Rodi and N.N. Mansour. Low Reynolds number k - ϵ modelling with the aid of direct simulation data. In *Proceedings of the summer program*, pages 85–106. Center for Turbulence Research, 1990.
- [178] S. Tavoularis and U. Karnik. Further experiments on the evolution of turbulent stresses and scales in uniformly sheared turbulence. *J. Fluid Mech.*, 204(457–478), 1989.
- [179] M.M. Rogers, P. Moin, and W.C. Reynolds. The structure and modelling of the hydrodynamic and passive scalar fields in homogeneous turbulent shear flow. Technical Report TF-25, Dept. Mech. Eng., Stanford University, 1986.
- [180] M.J. Lee, J. Kim, and P. Moin. Structure of turbulence at high shear rate. *J. Fluid Mech.*, 216:561–583, 1990.
- [181] R. Abid and C.G. Speziale. Predicting equilibrium states with Reynolds stress closures in channel flow and homogeneous shear flow. Technical Report 92-28, NASA ICASE, 1992.
- [182] C.G. Speziale and T.B. Gatski. An alternative assessment of second-order closure models in turbulent shear flows. Technical Report 94-10, NASA ICASE, 1994.
- [183] L. Lepenven, J.N. Gence, and G. Comte-Bellot. On the approach to isotropy of homogeneous turbulence: Effect of the partition of kinetic energy among the velocity components. In *Frontiers in Fluid Mechanics*, 1986.
- [184] M. Uhlmann. Choix du modèle, discrétisation et validation d’une fermeture du second ordre pour des écoulements turbulents compressibles — configuration de base. Technical Report 96-2, LMFA, Ecole Centrale de Lyon, France, 1996.
- [185] R.S. Rogallo. Numerical experiments in homogeneous turbulence. Technical Report TM 81315, NASA, 1981.
- [186] S. Tavoularis. Asymptotic laws for transversely homogeneous turbulent shear flows. *Phys. Fluids*, 28(3):999–1001, 1985.
- [187] P.S. Bernard and C.G. Speziale. Bounded energy states in homogeneous turbulent shear flow – an alternate view. Technical Report 90-66, NASA ICASE, 1990.
- [188] C.G. Speziale and N. Mac Giolla Mhuiris. On the prediction of equilibrium states in homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 209:591–615, 1989.
- [189] W.G. Lee and M.K. Chung. The equilibrium states and the stability analysis of Reynolds stress equations for homogeneous turbulent shear flows. *Phys. Fluids*, 7(11):2807–2819, 1995.
- [190] S. Tavoularis and S. Corrsin. Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow with a uniform mean temperature gradient. Part 1. *J. Fluid Mech.*, 104(311–347), 1981.
- [191] S. Sarkar, G. Erlebacher, and M.Y. Hussaini. Homogeneous compressibles shear: simulation and modeling. In *Eighth Symposium on Turbulent Shear Flows, Munich*, September 1991.
- [192] S. Sarkar. Turbulence modeling and simulation of high-speed flows. In *Space Course, Munich*, Octobre 1993.

- [193] S. Sarkar. On density and pressure fluctuations in uniformly sheared compressible flow. Marseille, France, 1996. IUTAM Symp. variable density flow.
- [194] A. Simone. *Etude théorique et simulation numérique de la turbulence compressible en présence de cisaillement ou de variation de volume à grande échelle*. Thèse, Ecole Centrale de Lyon, 1995.
- [195] A. Simone, G.N. Coleman, and C. Cambon. The effect of compressibility on turbulent shear flow: a rapid distortion theory and direct numerical simulation study. *J. Fluid Mech.*, 1997. to appear.
- [196] R. Friedrich. Compressibility effects due to turbulent fluctuations. Lausanne, Switzerland, 1996. Sixth European Turbulence Conference.
- [197] A. Simone and C. Cambon. Rapid distortion and direct simulation approach to compressibility in turbulent shear flow. In *Turbulent shear flows X*. Pennsylvania State University, 1995.
- [198] B. Dziomba and H.E. Fiedler. Effect of initial conditions on two-dimensional free shear layers. *J. Fluid Mech.*, 152:419–442, 1985.
- [199] J.H. Bell and R.D. Mehta. Development of a two stream mixing layer from tripped and untripped boundary layers. *AIAA J.*, 28(12):2034–2042, 1990.
- [200] A.A. Townsend. *The Structure of Turbulent Shear Flow*. Cambridge Press, second edition, 1976.
- [201] F.K. Browand and B.O. Latigo. Growth of the two-dimensional mixing layer from a turbulent and nonturbulent boundary layer. *Phys. Fluids*, 22(6):1011–1019, 1979.
- [202] N.K. Pui and I.S. Garthshore. Measurements of the growth rate and structure in plane turbulent mixing layers. *J. Fluid Mech.*, 91:111–130, 1979.
- [203] D.W. Bogdanoff. Compressibility effects in turbulent shear layers. *AIAA J.*, 21(6):926–927, 1983.
- [204] D. Papamoschou and A. Roshko. The compressible turbulent shear layer: an experimental study. *J. Fluid Mech.*, 197:453–477, 1988.
- [205] D. Papamoschou. Structure of the compressible turbulent shear layer. *AIAA J.*, 29:680–681, 1991.
- [206] J.L. Hall, P.E. Dimotakis, and H. Rosemann. Experiments in nonreacting compressible shear layers. *AIAA J.*, 31:2247–2254, December 1993.
- [207] P.E. Dimotakis. Two-dimensional shear-layer entrainment. *AIAA J.*, 24(11):1791–1797, 1986.
- [208] R.D. Bowersox and J.A. Schetz. Compressible turbulence measurements in a high-speed high-Reynolds-number mixing layer. *AIAA J.*, 32(4), 1994.
- [209] N.D. Sandham and W.C. Reynolds. Compressible mixing layer: linear theory and direct simulation. *AIAA J.*, 28(4):618–624, 1990.
- [210] N.D. Sandham and W.C. Reynolds. Three-dimensional simulations of large eddies in the compressible mixing layer. *J. Fluid Mech.*, 224:133–158, 1991.
- [211] F. Cruaud. *Etude numérique de couches de mélange et jets supersoniques chauffés à l'aide d'une fermeture aux tensions de Reynolds*. Thèse, Université Paris VI, 1993.

- [212] G.S. Settles and L.J. Dodson. Hypersonic turbulent boundary-layer and free shear database. Technical Report CR 177610, NASA, 1993.
- [213] P.S. Klebanoff. Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. Technical Report 1247, NACA, 1954.
- [214] H.H. Fernholz and P.J. Finley. A critical compilation of compressible turbulent boundary layer data. Technical Report 223, AGARDograph, 1977.
- [215] J. Andreopoulos, F. Durst, Z. Zaric, and J. Jovanovic. Influence of Reynolds number on characteristics of turbulent wall boundary layers. *Experiments in Fluids*, 2:7–16, 1984.
- [216] R.A. Antonia, D.K. Bisset, and L.W. Browne. Effect of Reynolds number on the topology of the organized motion in a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 213:267–286, 1990.
- [217] M.V. Morkovin. Effects of compressibility on turbulent flows. In *Mécanique de la turbulence*, pages 367–380. Editions CNRS, Paris, 1962.
- [218] A.J. Smits, E.F. Spina, A.E. Alving, R.W. Smith, E.M. Fernando, and J.F. Donovan. A comparison of the turbulence structure of subsonic and supersonic boundary layers. *Phys. Fluids A*, 1(11):1865–1875, 1989.
- [219] H.H. Fernholz and P.J. Finley. A further compilation of compressible turbulent boundary layer data with a survey of turbulence data. Technical Report 263, AGARDograph, 1981.
- [220] M. Acharya, C.C. Horstman, and M.I. Kussoy. Reynolds number effects on the turbulence field in compressible boundary layers. *AIAA J.*, 17(4):380–386, 1979.
- [221] I. Yudiana. *Etude des modèles à bas nombre de Reynolds pour la simulation numérique des écoulements turbulents compressibles de proche paroi avec et sans interaction de choc*. Thèse, Ecole Centrale de Lyon, 1996.
- [222] H.H. Fernholz and P.J. Finley. A critical commentary on mean flow data for two-dimensional compressible turbulent boundary layers. Technical Report 253, AGARDograph, 1981.
- [223] A.J. Smits and J.P. Dussauge. *Turbulent shear layers in supersonic flow*. AIP Press, 1996.
- [224] E.F. Spina, A.J. Smits, and S.K. Robinson. The physics of supersonic turbulent boundary layers. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 26:287–319, 1994.
- [225] P. Bradshaw. The effect of mean compression or dilatation on the turbulence structure of supersonic boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 63(3):449–464, 1974.
- [226] E.M. Fernando and A.J. Smits. A supersonic turbulent boundary layer in an adverse pressure gradient. *J. Fluid Mech.*, 211:285–307, 1990.
- [227] J. Détery. Etude expérimentale de la réflexion d’une onde de choc sur une paroi chauffée en présence d’une couche limite turbulente. *La Recherche Aéronautique*, (1):1–23, 1992.
- [228] R. Benay. Modélisation de la turbulence dans une interaction onde de choc–couche limite sur une paroi chauffée. *La Recherche Aéronautique*, (5):45–68, 1991.
- [229] J.M. Champney. Modelling of turbulence for compression corner flows and internal flows. AIAA paper no. 89-2344, 1989.
- [230] S. Obi, M. Peric, and G. Scheuerer. Second-moment calculation procedure for turbulent flows with collocated variable arrangement. *AIAA J.*, 29(4):585–590, 1991.
- [231] R. Abid, T.B. Gatski, and J.H. Morrison. Assessment of pressure-strain models in predicting compressible, turbulent ramp flows. *AIAA J.*, 33(1):156–159, 1995.

- [232] S.K. Lele. A consistency condition for Reynolds stress closures. *Phys. Fluids*, 28:64–69, 1985.
- [233] J.W. Deardorff. The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence. *J. Fluids Eng.*, pages 429–438, 1973.
- [234] T. Poinso and S.K. Lele. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *J. Comp. Physics*, 101:104–129, 1992.
- [235] J.W. Trolhier and R.E. Duffy. Turbulence measurements in shock-induced flows. *AIAA J.*, 23(8):1172–1178, 1985.
- [236] A. Honkan and J. Andreopoulos. Experiments in a shock wave/homogeneous turbulence interaction. Technical Report 90–1647, AIAA paper, 1990.
- [237] A. Honkan, C.B. Watkins, and J. Andreopoulos. Experimental study of interactions of shock wave with free-stream turbulence. *J. Fluids Eng.*, 116:763–769, 1994.
- [238] S. Barre, D. Alem, and J.P. Bonnet. Experimental study of a normal shock/homogeneous turbulence interaction. *AIAA J.*, 34(5):968–974, 1996.
- [239] D. Rotman. Shock wave effects on a turbulent flow. *Phys. Fluids A*, 3(7):1792–1806, 1991.
- [240] R. Hannappel and R. Friedrich. Interaction of isotropic turbulence with a normal shock wave. *Appl. Sci. Research*, 51:507–512, 1993.
- [241] S. Lee, S.K. Lele, and P. Moin. Corrigendum: Direct numerical simulation of isotropic turbulence interacting with a weak shock wave. *J. Fluid Mech.*, 264:373–374, 1994.

Figures: Résolution numérique

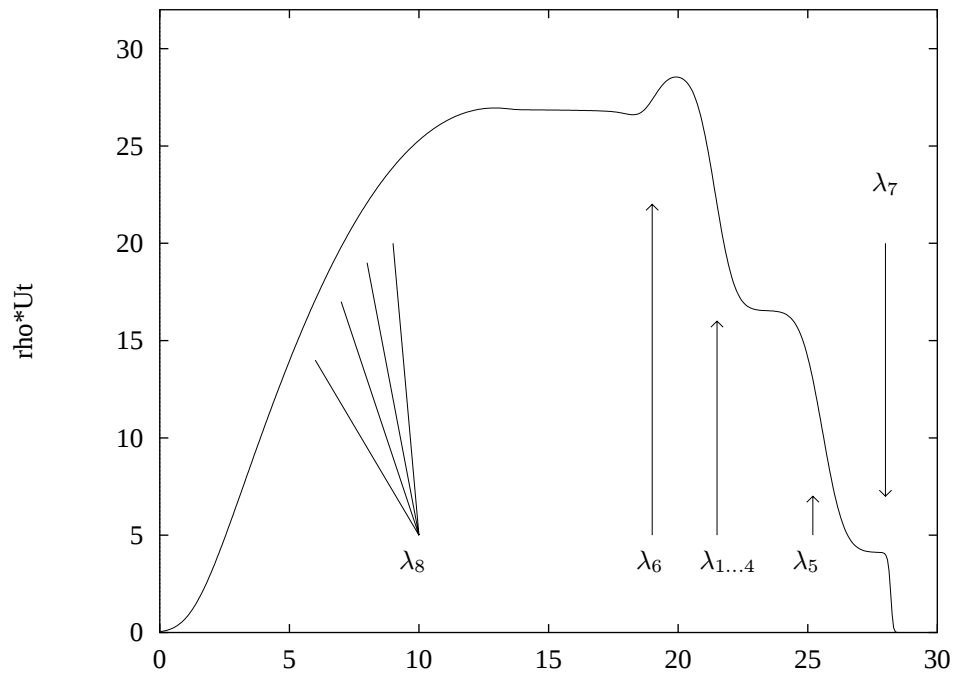


Fig. 2.14: Cas 1; ρu_t ; position des 5 ondes distinctes λ_k ; calcul FDS couplé

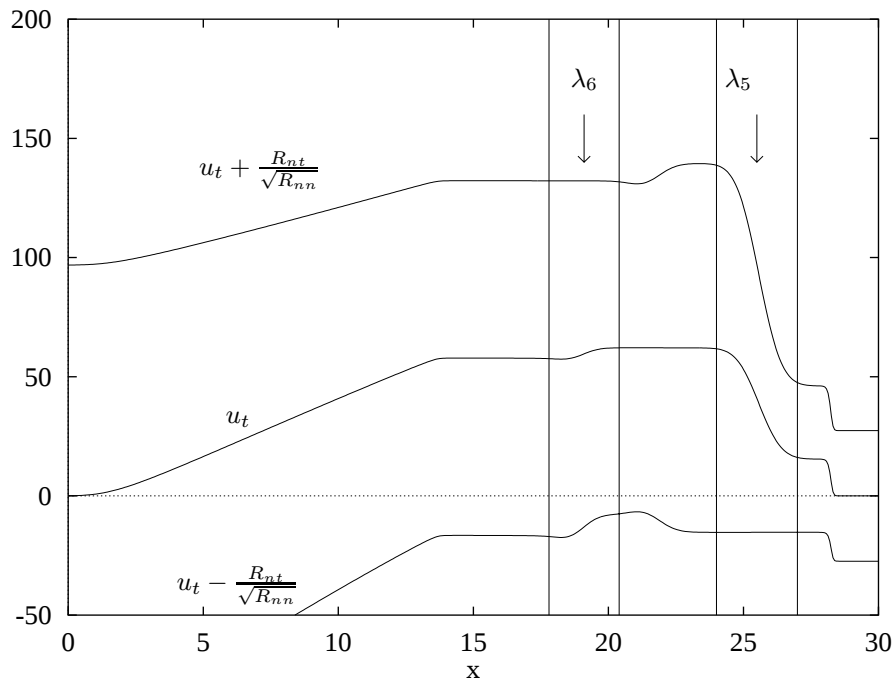


Fig. 2.15: Cas 1; identification des ondes associées à λ_5 et λ_6 ; calcul FDS couplé

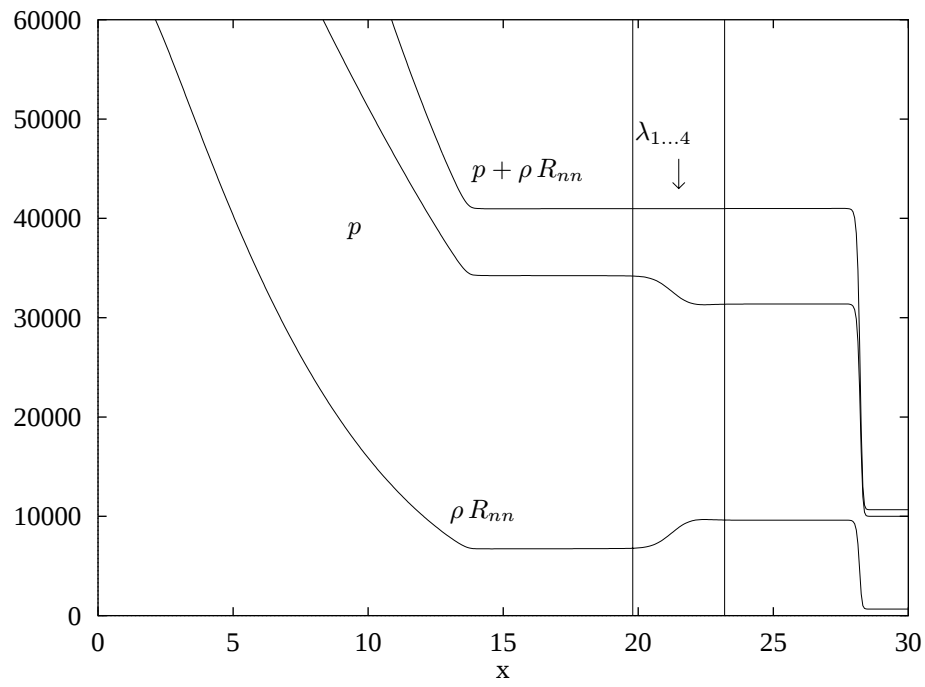


Fig. 2.16: Cas 1; identification des ondes associées à $\lambda_{1...4}$; calcul FDS couplé

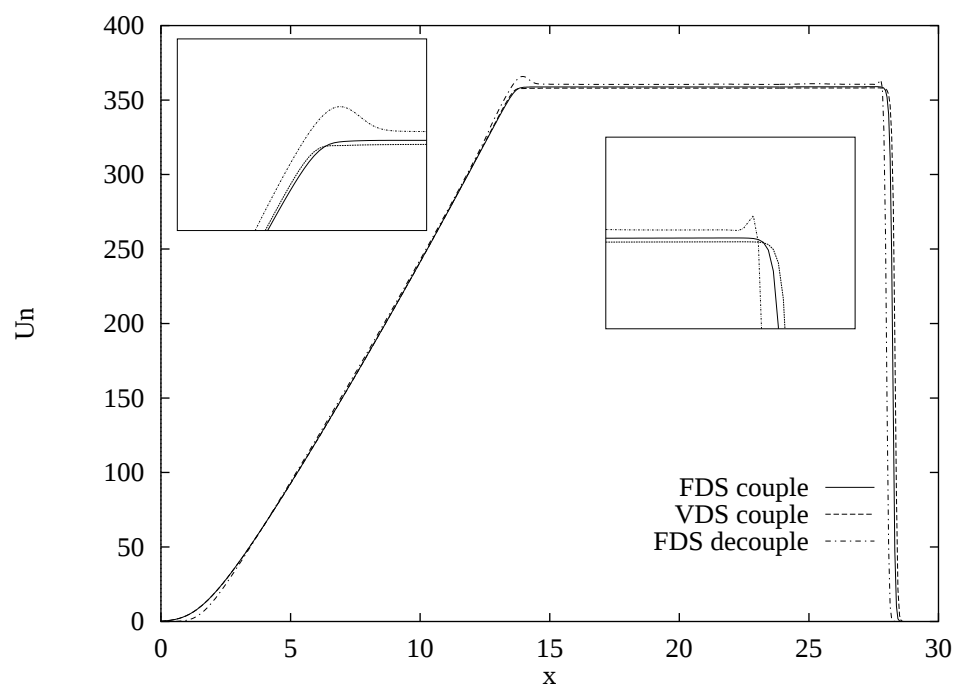


Fig. 2.17: Cas 1; vitesse axiale u_n (agrandissements des raccords); $N = 500$; $\mathcal{O}(\Delta x)$

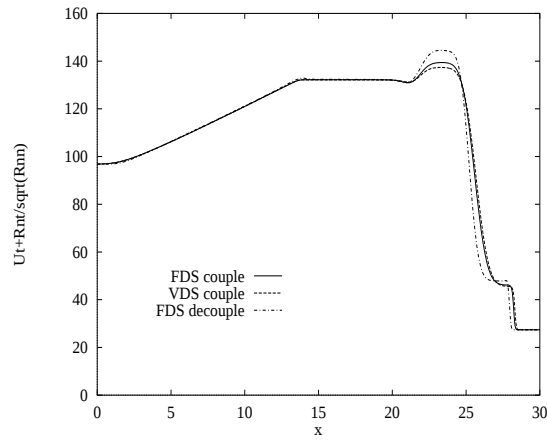


Fig. 2.18: Cas 1; invariant $u_t + \frac{R_{nt}}{\sqrt{R_{nn}}}$

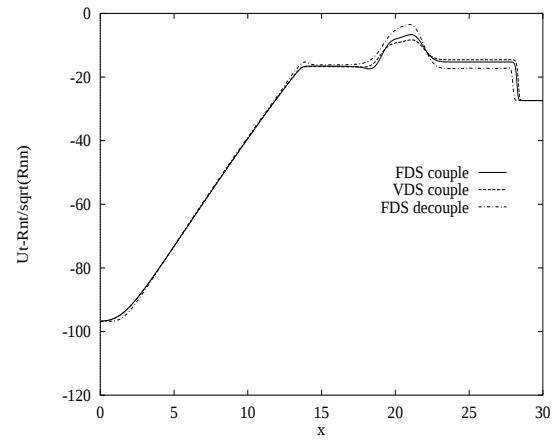


Fig. 2.19: Cas 1; invariant $u_t - \frac{R_{nt}}{\sqrt{R_{nn}}}$

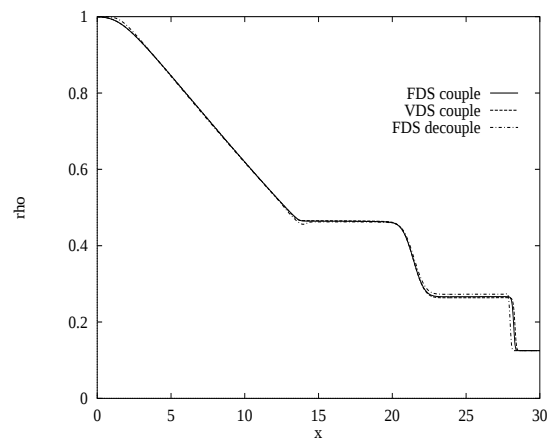


Fig. 2.20: Cas 1; masse volumique

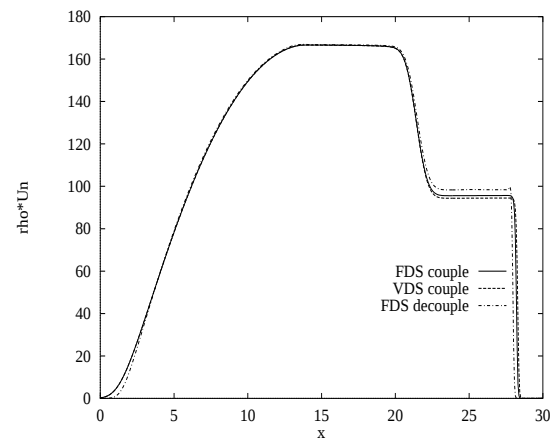


Fig. 2.21: Cas 1; quantité de mouvement

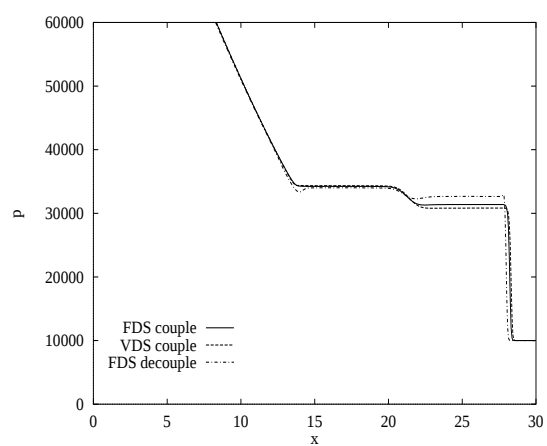
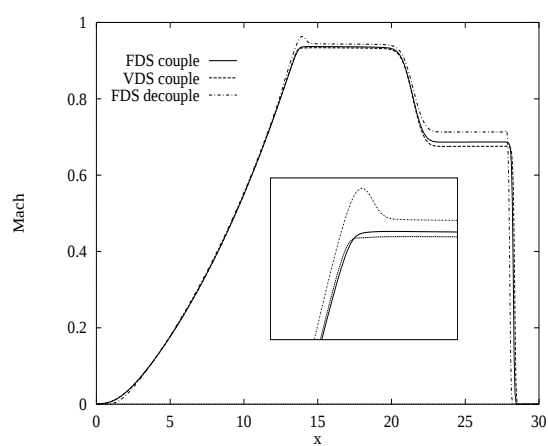
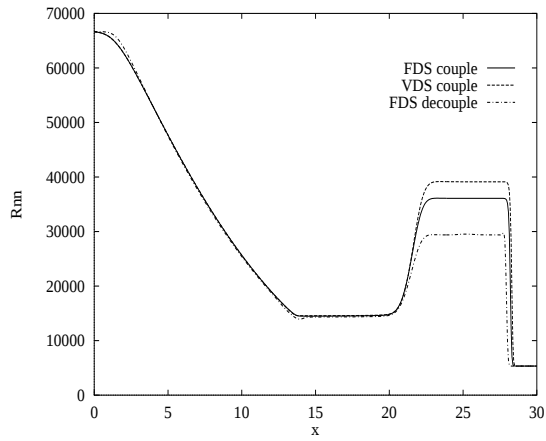
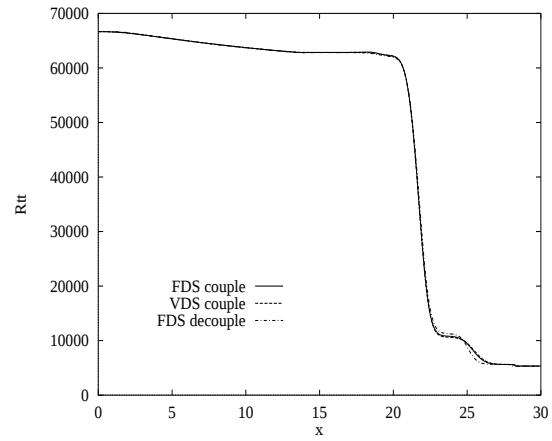
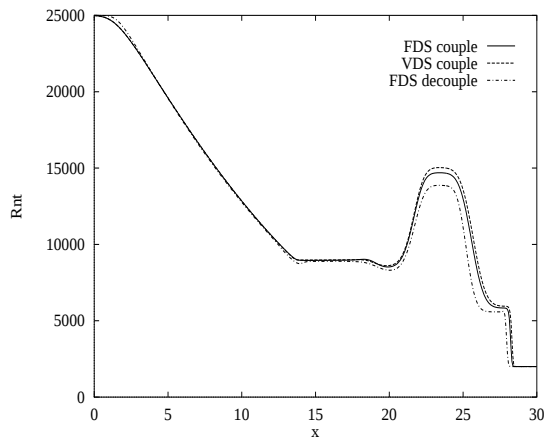
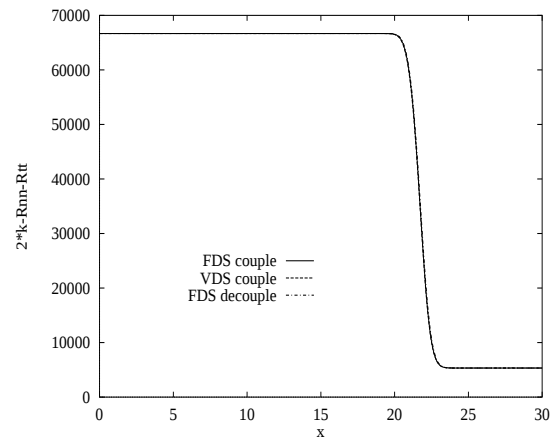


Fig. 2.22: Cas 1; pression statique

Fig. 2.23: Cas 1; nombre de Mach M_2

Fig. 2.24: Cas 1; corrélation axiale R_{nn} Fig. 2.25: Cas 1; corrélation transversale R_{tt} Fig. 2.26: Cas 1; corrélation tangentielle R_{nt} Fig. 2.27: Cas 1; troisième diagonale R_{ss}

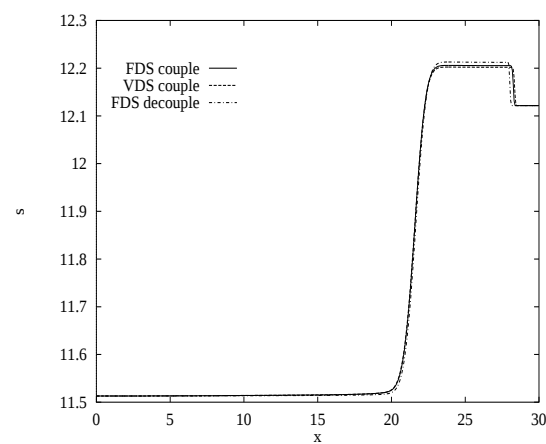


Fig. 2.28: Cas 1; entropie s

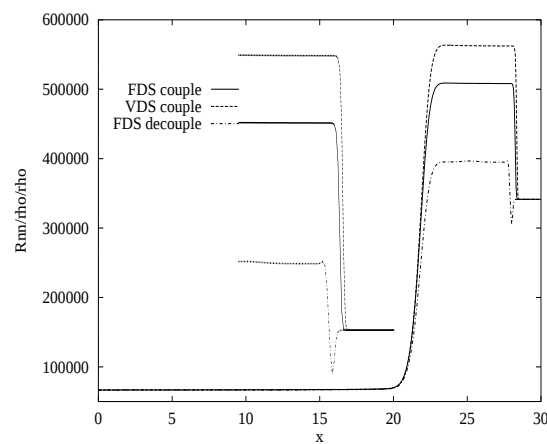
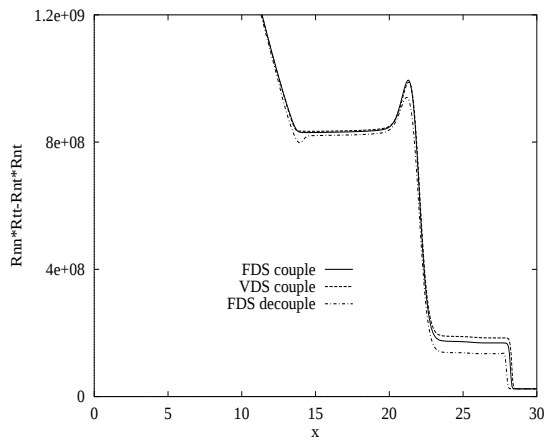
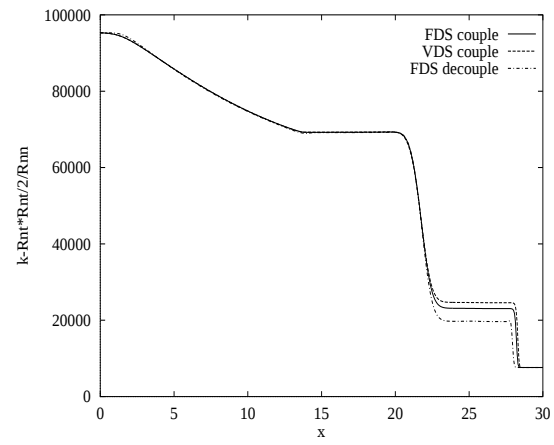
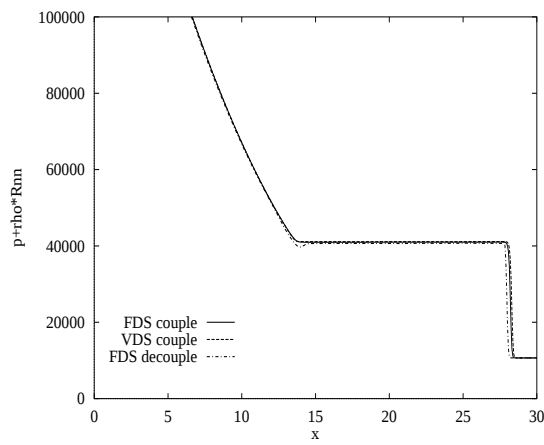
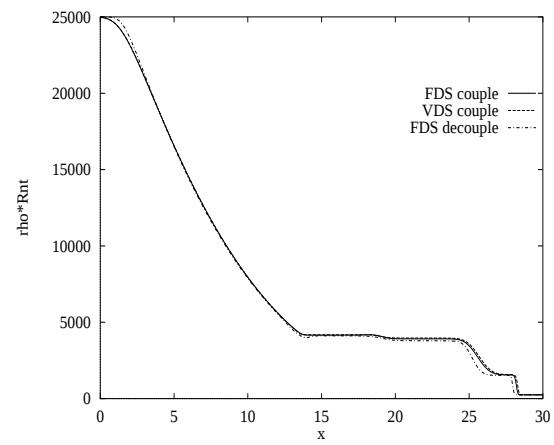


Fig. 2.29: Cas 1; invariant R_{nn}/ρ^2

Fig. 2.30: Cas 1; déterminant δ_2^3 Fig. 2.31: Cas 1; invariant $k - R_{nt}^2/(2 R_{nn})$ Fig. 2.32: Cas 1; pression modifiée $p + \rho R_{nn}$ Fig. 2.33: Cas 1; invariant ρR_{nt}

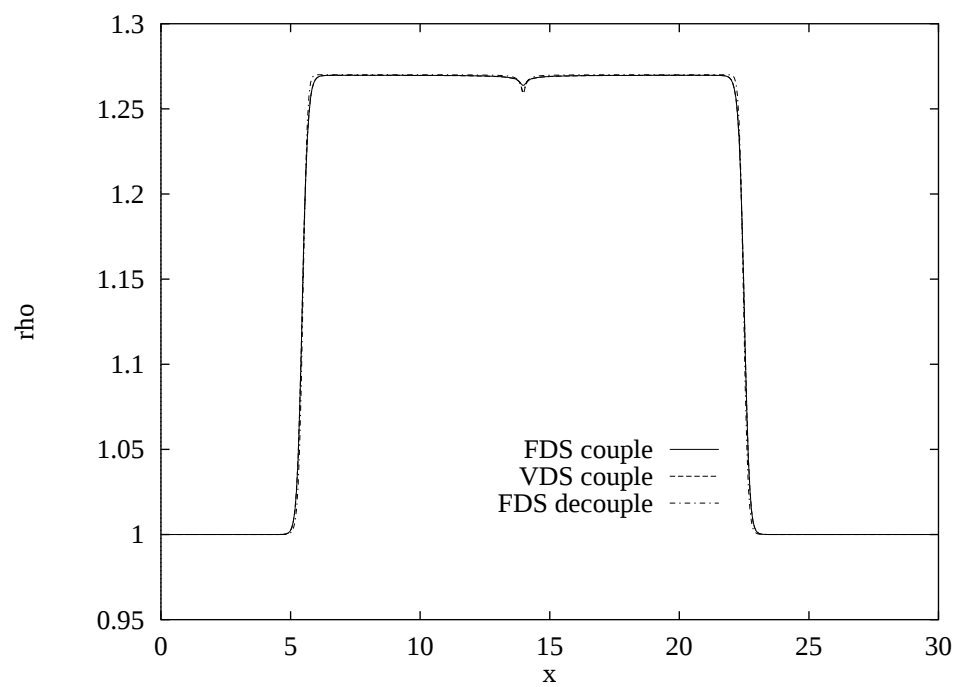


Fig. 2.34: Cas 2; masse volumique ρ ; $N = 500$; calcul $\mathcal{O}(\Delta x)$

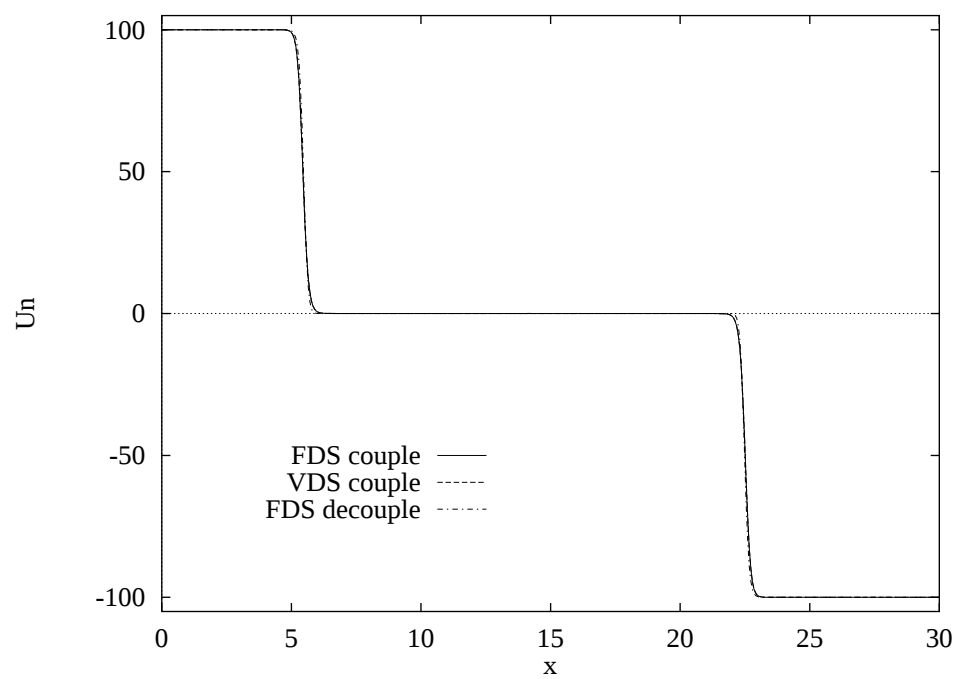


Fig. 2.35: Cas 2; vitesse axiale u_n ; $N = 500$; calcul $\mathcal{O}(\Delta x)$

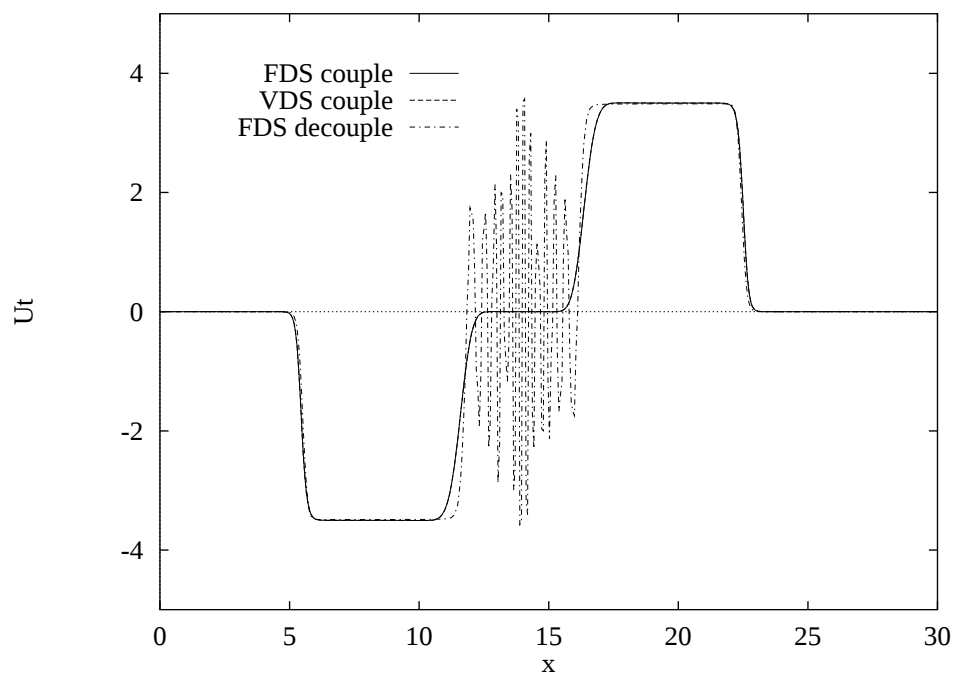


Fig. 2.36: Cas 2; vitesse transversale u_t ; $N = 500$; calcul $\mathcal{O}(\Delta x)$

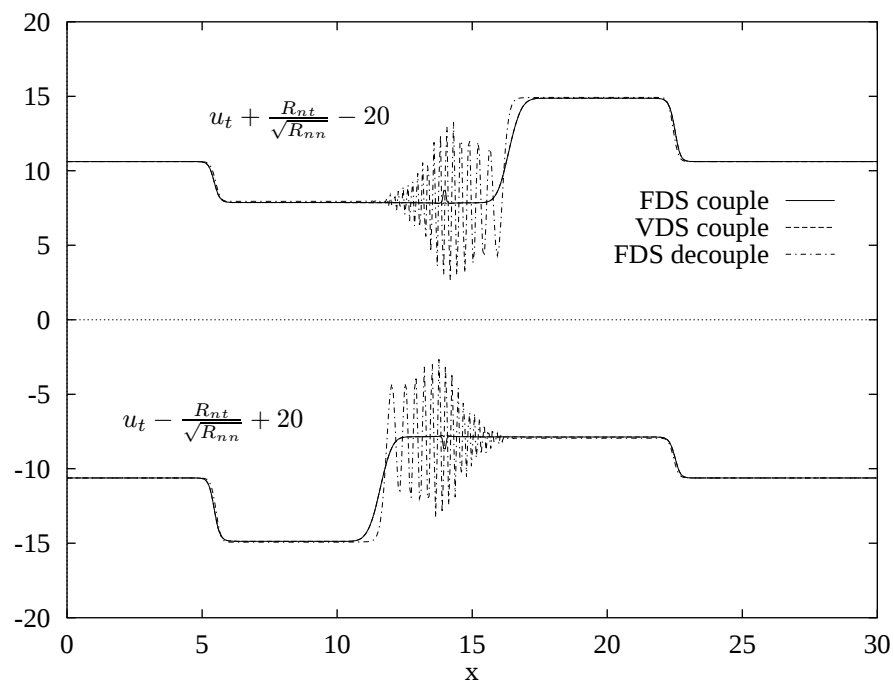


Fig. 2.37: Cas 2; invariants $u_t \pm \frac{R_{nt}}{\sqrt{R_{nn}}}$; $N = 500$; calcul $\mathcal{O}(\Delta x)$

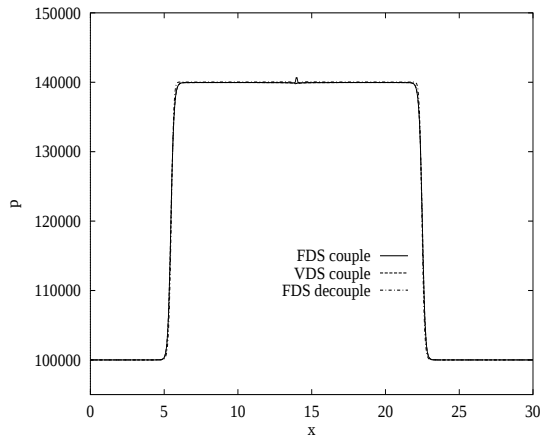
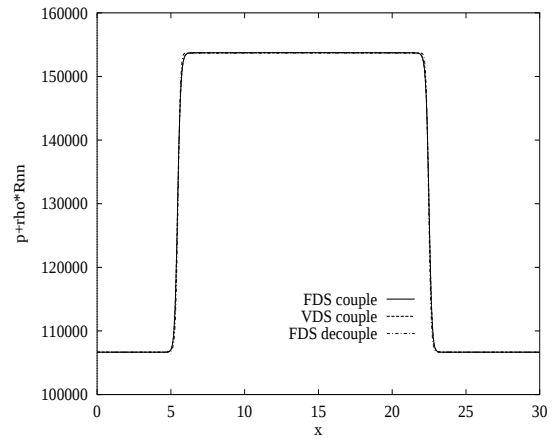
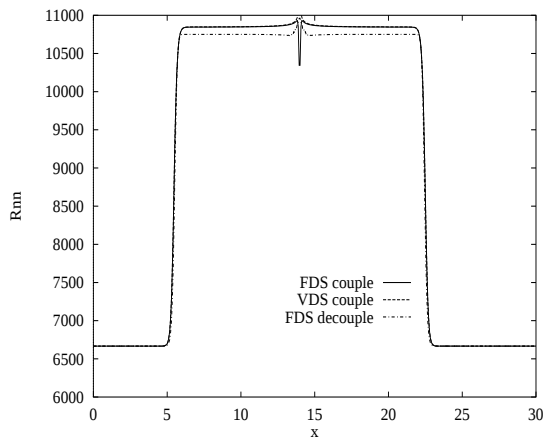
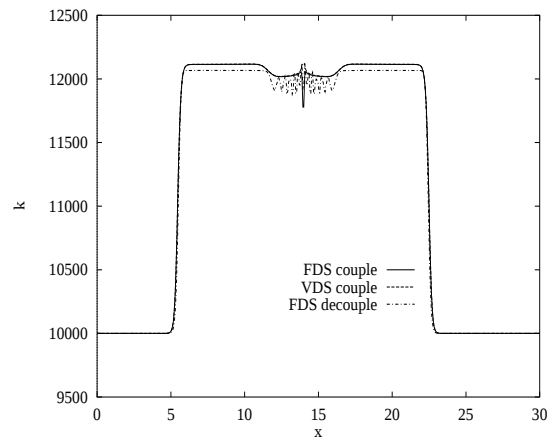
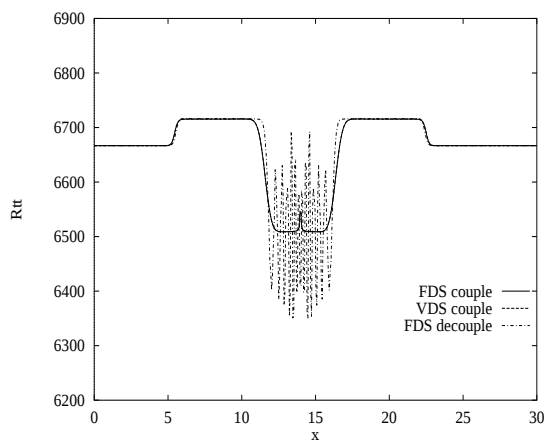
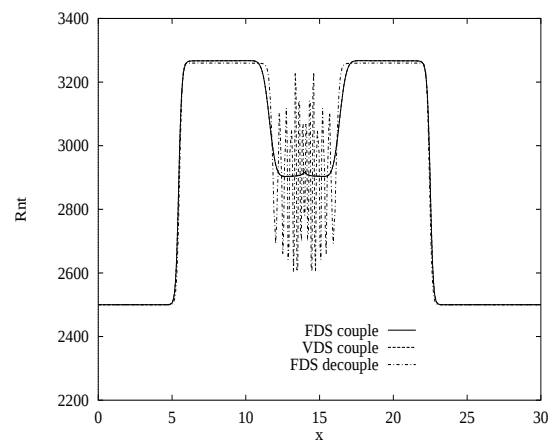
Fig. 2.38: Cas 2; pression statique p 

Fig. 2.39: Cas 2; pression modifiée

Fig. 2.40: Cas 2; corrélation R_{nn} Fig. 2.41: Cas 2; énergie cinétique k

Fig. 2.42: Cas 2; corrélation R_{tt} Fig. 2.43: Cas 2; corrélation R_{nt}

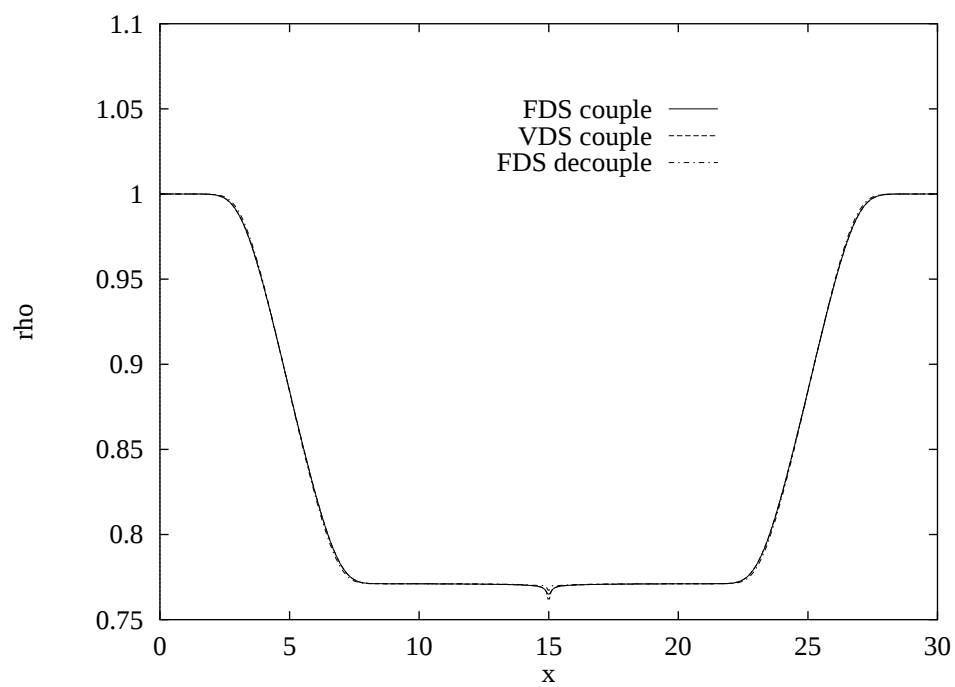


Fig. 2.44: Cas 3; masse volumique ρ ; $N = 500$; calcul $\mathcal{O}(\Delta x)$

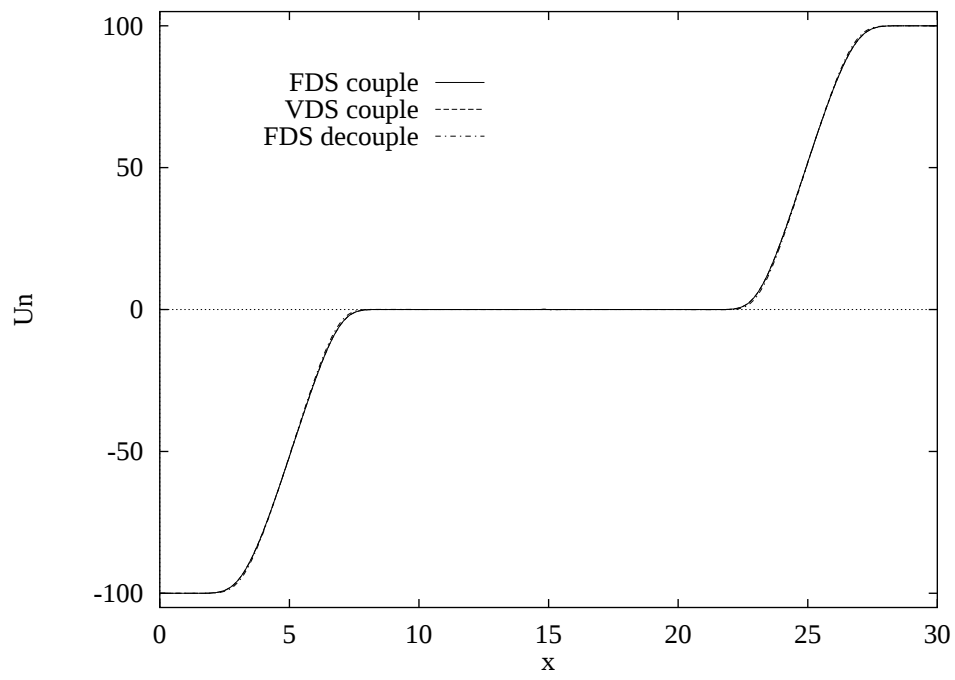


Fig. 2.45: Cas 3; vitesse axiale u_n ; $N = 500$; calcul $\mathcal{O}(\Delta x)$

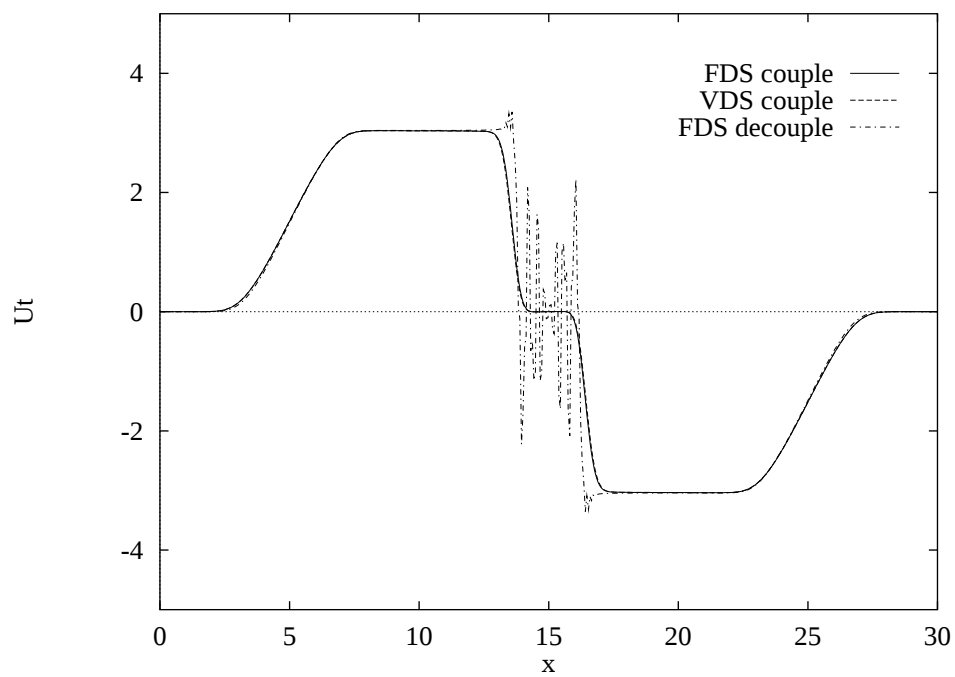


Fig. 2.46: Cas 3; vitesse transversale u_t ; $N = 500$; calcul $\mathcal{O}(\Delta x)$

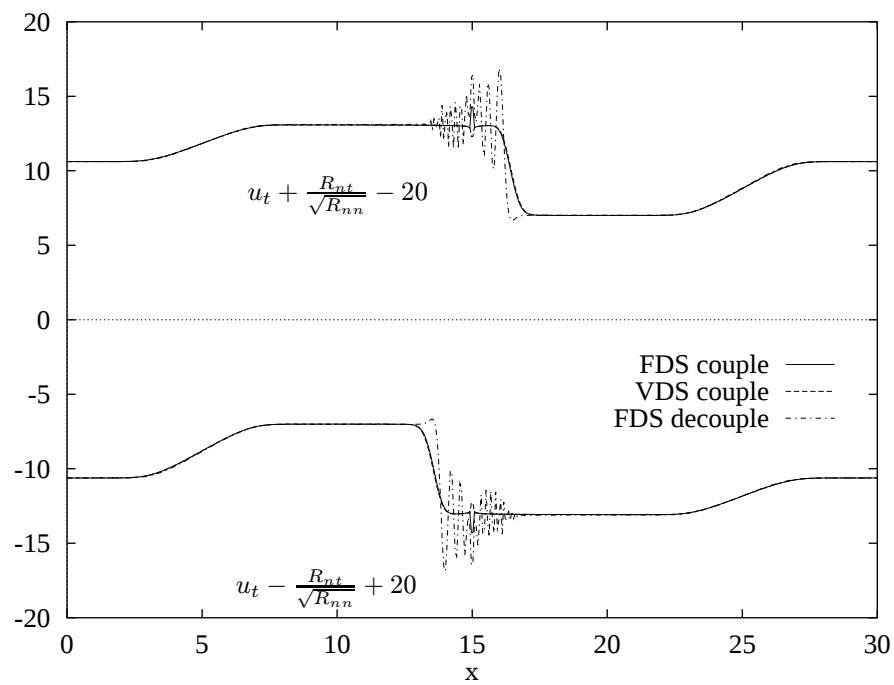


Fig. 2.47: Cas 3; invariants $u_t \pm \frac{R_{nt}}{\sqrt{R_{nn}}}$; $N = 500$; calcul $\mathcal{O}(\Delta x)$

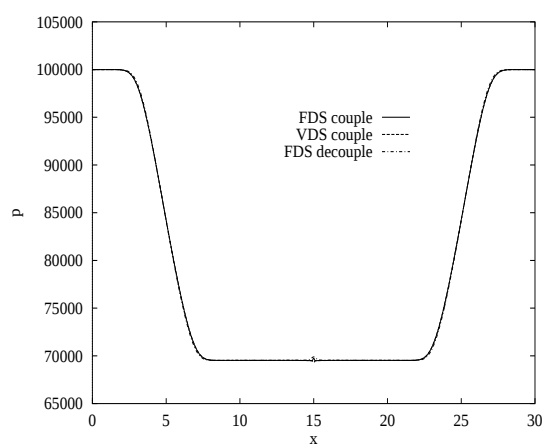
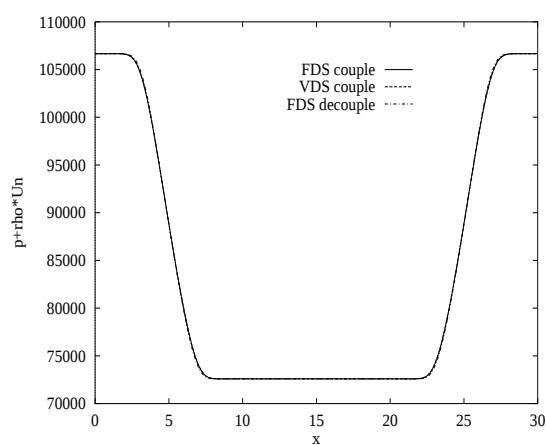
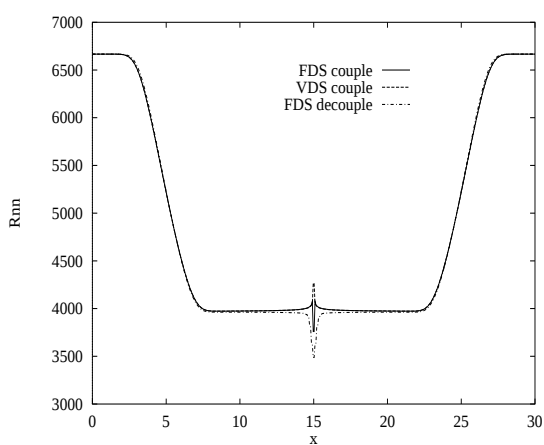
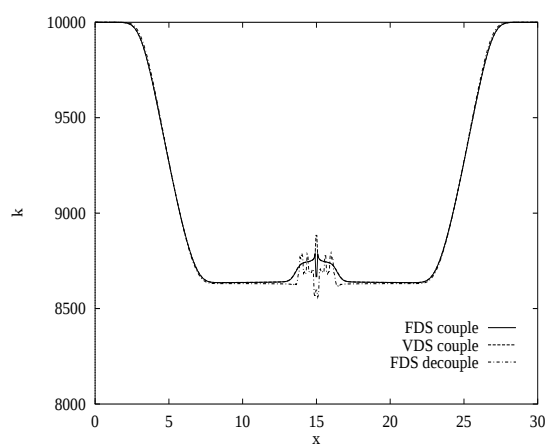
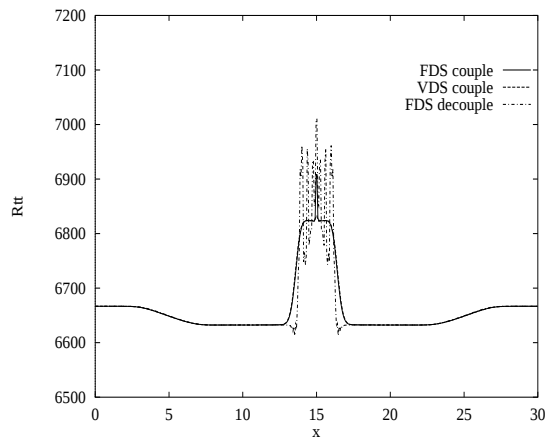
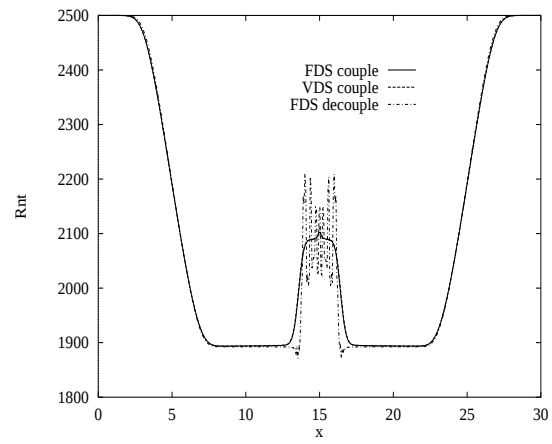
Fig. 2.48: Cas 3; pression statique p 

Fig. 2.49: Cas 3; pression modifiée

Fig. 2.50: Cas 3; corrélation R_{nn} Fig. 2.51: Cas 3; énergie cinétique k

Fig. 2.52: Cas 3; corrélation R_{tt} Fig. 2.53: Cas 3; corrélation R_{nt}

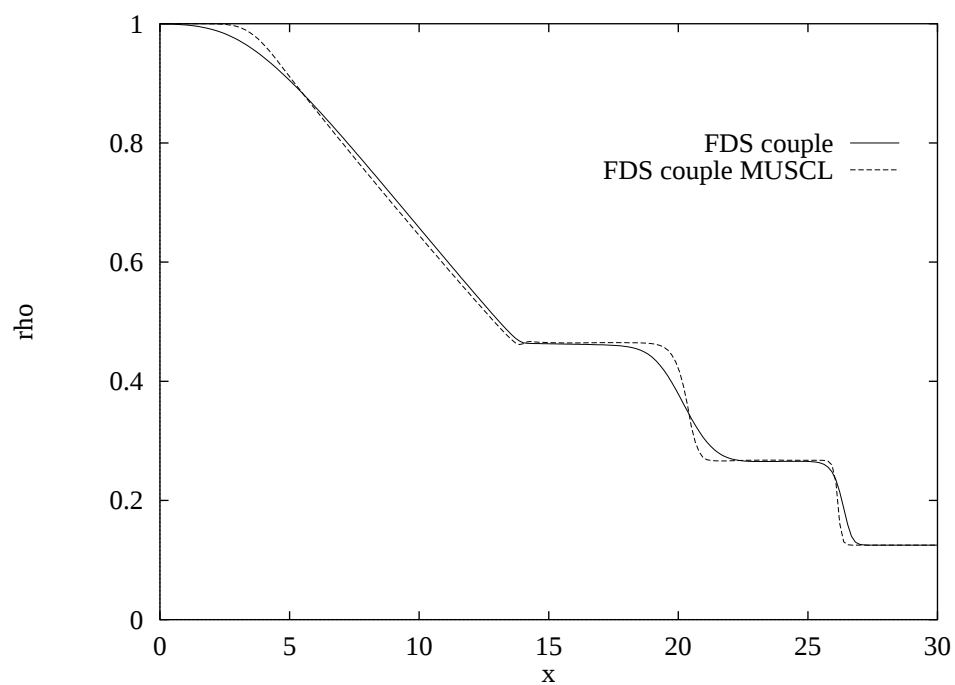


Fig. 2.54: Cas 1; masse volumique ; $N = 200$; calcul FDS couplé; comparaison du schéma de premier ordre avec l'interpolation MUSCL

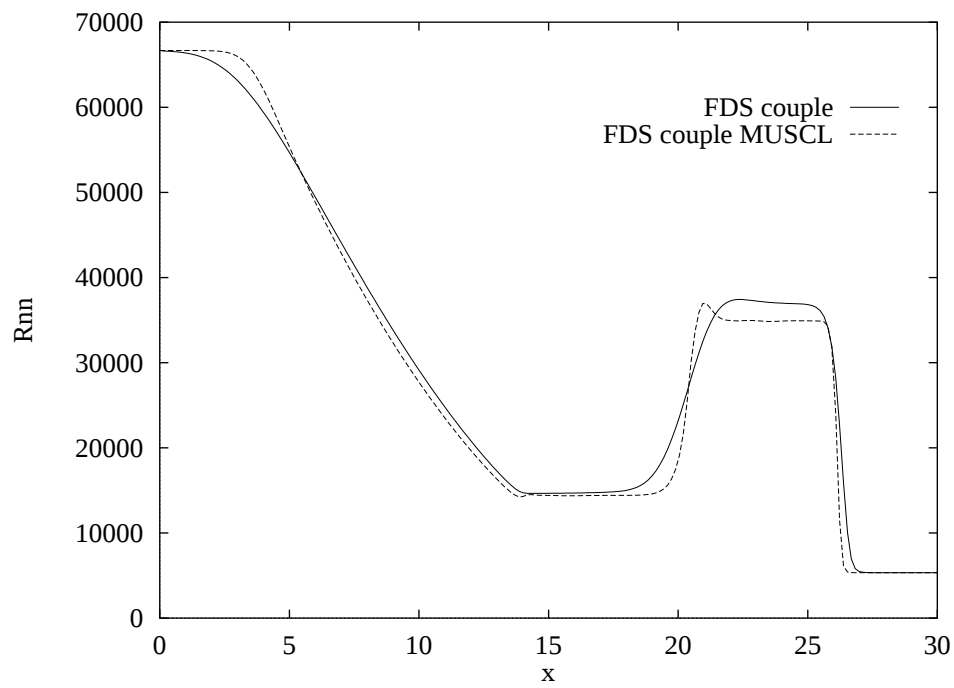


Fig. 2.55: Cas 1; corrélation axiale R_{nn} ; $N = 200$; calcul FDS couplé; comparaison du schéma de premier ordre avec l'interpolation MUSCL

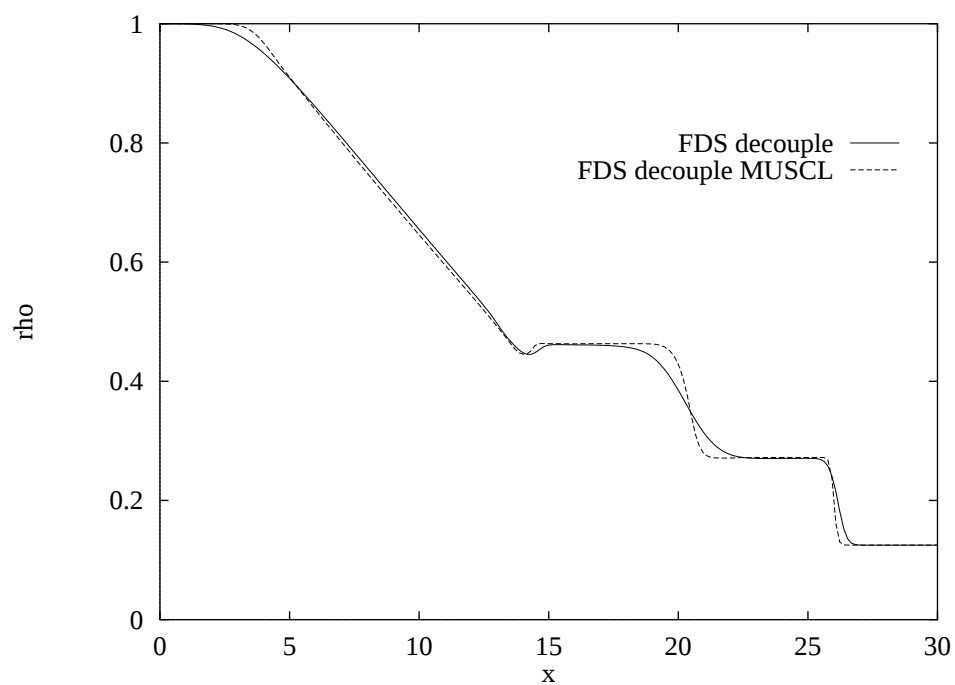


Fig. 2.56: Cas 1; masse volumique ; $N = 200$; calcul FDS découplé; comparaison du schéma de premier ordre avec l'interpolation MUSCL

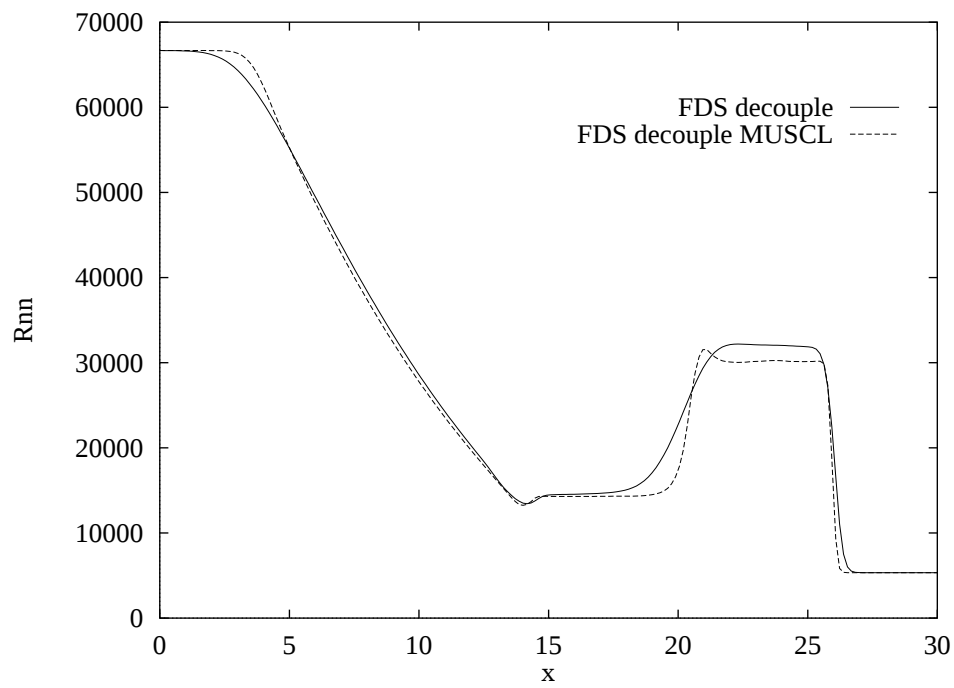


Fig. 2.57: Cas 1; corrélation axiale R_{nn} ; $N = 200$; calcul FDS découplé; comparaison du schéma de premier ordre avec l'interpolation MUSCL

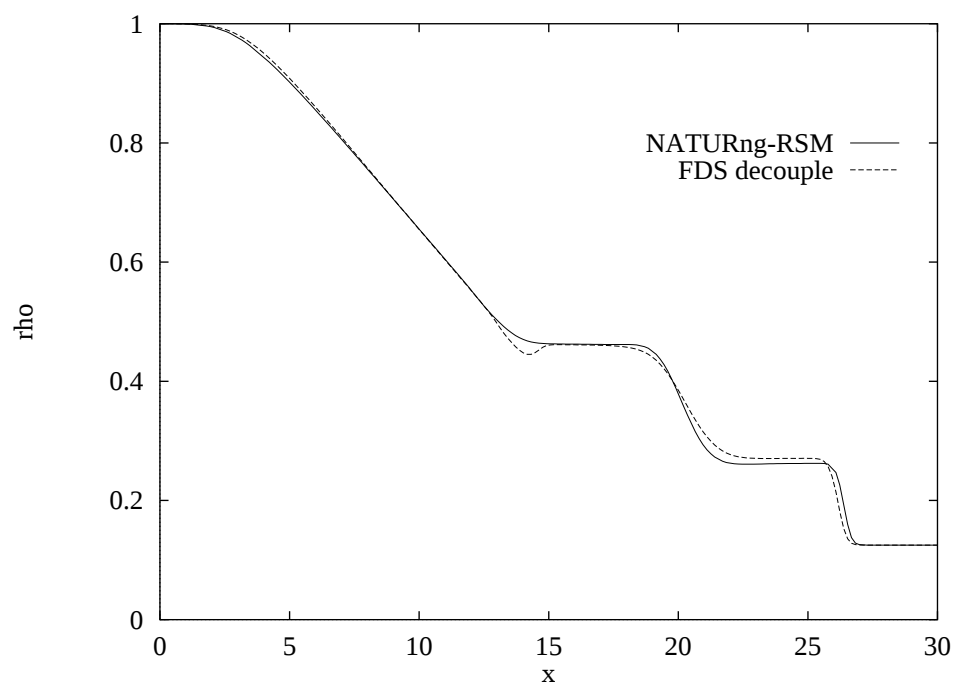


Fig. 2.58: Cas 1; masse volumique; $N = 200$; schéma FDS couplé, $\mathcal{O}(\Delta x)$; comparaison du calcul bidimensionnel avec NATURng-RSM et le calcul monodimensionnel

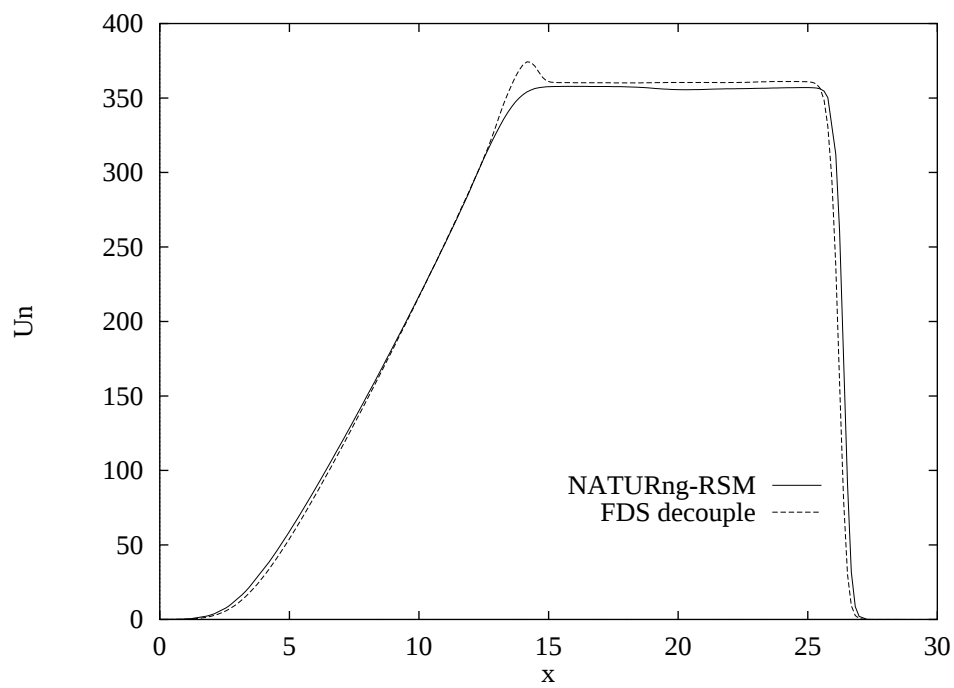


Fig. 2.59: Cas 1; vitesse axiale u_n ; $N = 200$; schéma FDS couplé, $\mathcal{O}(\Delta x)$; comparaison du calcul bidimensionnel avec NATURng-RSM et le calcul monodimensionnel

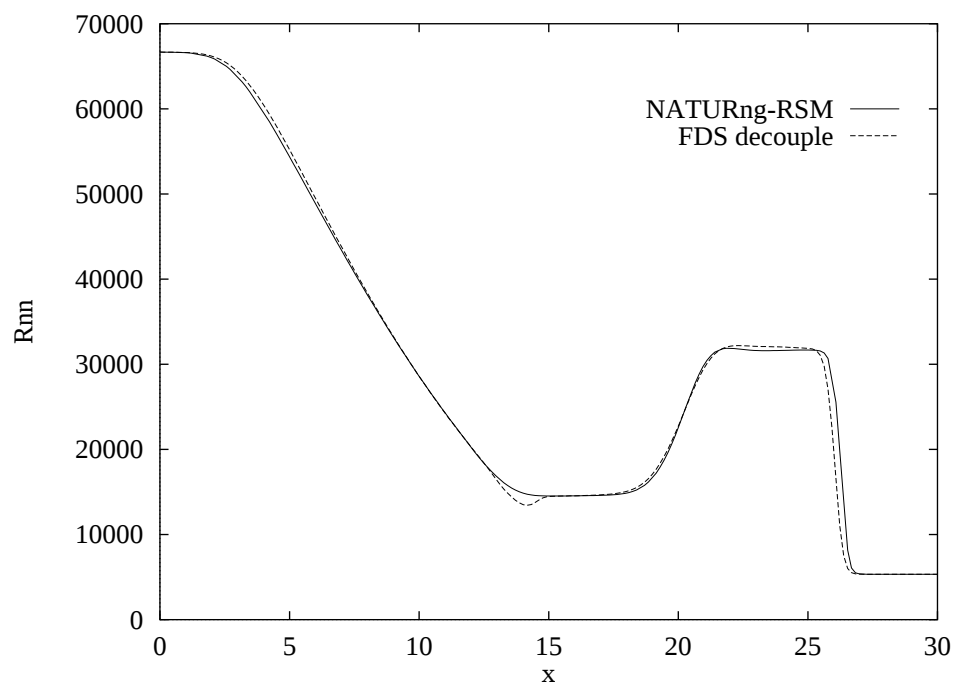


Fig. 2.60: Cas 1; corrélation axiale R_{nn} ; $N = 200$; schéma FDS couplé, $\mathcal{O}(\Delta x)$; comparaison du calcul bidimensionnel avec NATURng-RSM et le calcul monodimensionnel

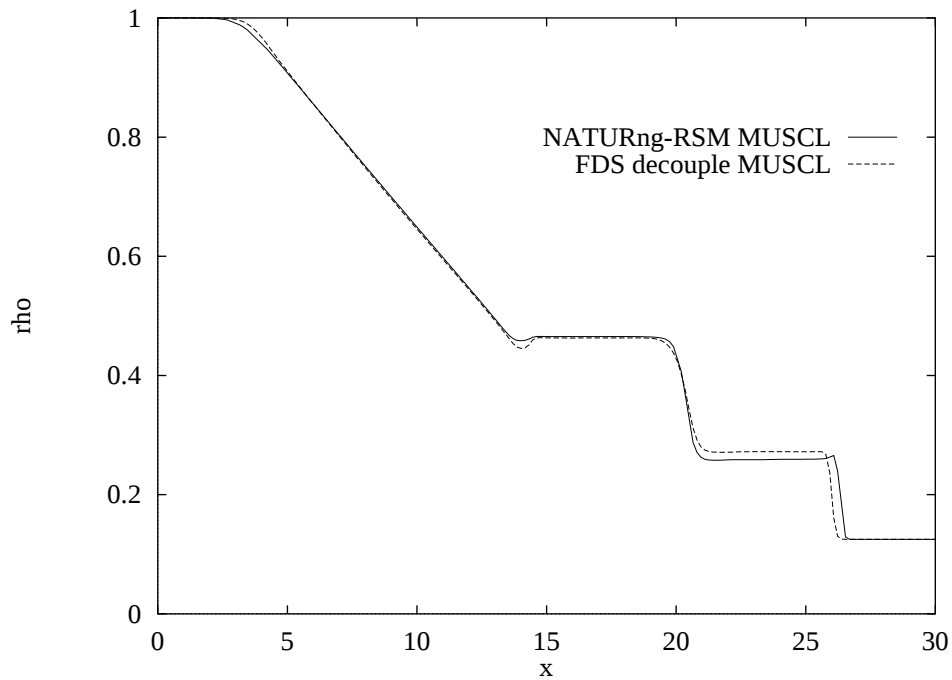


Fig. 2.61: Cas 1; masse volumique; $N = 200$; schéma FDS couplé, MUSCL; comparaison du calcul bidimensionnel avec NATURng-RSM et le calcul monodimensionnel

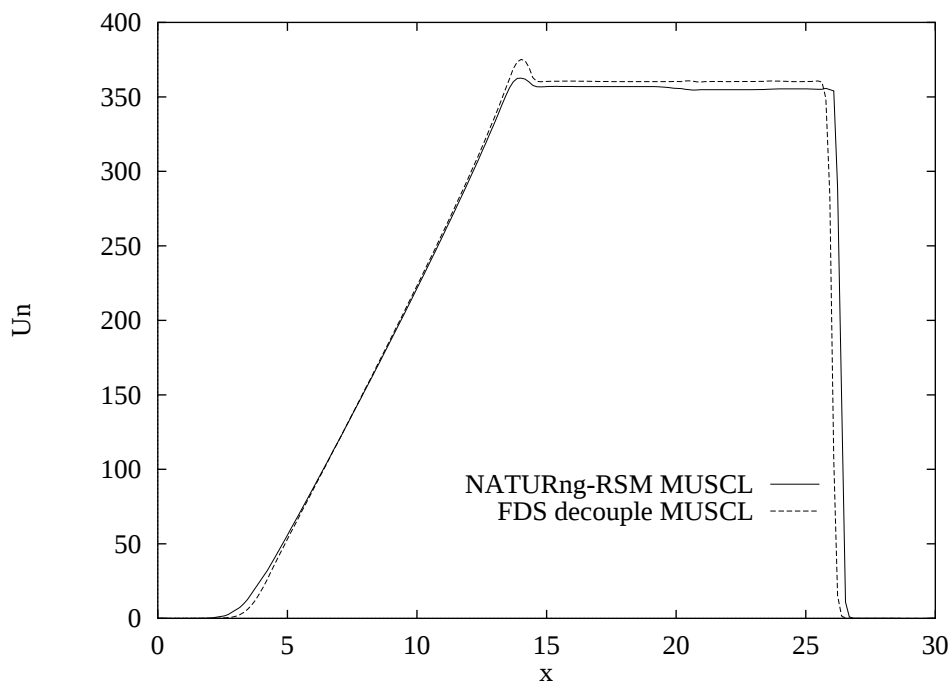


Fig. 2.62: Cas 1; vitesse axiale u_n ; $N = 200$; schéma FDS couplé, MUSCL; comparaison du calcul bidimensionnel avec NATURng-RSM et le calcul monodimensionnel

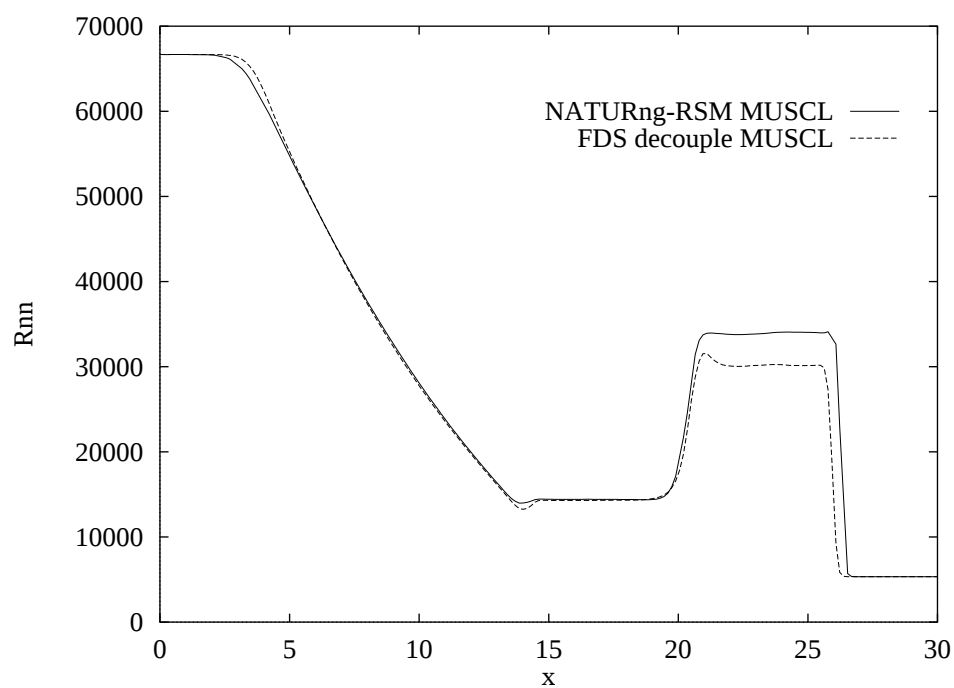


Fig. 2.63: Cas 1; corrélation axiale R_{nn} ; $N = 200$; schéma FDS couplé, MUSCL; comparaison du calcul bidimensionnel avec NATURng-RSM et le calcul monodimensionnel

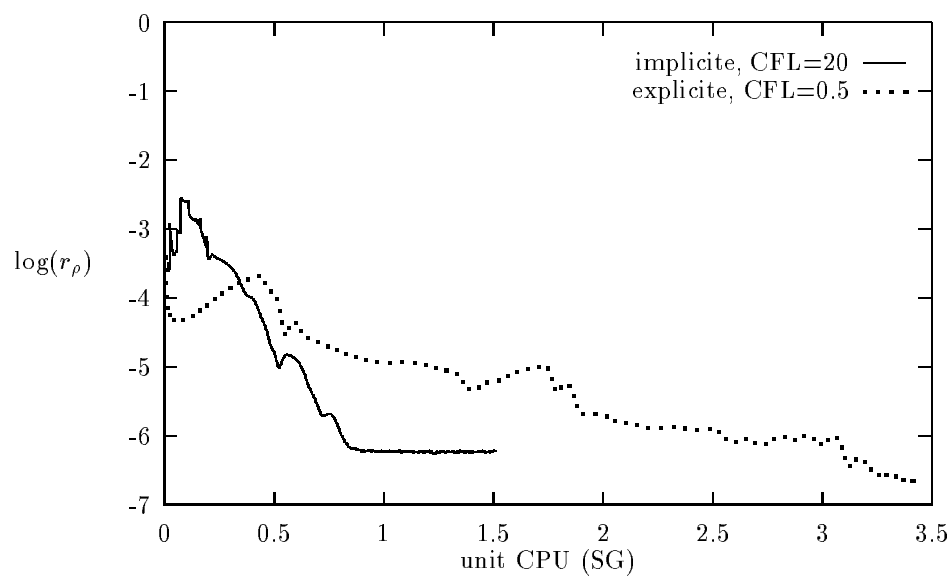


Fig. 2.64: Comparaison du résidu relatif de la masse volumique du calcul de la couche de mélange compressible; le temps CPU est mesuré en unités des machines Silicon Graphics

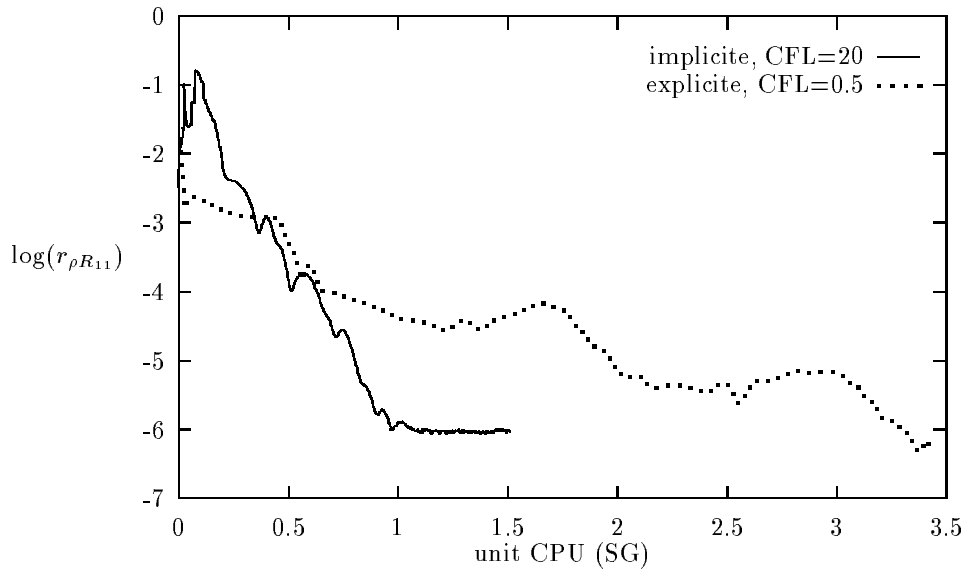


Fig. 2.65: Comparaison du résidu relatif de la la tension de Reynolds ρR_{11} du calcul de la couche de mélange compressible; le temps CPU est mesuré en unités des machines Silicon Graphics

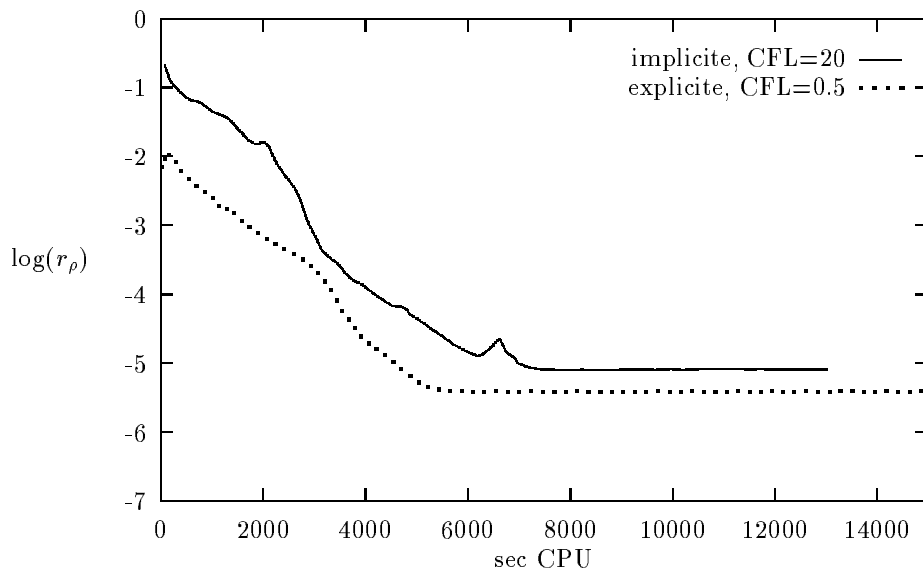


Fig. 2.66: Comparaison du résidu relatif de la masse volumique du calcul d'une réflexion d'une onde de choc sur une paroi glissante; le temps CPU est donné pour une machine DEC α 100 MHz

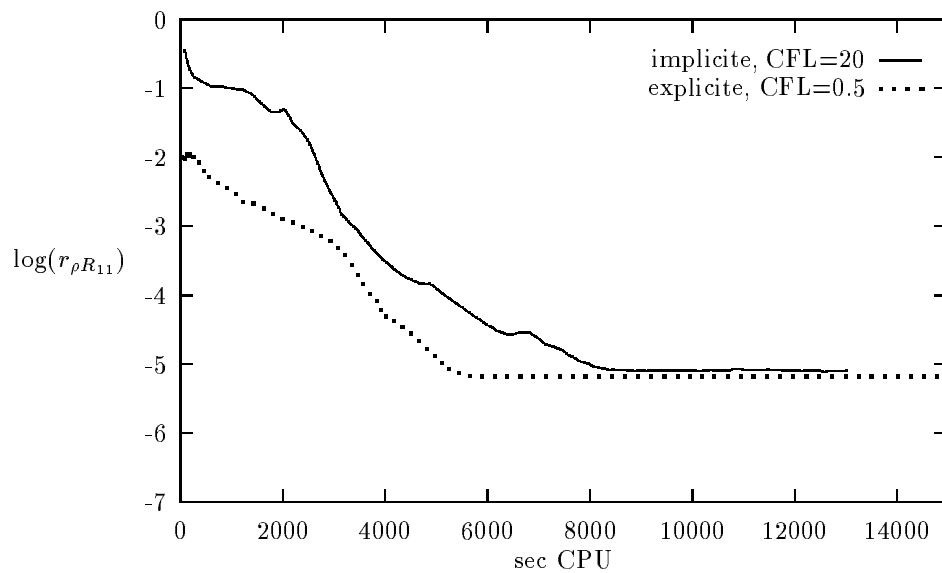


Fig. 2.67: Comparaison du résidu relatif de la tension de Reynolds ρR_{11} du calcul d'une réflexion d'une onde de choc sur une paroi glissante; le temps CPU est donné pour une machine DEC $\propto$ 100 MHz

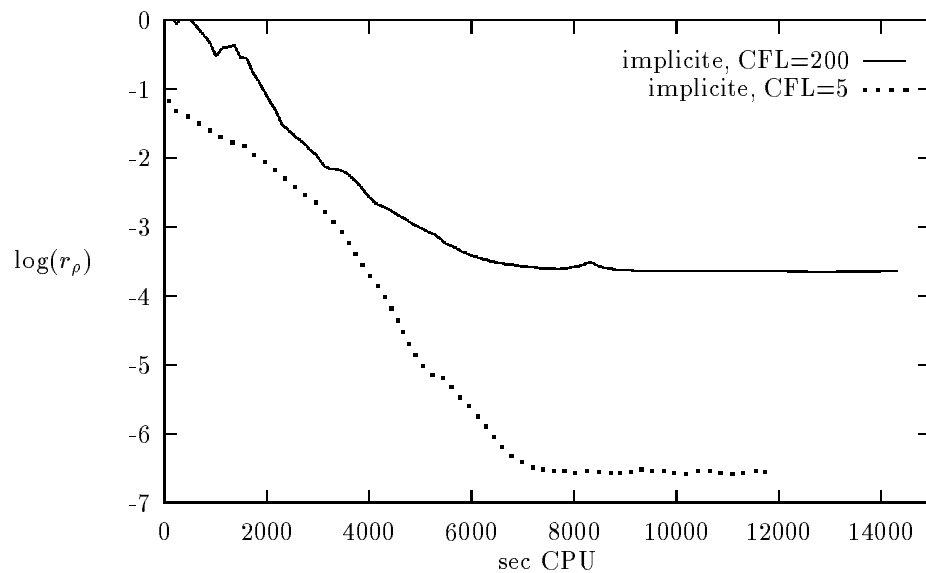


Fig. 2.68: Comparaison du résidu relatif de la masse volumique du calcul de la réflexion d'onde de choc en fonction du nombre de CFL utilisé; le temps CPU est donné pour une machine DEC $\propto$ 100 MHz

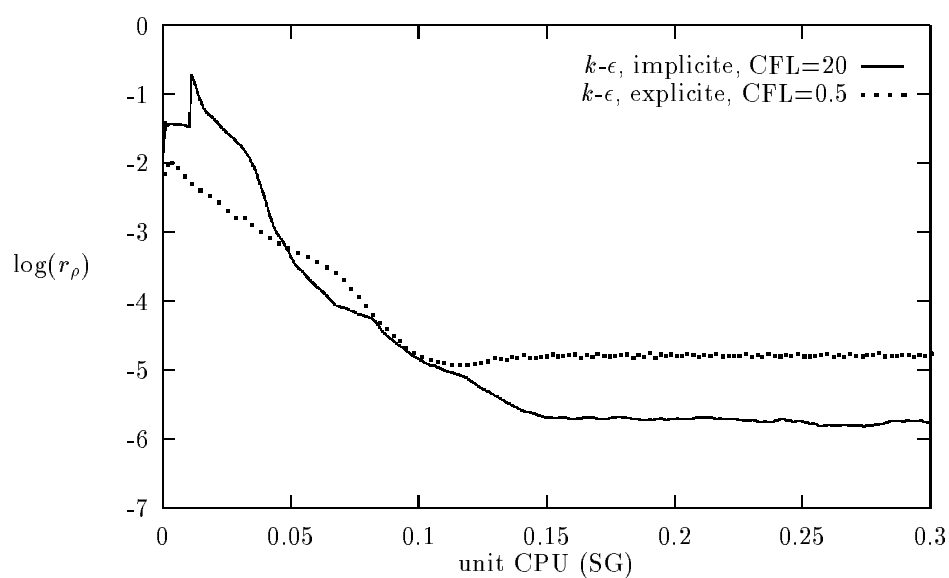


Fig. 2.69: Comparaison du résidu relatif de la masse volumique du calcul de la réflexion d'onde de choc pour la version $k-\epsilon$ du code; le temps CPU est mesuré en unités des machines Silicon Graphics

Figures: Etude des écoulements homogènes

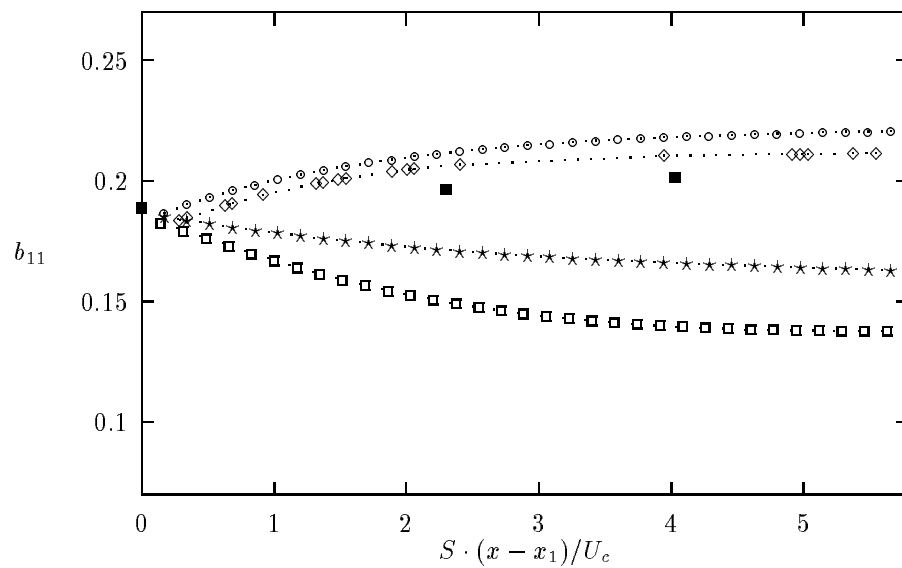


Fig. 3.2: L'évolution de la composante b_{11} de l'anisotropie de la tension de Reynolds dans un écoulement homogène cisailé. Légende des symboles: ■ expérience de Tavoularis et Corrsin [190]; ★ calcul avec le modèle LRR; ○ modèle SSG; ◇ modèle FLT; □ modèle SL90.

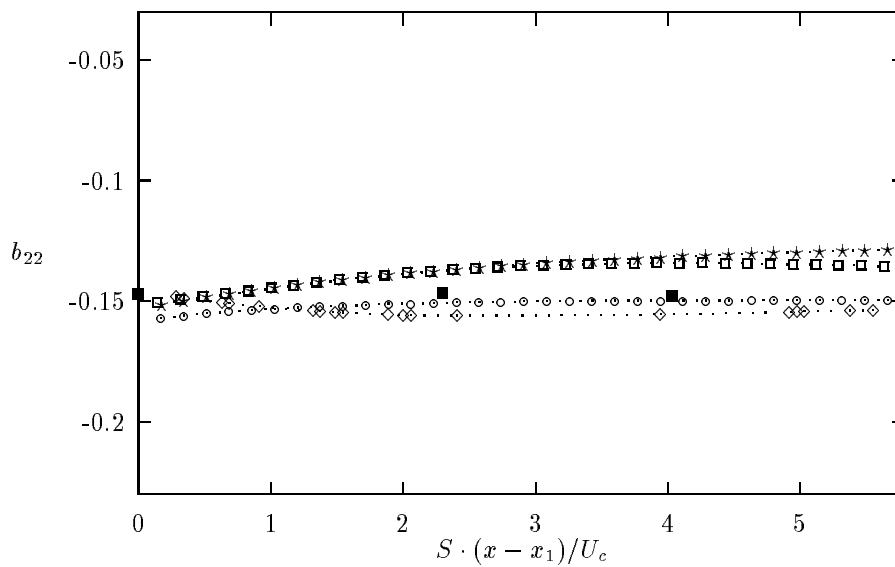


Fig. 3.3: L'évolution de la composante b_{22} de l'anisotropie de la tension de Reynolds dans un écoulement homogène cisailé. Voir la figure 3.2 pour une légende des symboles.

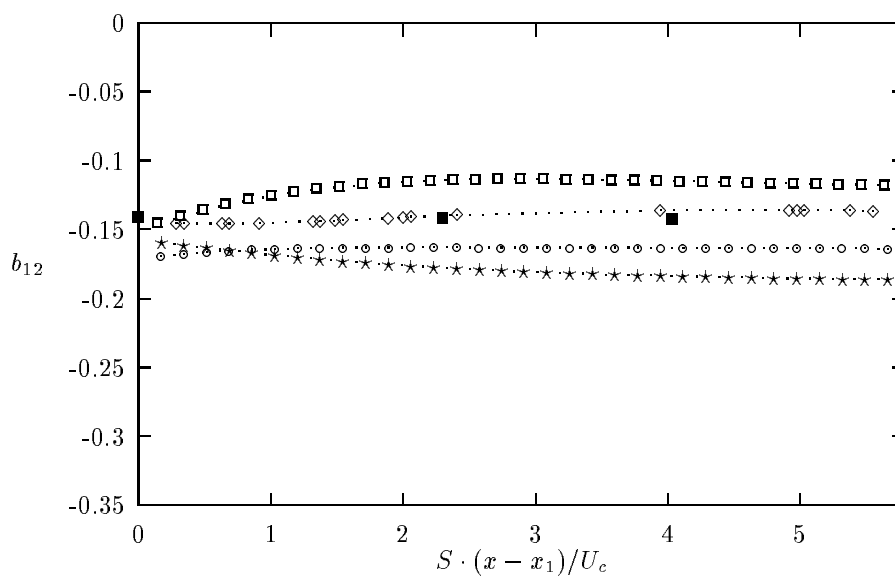


Fig. 3.4: L'évolution de la composante b_{12} de l'anisotropie de la tension de Reynolds dans un écoulement homogène cisailé. Voir la figure 3.2 pour une légende des symboles.

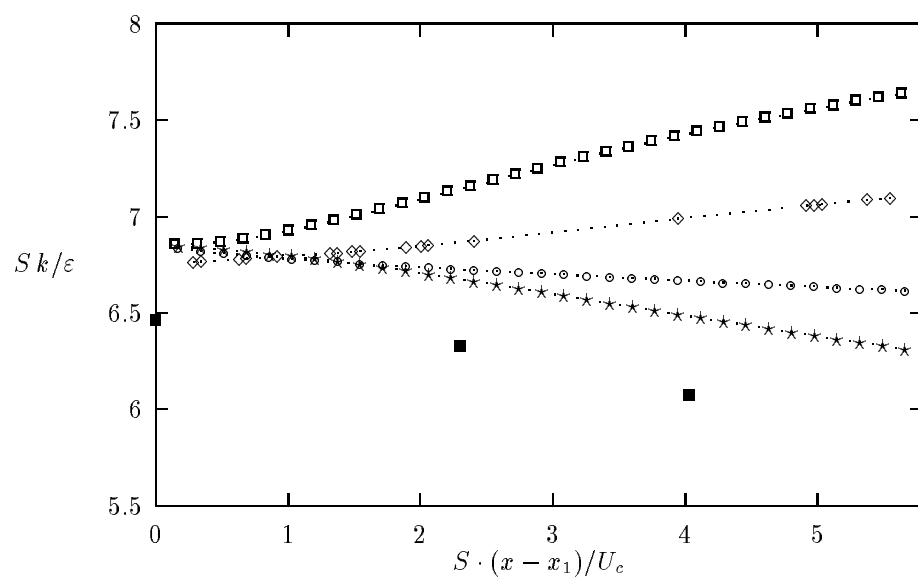


Fig. 3.5: L'évolution du rapport d'échelles Sk/ϵ dans un écoulement homogène cisailé. Voir la figure 3.2 pour une légende des symboles.

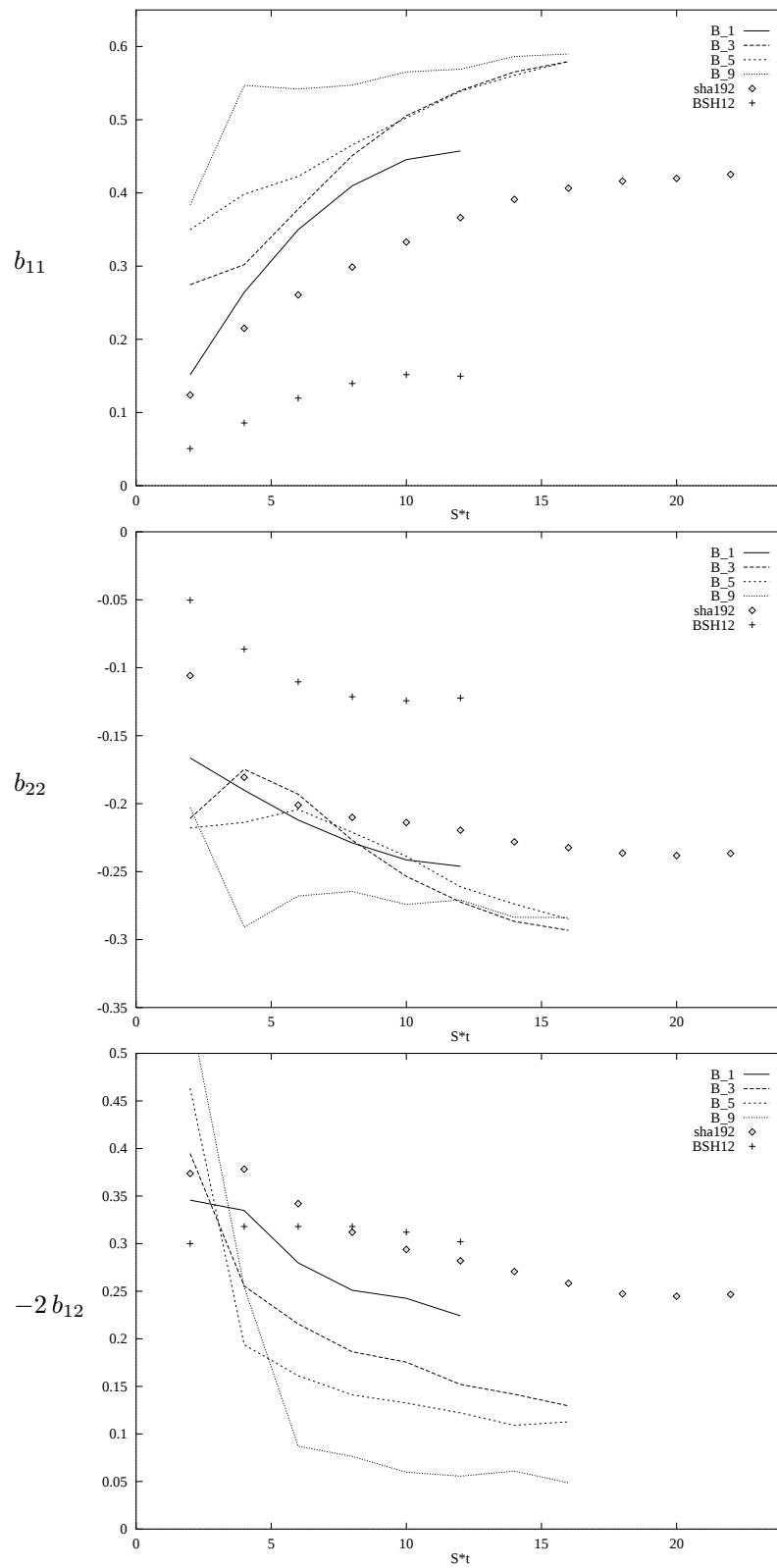


Fig. 3.6: L'évolution de l'anisotropie de la tension de Reynolds dans différents cas de DNS de cisaillement pur en compressible. La simulation BSH12 correspond à une situation incompressible.

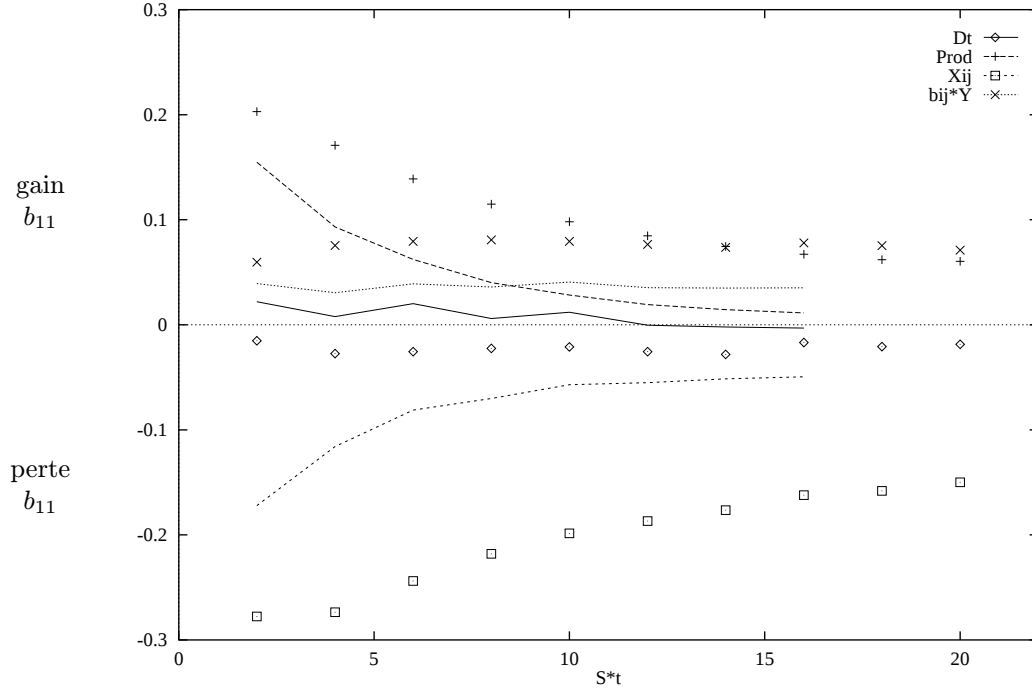


Fig. 3.7: Bilan de l'équation d'évolution de la composante diagonale b_{11} de l'anisotropie de la tension de Reynolds (3.18) pour les cas sha192 (symboles), B_3 (lignes).

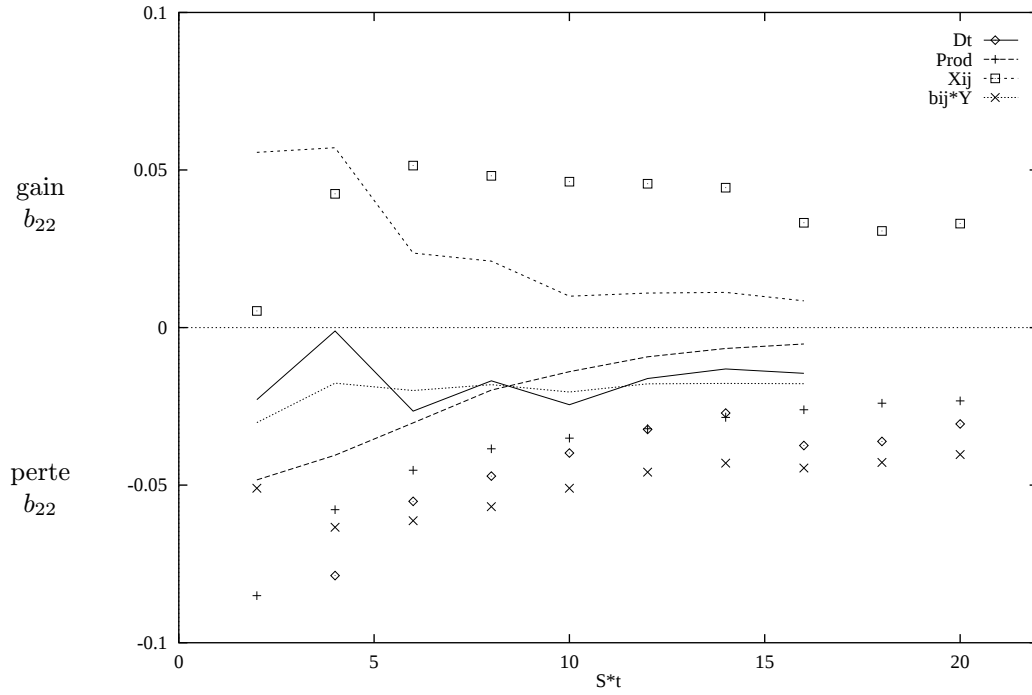


Fig. 3.8: Bilan de l'équation d'évolution de de la composante diagonale b_{22} l'anisotropie de la tension de Reynolds (3.18) pour les cas sha192 (symboles) et B_3 (lignes).

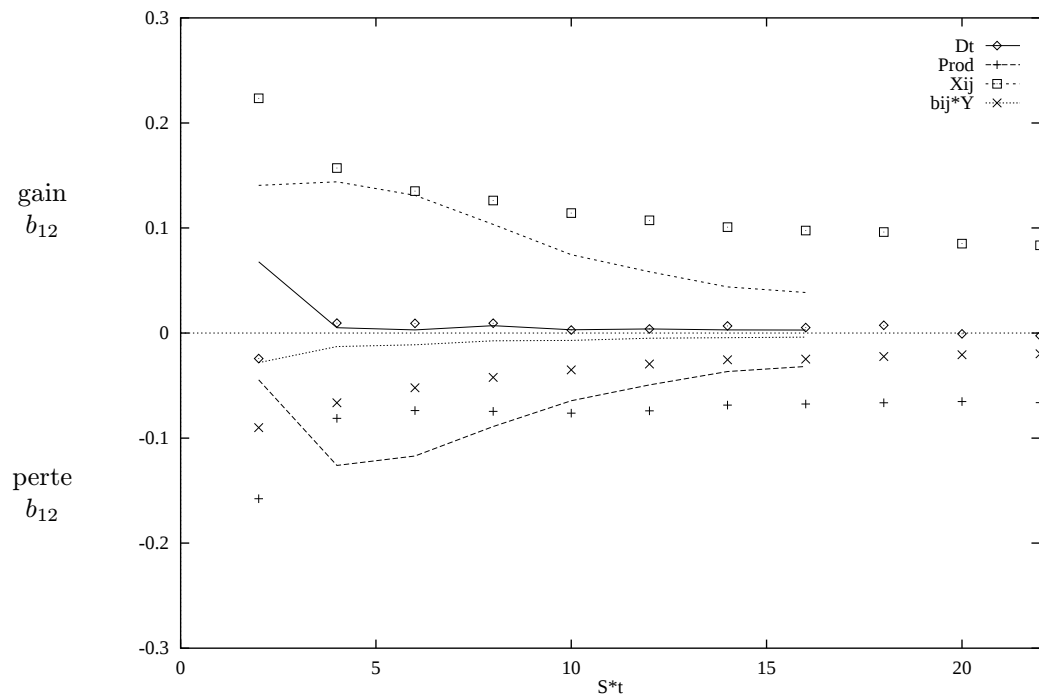


Fig. 3.9: Bilan de l'équation d'évolution de de la composante tangentielle b_{12} de la tension de Reynolds (3.18) pour les cas sha192 (symboles) et B_3 (lignes).

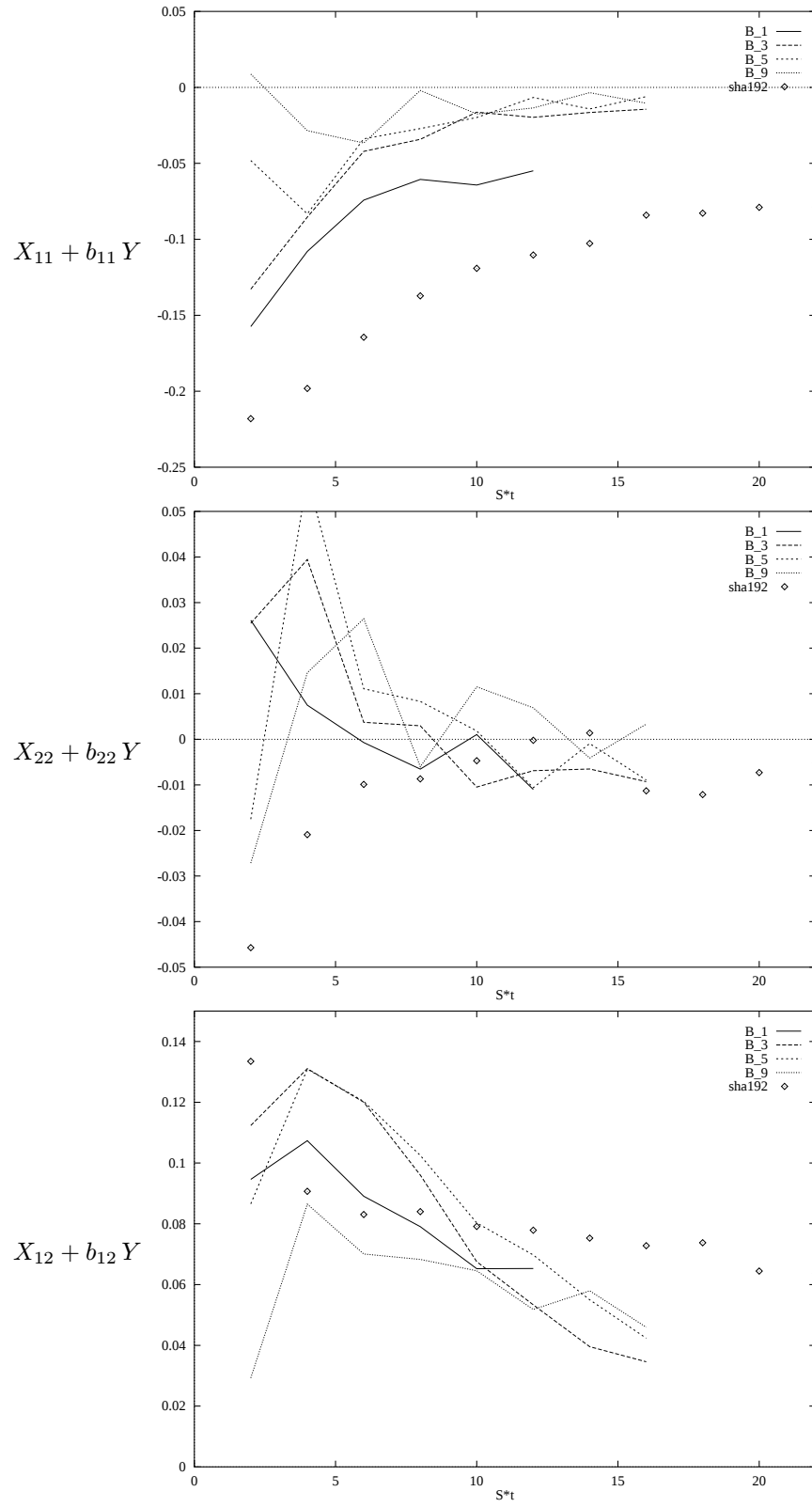


Fig. 3.10: $X_{ij} + b_{ij} Y$: la somme des termes outre que la production du bilan de l'équation de l'anisotropie de la tension de Reynolds. Résultats de différentes DNS de cisaillement pur.

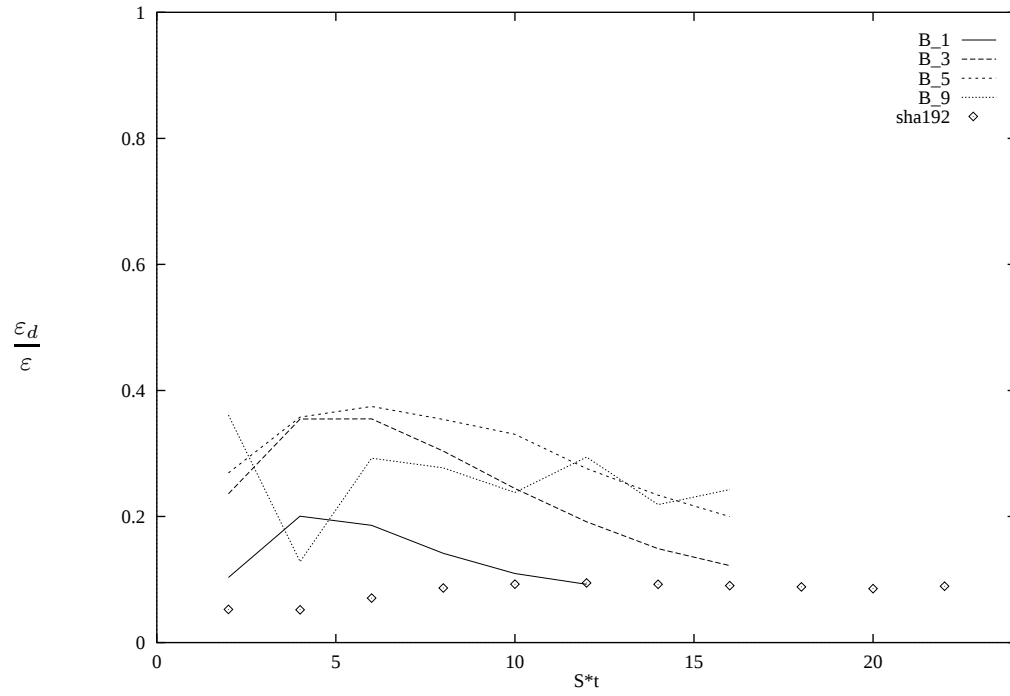


Fig. 3.11: Evolution de la fraction dilatationnelle du taux de dissipation. Résultats de différentes DNS de cisaillement pur.

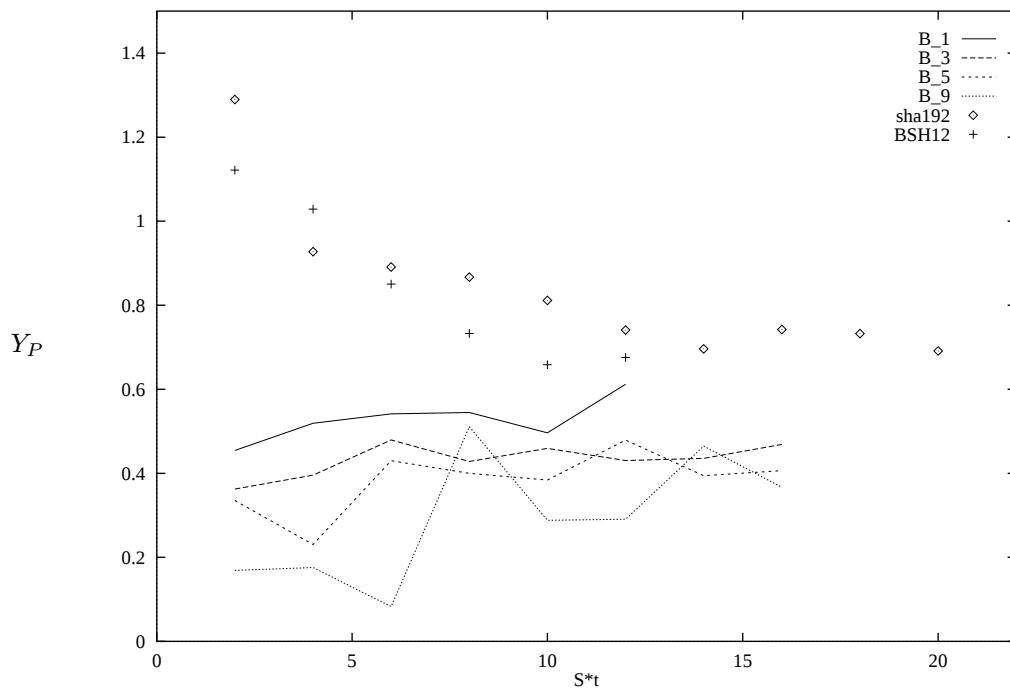


Fig. 3.12: Evolution de la somme des termes énergétiques rapportées à la production de l'énergie cinétique turbulente. Résultats de différentes DNS de cisaillement pur.

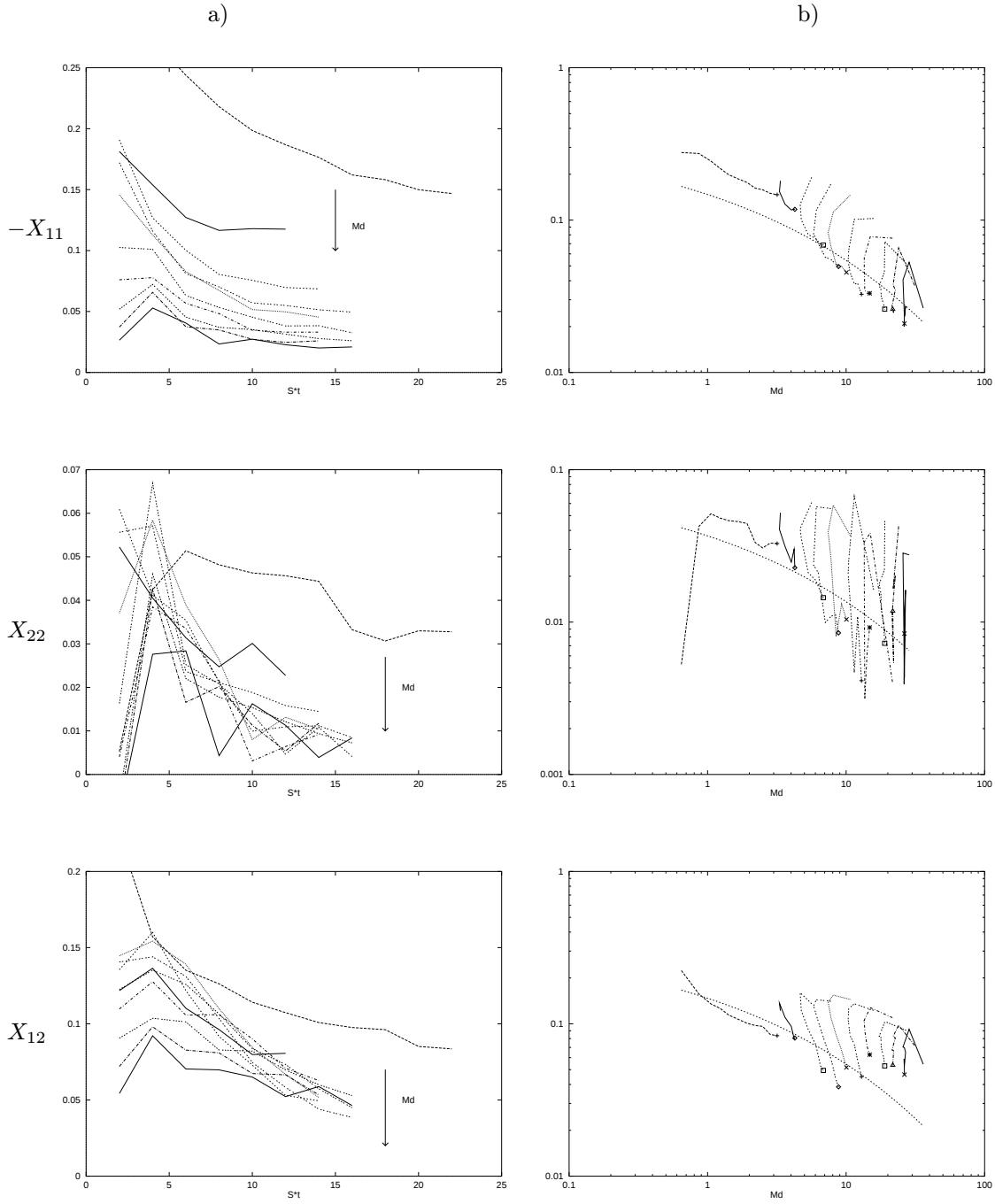


Fig. 3.13: a) Somme des termes redistributifs X_{ij} en cours du temps dans les DNS de Simone *et al.* La flèche indique M_{d0} croissant. Les résultats de la simulation sha192 de Blaisdell *et al.* correspondent à la ligne qui s'étend jusqu'à $St=24$. b) Somme des termes redistributifs X_{ij}^{dev} en fonction du nombre de Mach de distorsion en représentation logarithmique. Les symboles indiquent la valeur à la fin de la simulation. La ligne indique une dépendance $\exp(-M_d^{0.3})$. Ceci ne constitue pas une interpolation mais seulement une référence.

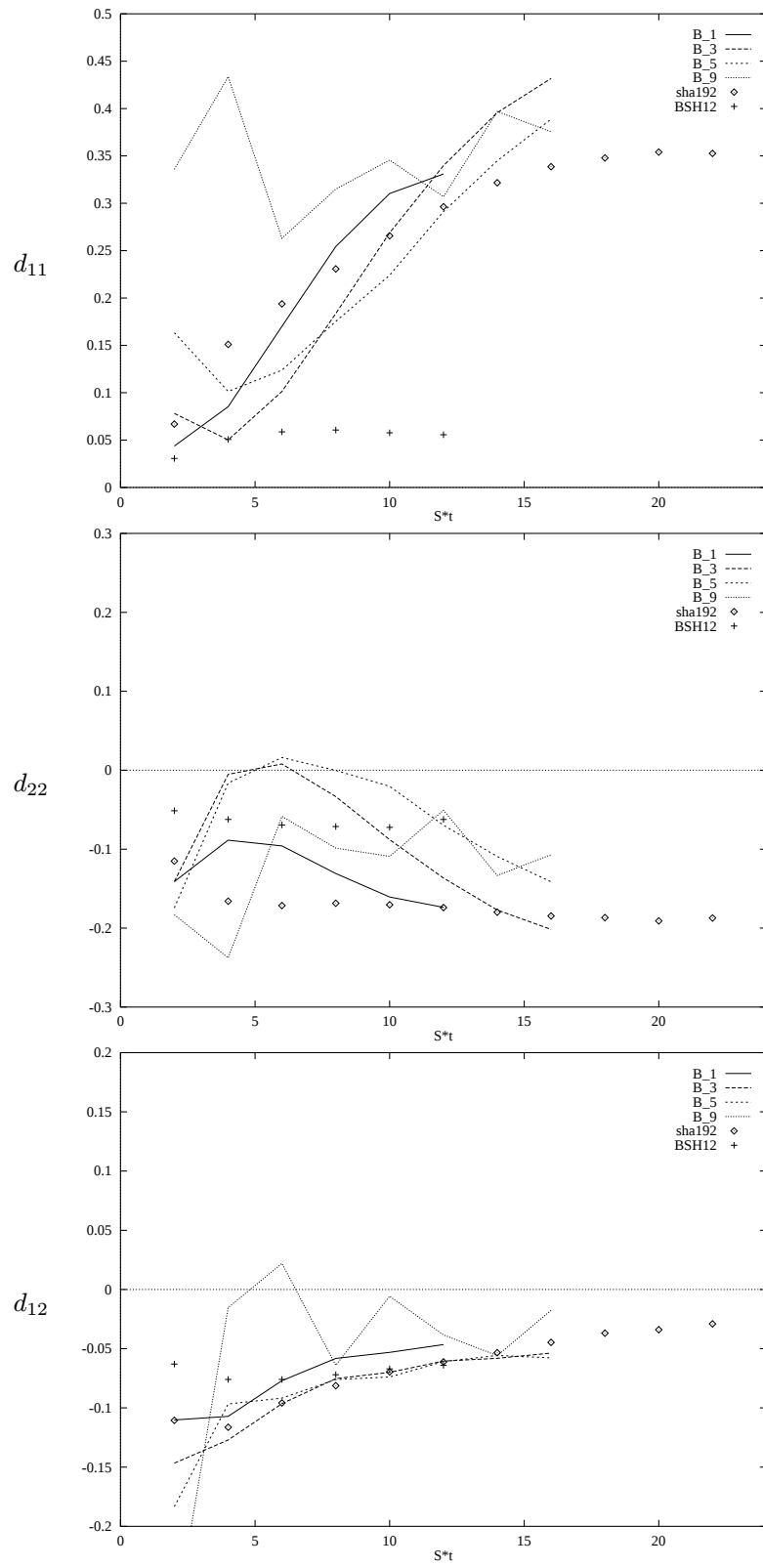


Fig. 3.14: L'évolution de l'anisotropie du tenseur de dissipation d_{ij} dans différents cas de DNS de cisaillement pur.

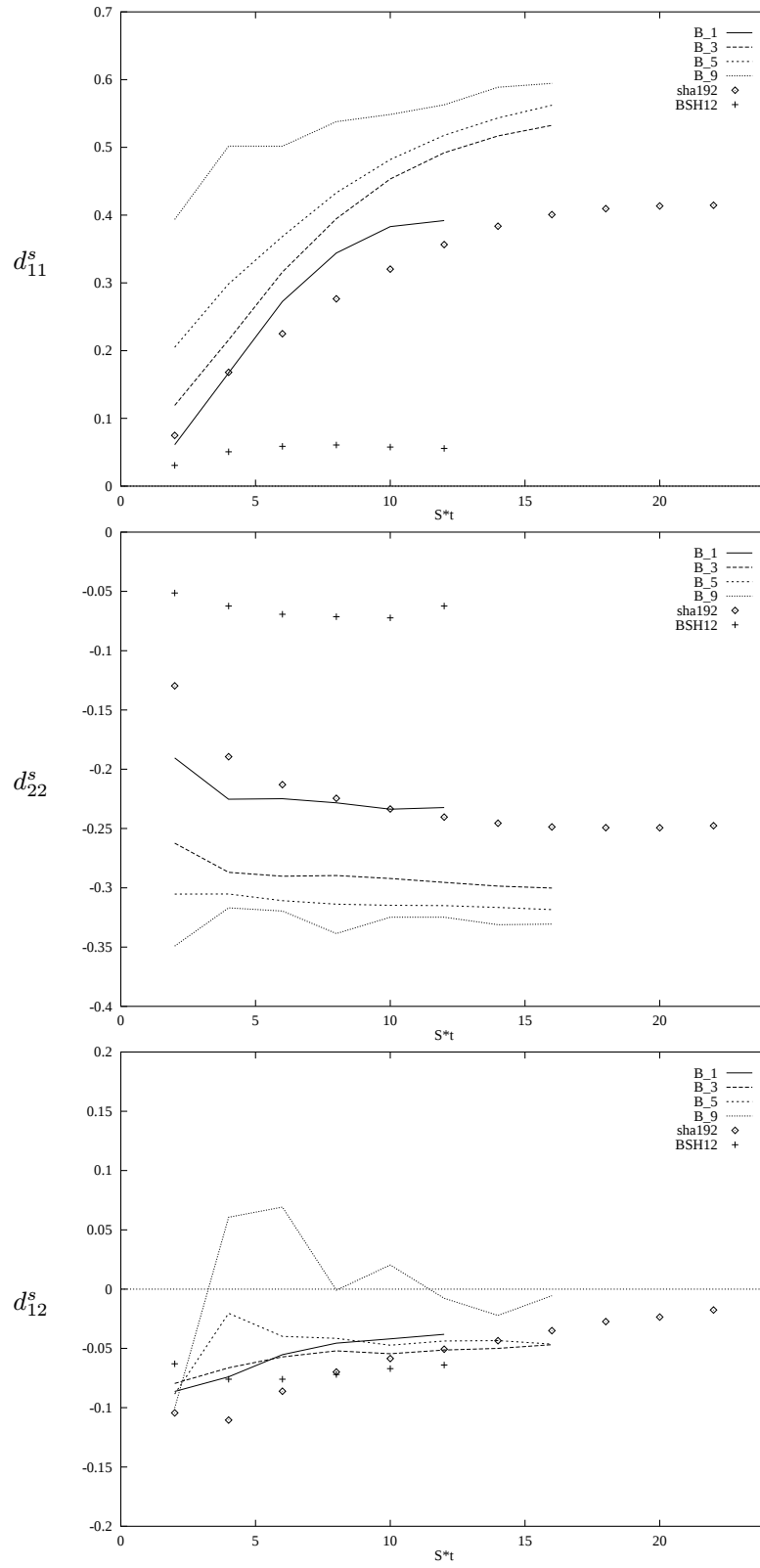


Fig. 3.15: L'évolution de l'anisotropie de la partie solénoïdale du tenseur de dissipation d_{ij}^s dans différents cas de DNS de cisaillement pur.

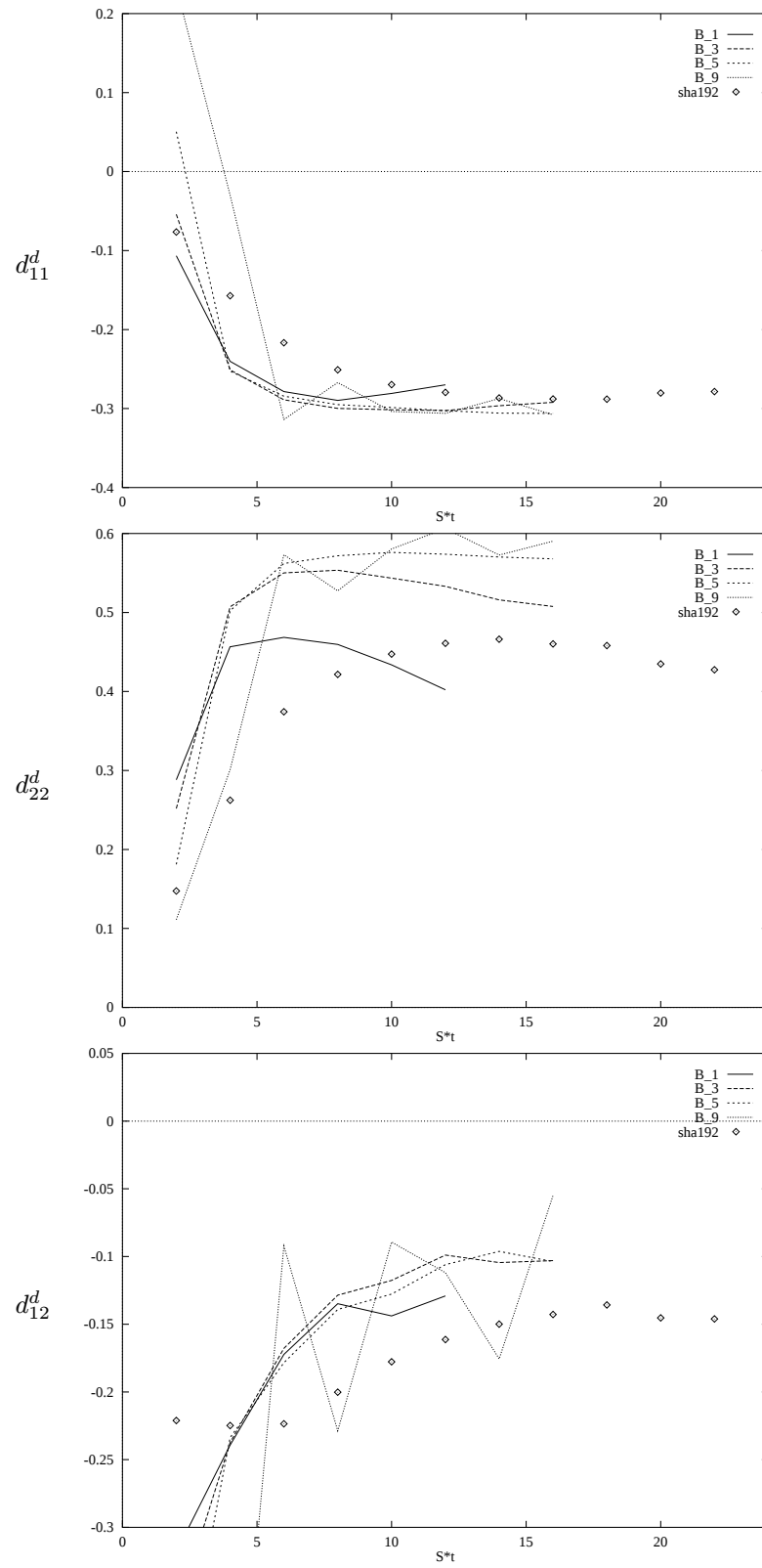


Fig. 3.16: L'évolution de l'anisotropie de la partie dilatationnelle du tenseur de dissipation d_{ij}^d dans différents cas de DNS de cisaillement pur.

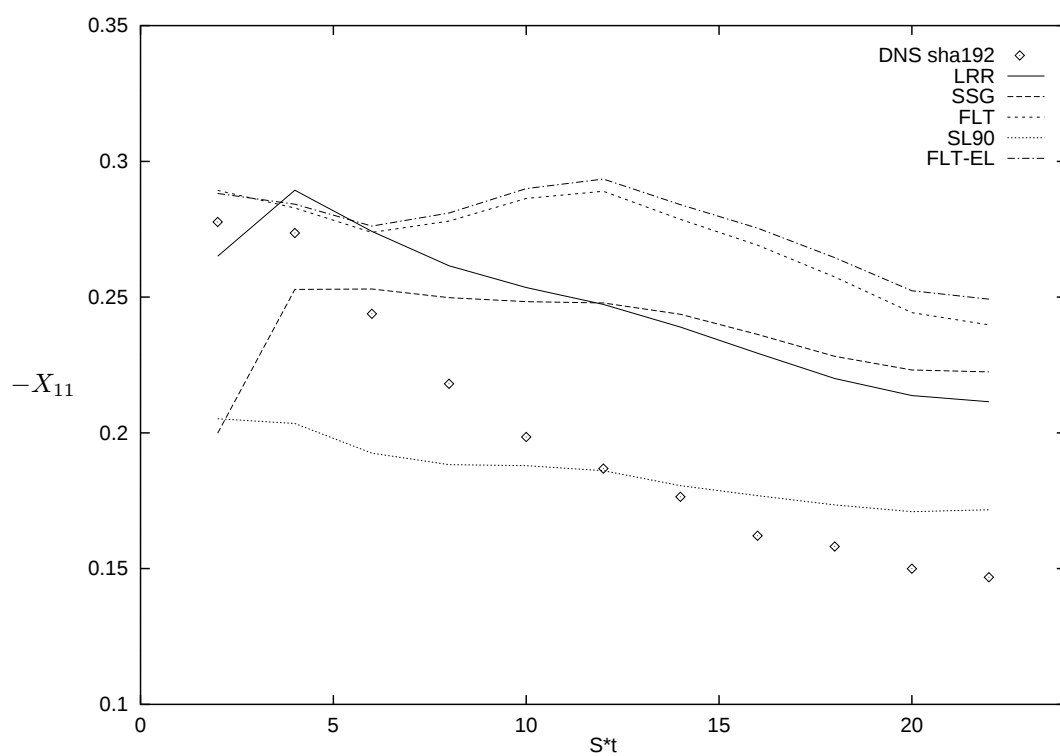


Fig. 3.17: Evolution de la composante axiale du terme de redistribution ($-X_{11}$) calculée avec différents modèles à partir des données de la simulation sha192 de Blaisdell *et al.*

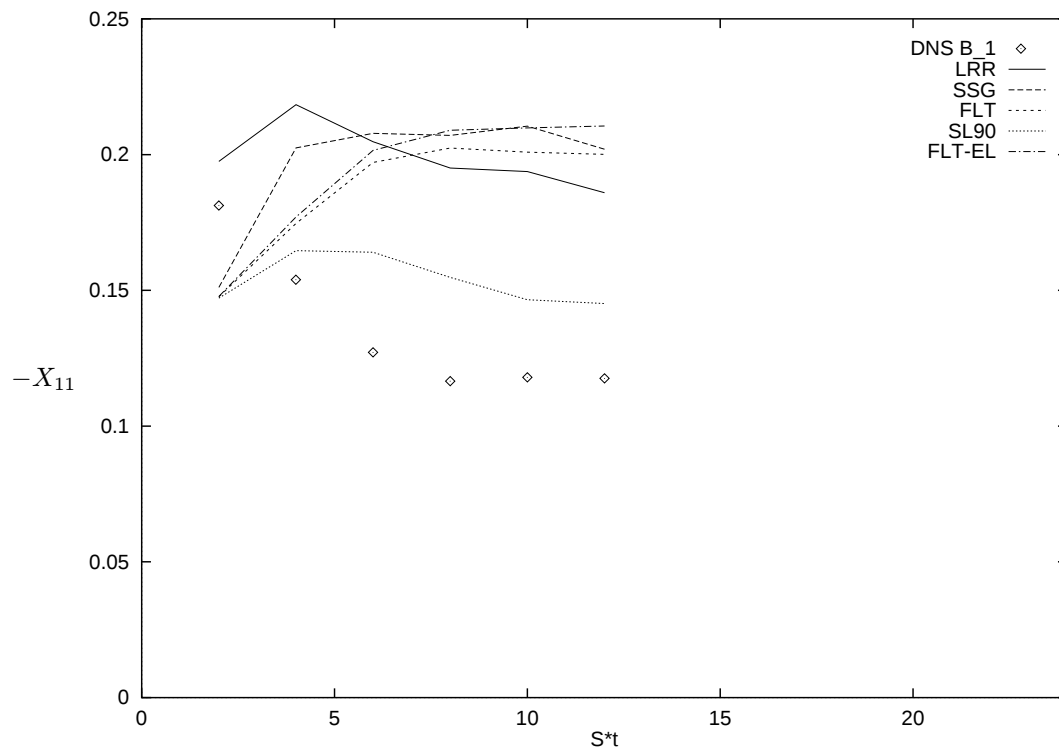


Fig. 3.18: Evolution de la composante axiale du terme de redistribution ($-X_{11}$) calculée avec différents modèles à partir des données de la simulation B_1 de Simone *et al.*

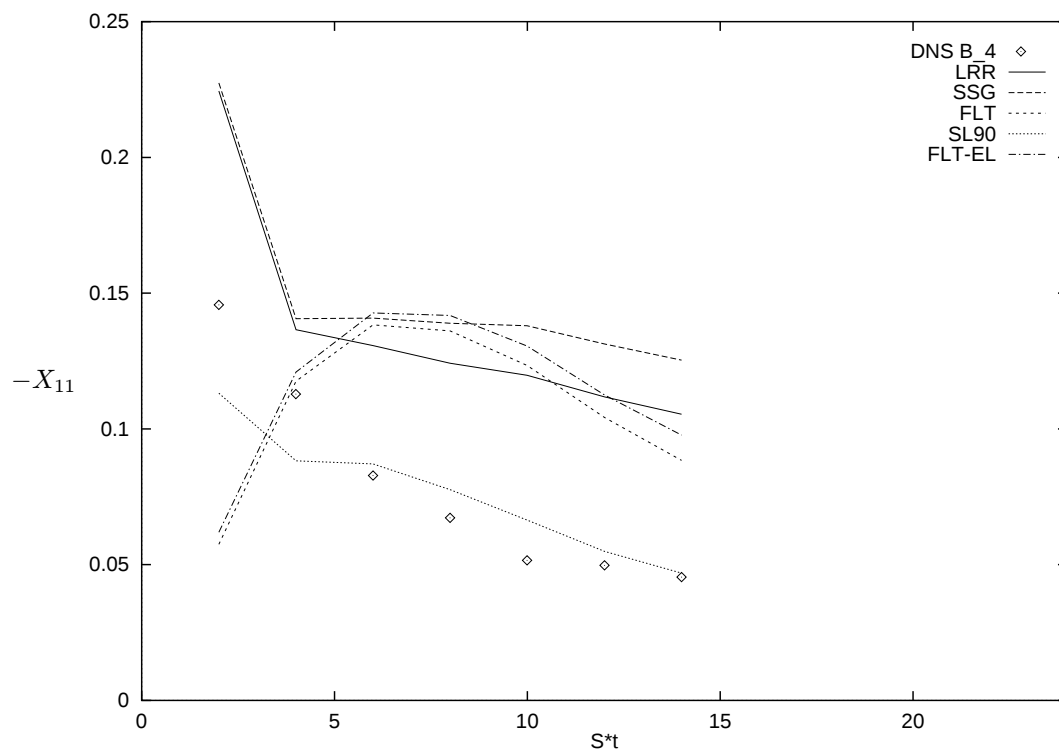


Fig. 3.19: Evolution de la composante axiale du terme de redistribution ($-X_{11}$) calculée avec différents modèles à partir des données de la simulation B_4 de Simone *et al.*

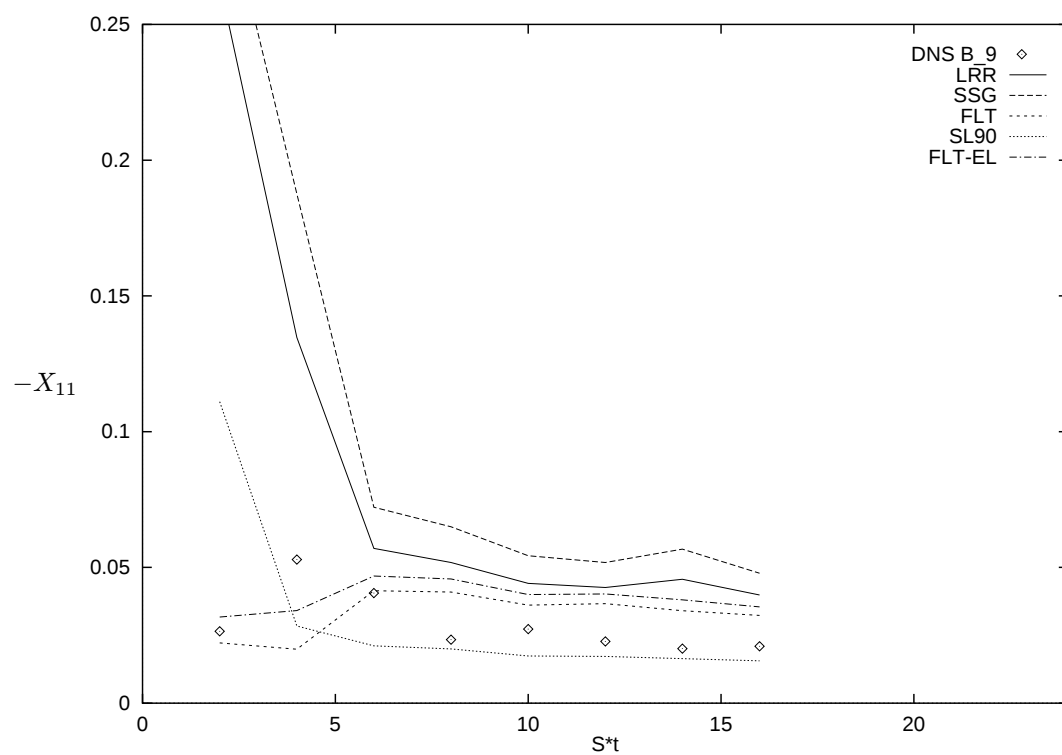


Fig. 3.20: Evolution de la composante axiale du terme de redistribution ($-X_{11}$) calculée avec différents modèles à partir des données de la simulation B_9 de Simone *et al.*

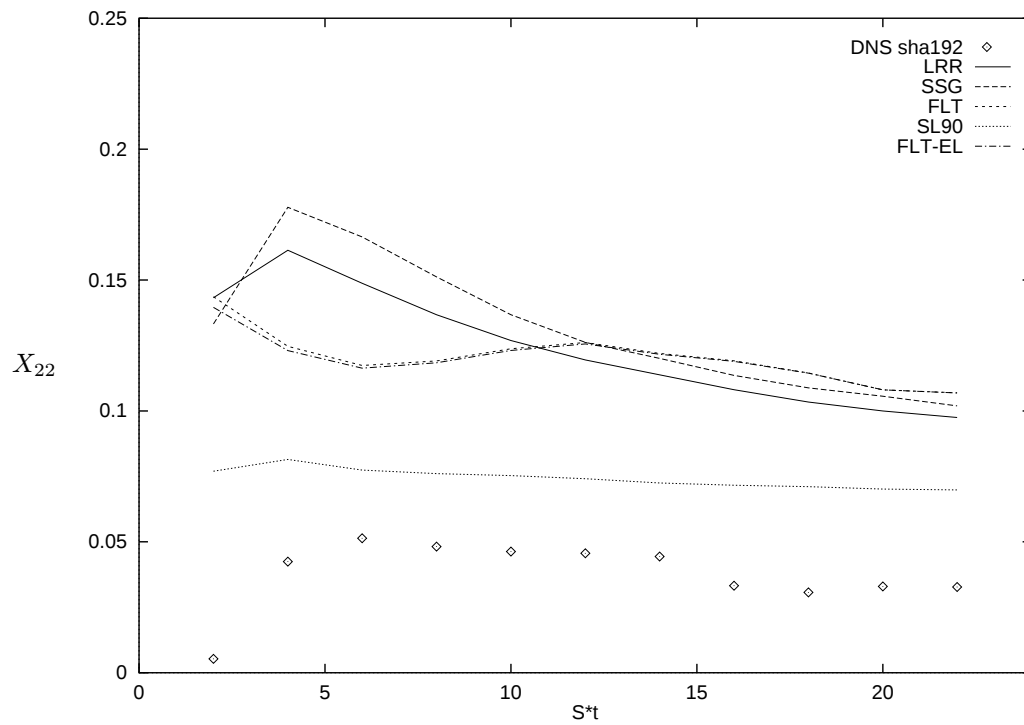


Fig. 3.21: Evolution de la composante axiale du terme de redistribution (X_{22}) calculée avec différents modèles à partir des données de la simulation sha192 de Blaisdell *et al.*

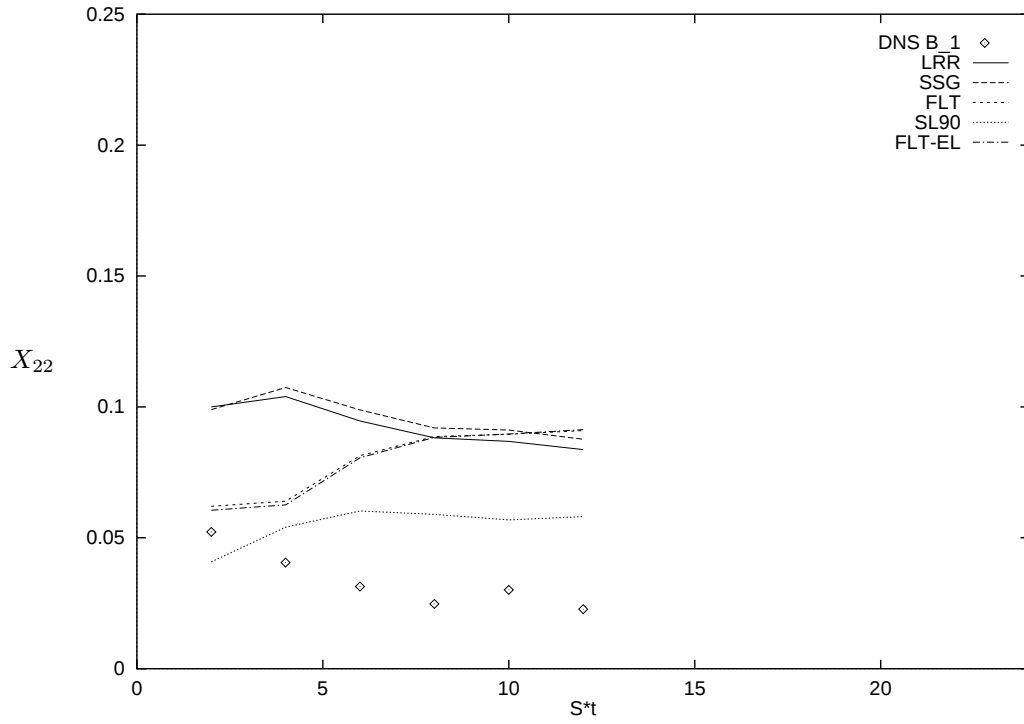


Fig. 3.22: Evolution de la composante axiale du terme de redistribution (X_{22}) calculée avec différents modèles à partir des données de la simulation B_1 de Simone *et al.*

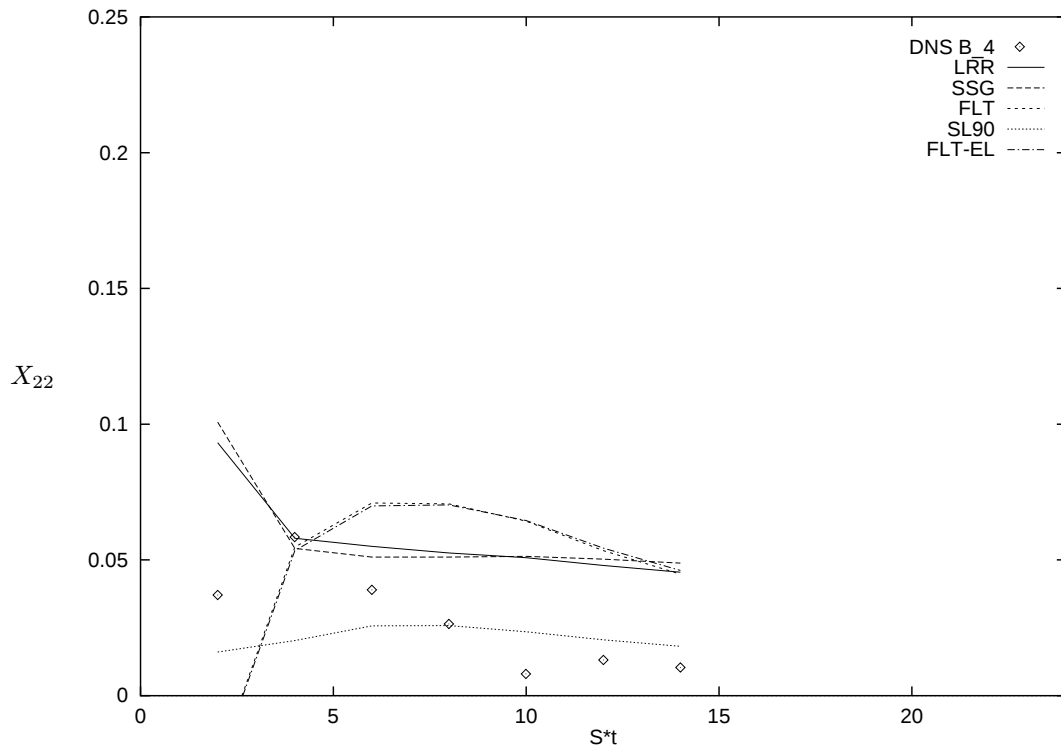


Fig. 3.23: Evolution de la composante axiale du terme de redistribution (X_{22}) calculée avec différents modèles à partir des données de la simulation B_4 de Simone *et al.*

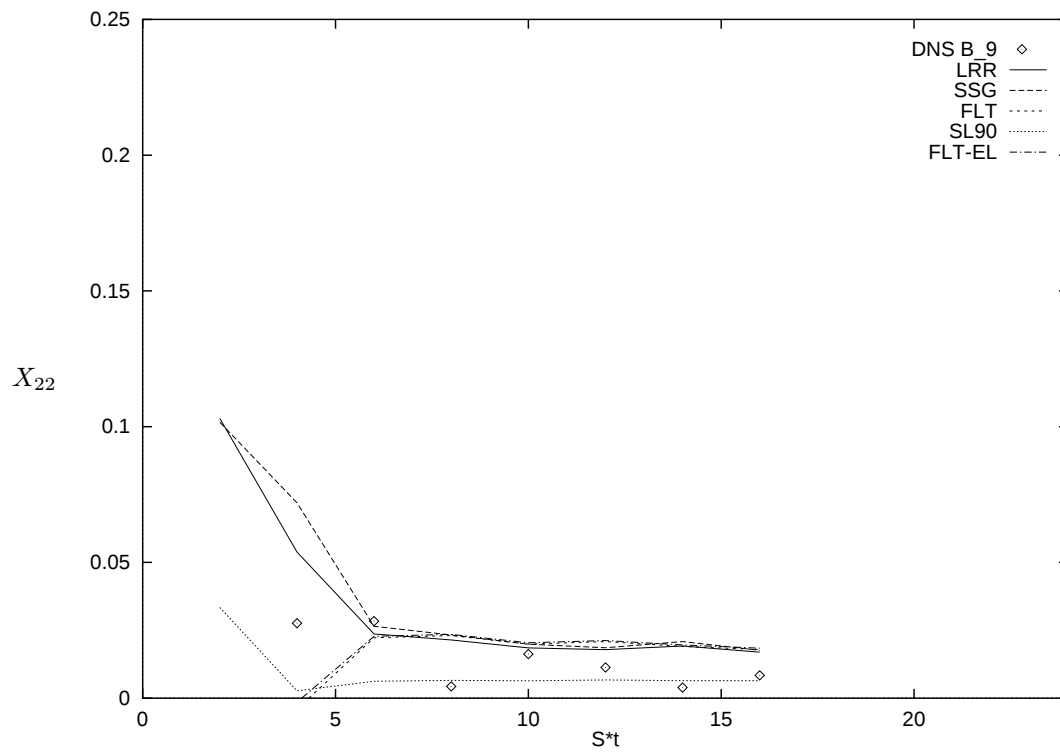


Fig. 3.24: Evolution de la composante axiale du terme de redistribution (X_{22}) calculée avec différents modèles à partir des données de la simulation B_9 de Simone *et al.*

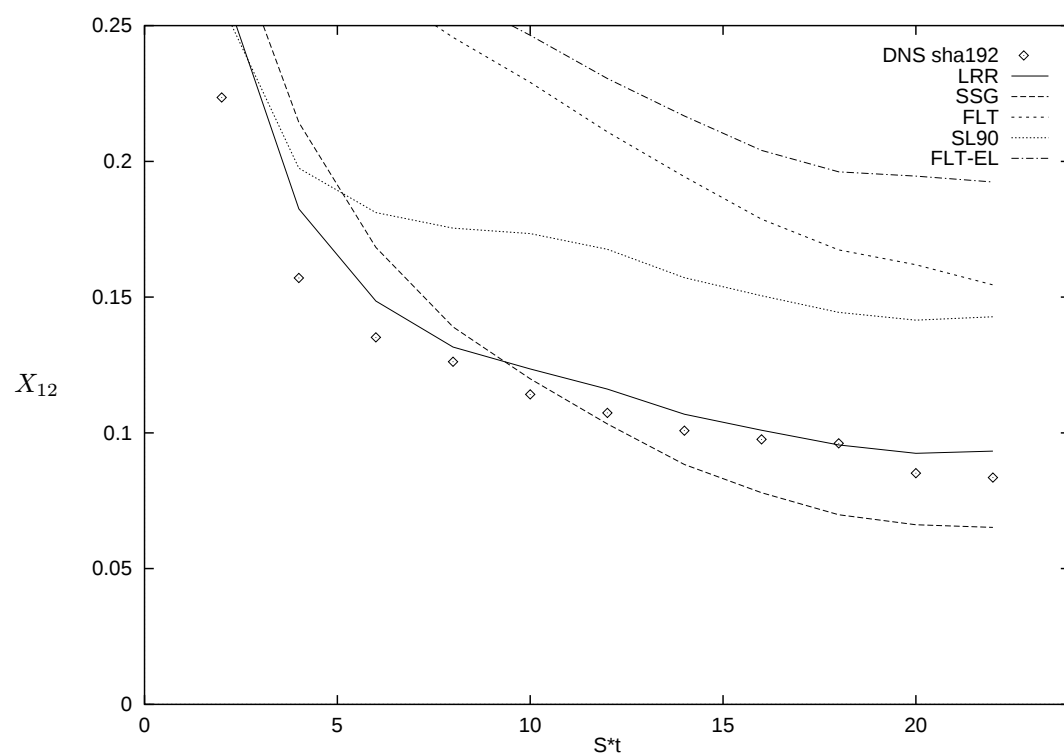


Fig. 3.25: Evolution de la composante axiale du terme de redistribution (X_{12}) calculée avec différents modèles à partir des données de la simulation sha192 de Blaisdell *et al.*

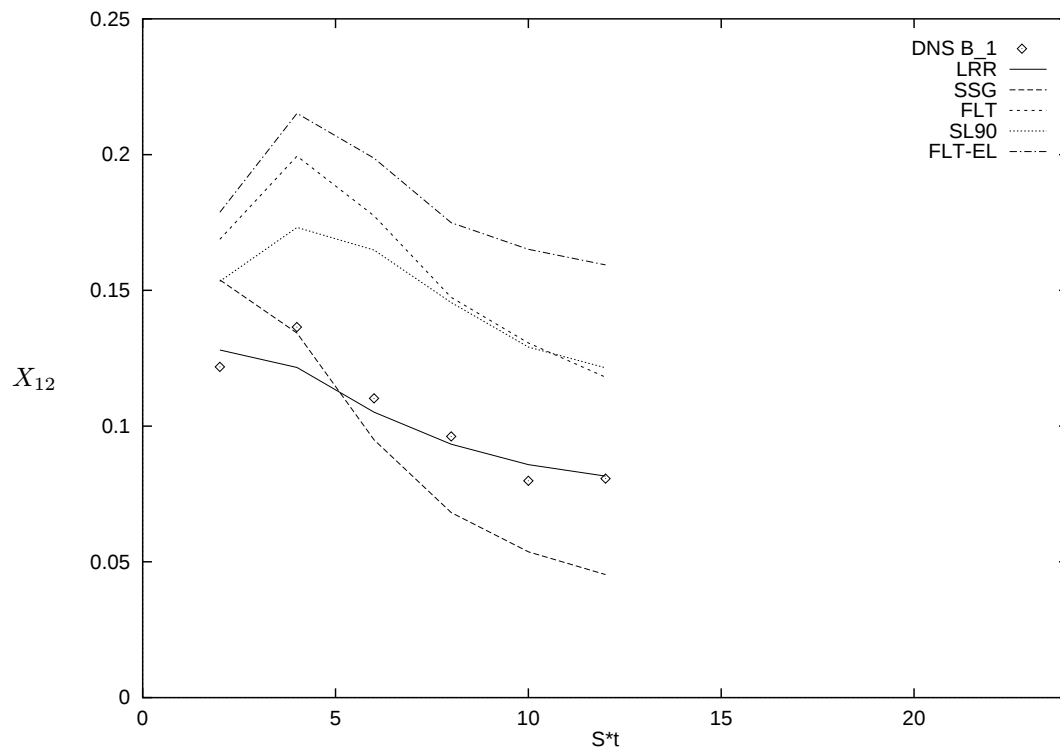


Fig. 3.26: Evolution de la composante axiale du terme de redistribution (X_{12}) calculée avec différents modèles à partir des données de la simulation B_1 de Simone *et al.*

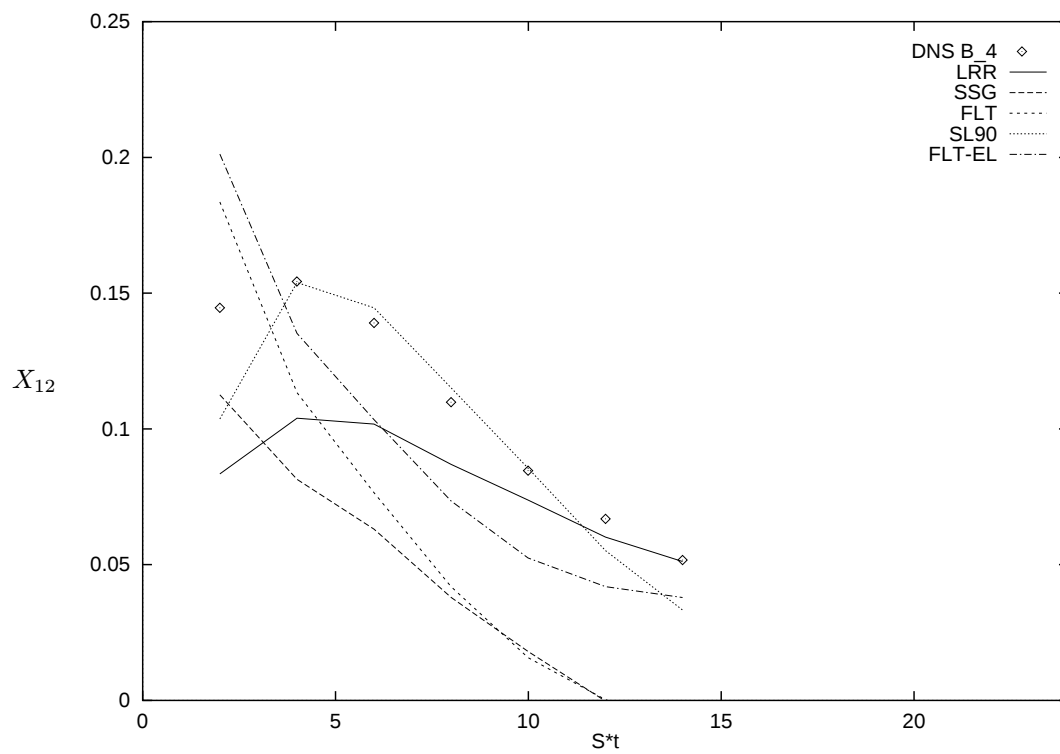


Fig. 3.27: Evolution de la composante axiale du terme de redistribution (X_{12}) calculée avec différents modèles à partir des données de la simulation B_4 de Simone *et al.*

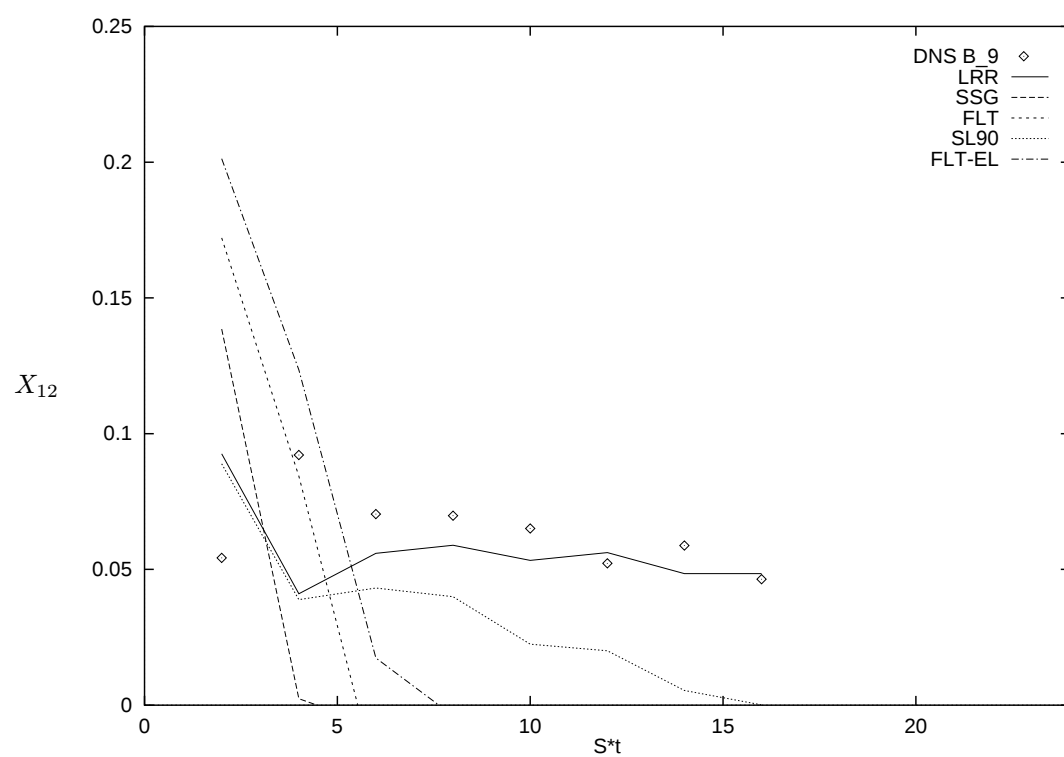


Fig. 3.28: Evolution de la composante axiale du terme de redistribution (X_{12}) calculée avec différents modèles à partir des données de la simulation B_9 de Simone *et al.*

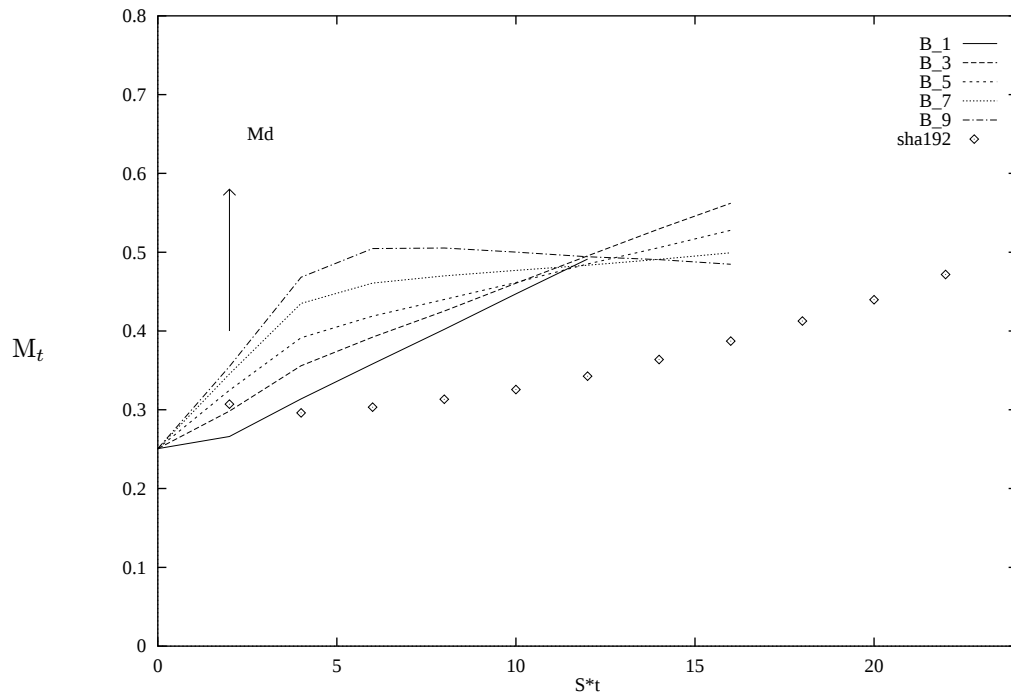


Fig. 3.29: Evolution du nombre de Mach turbulent. Résultats de différentes DNS de cisaillement pur. La flèche indique un nombre de Mach de distorsion initial croissant.

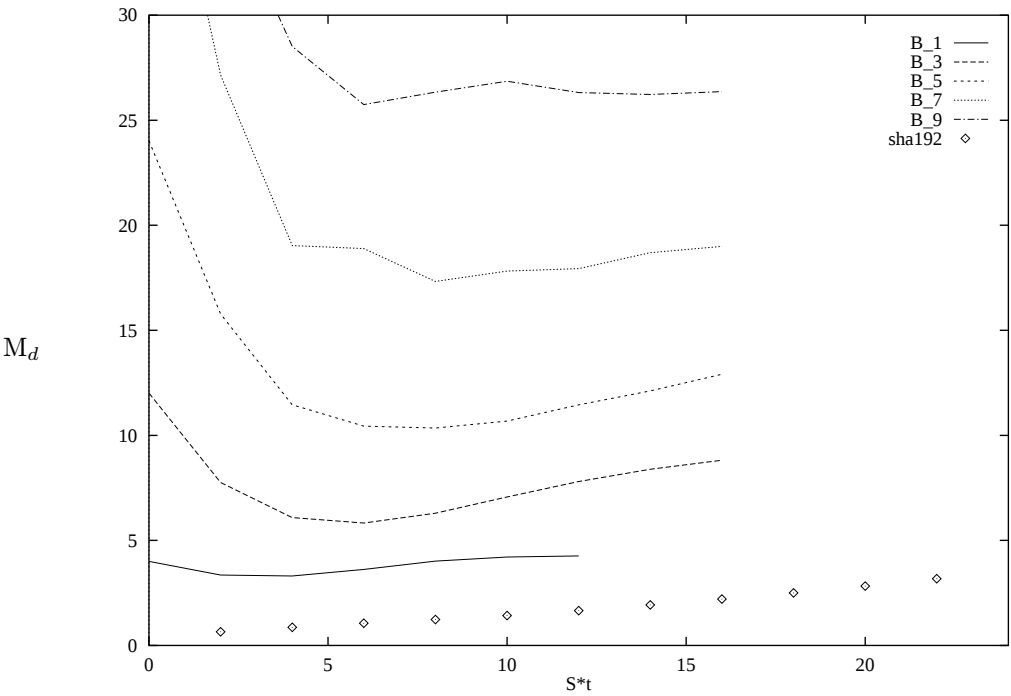
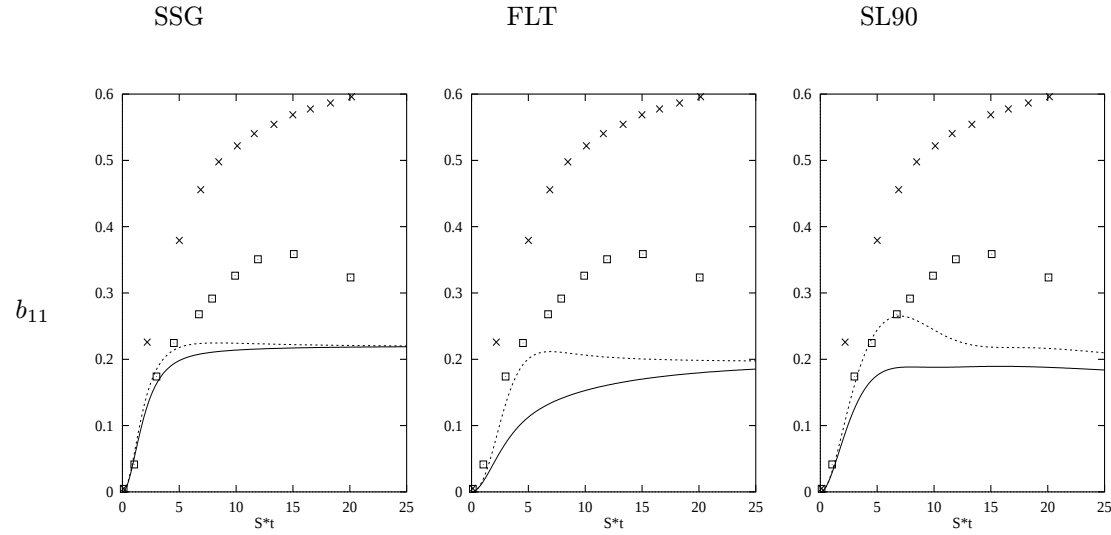


Fig. 3.30: Evolution du nombre de Mach turbulent. Résultats de différentes DNS de cisaillement pur.



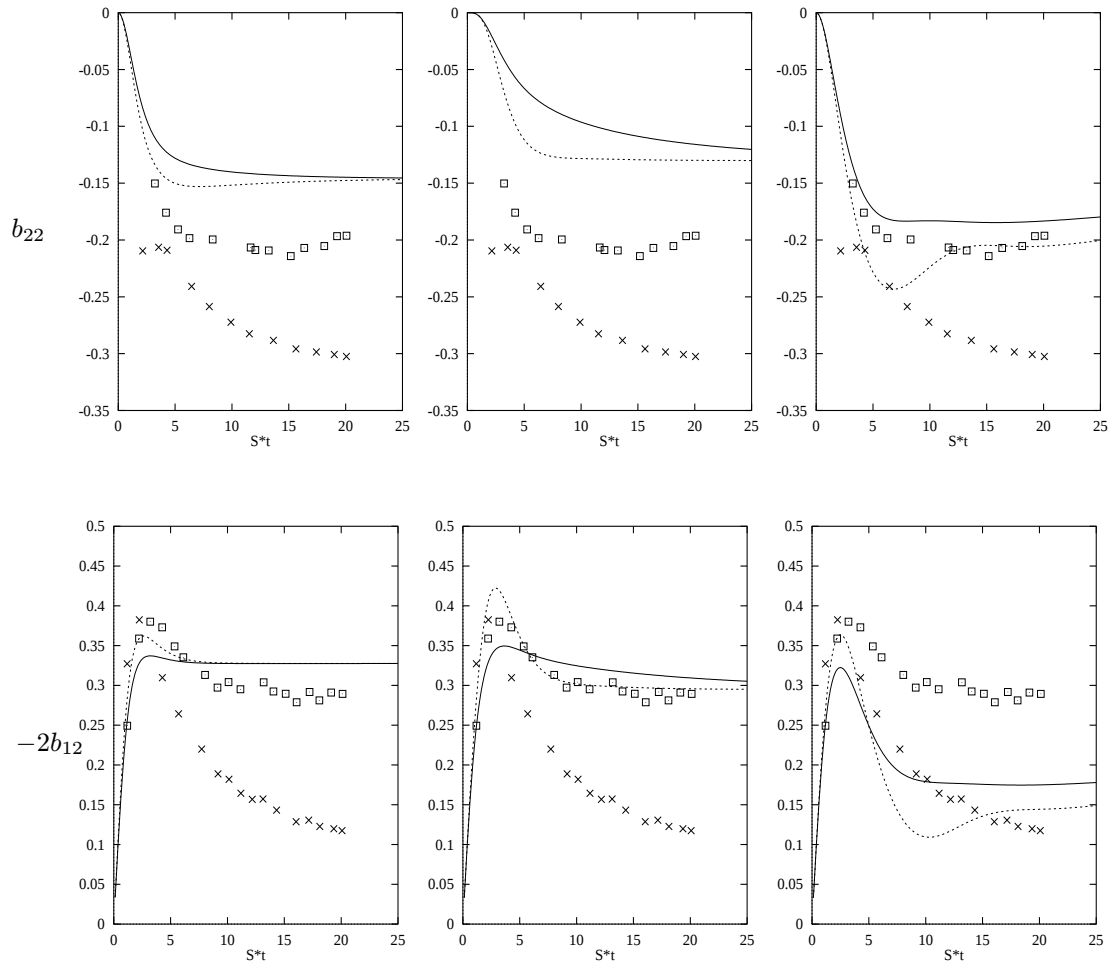
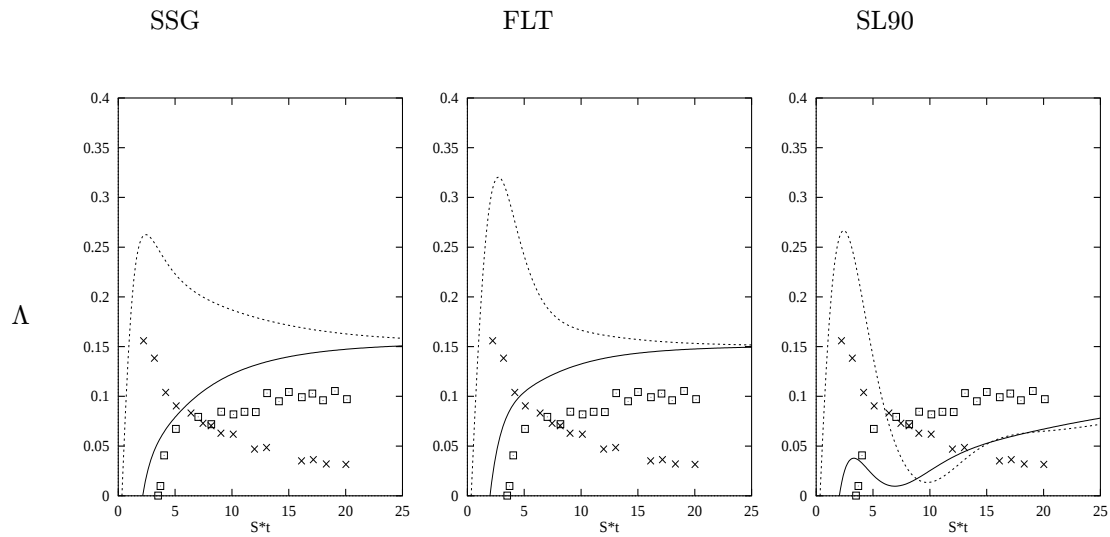


Fig. 3.31: L'écoulement homogène cisailé en régime compressible correspondant à la DNS de Sarkar: Résultats du calcul sans termes de compressibilité explicites.

Légende: $\square$ DNS cas A1, $\times$ DNS cas A4; — calcul cas A1, calcul cas A4.



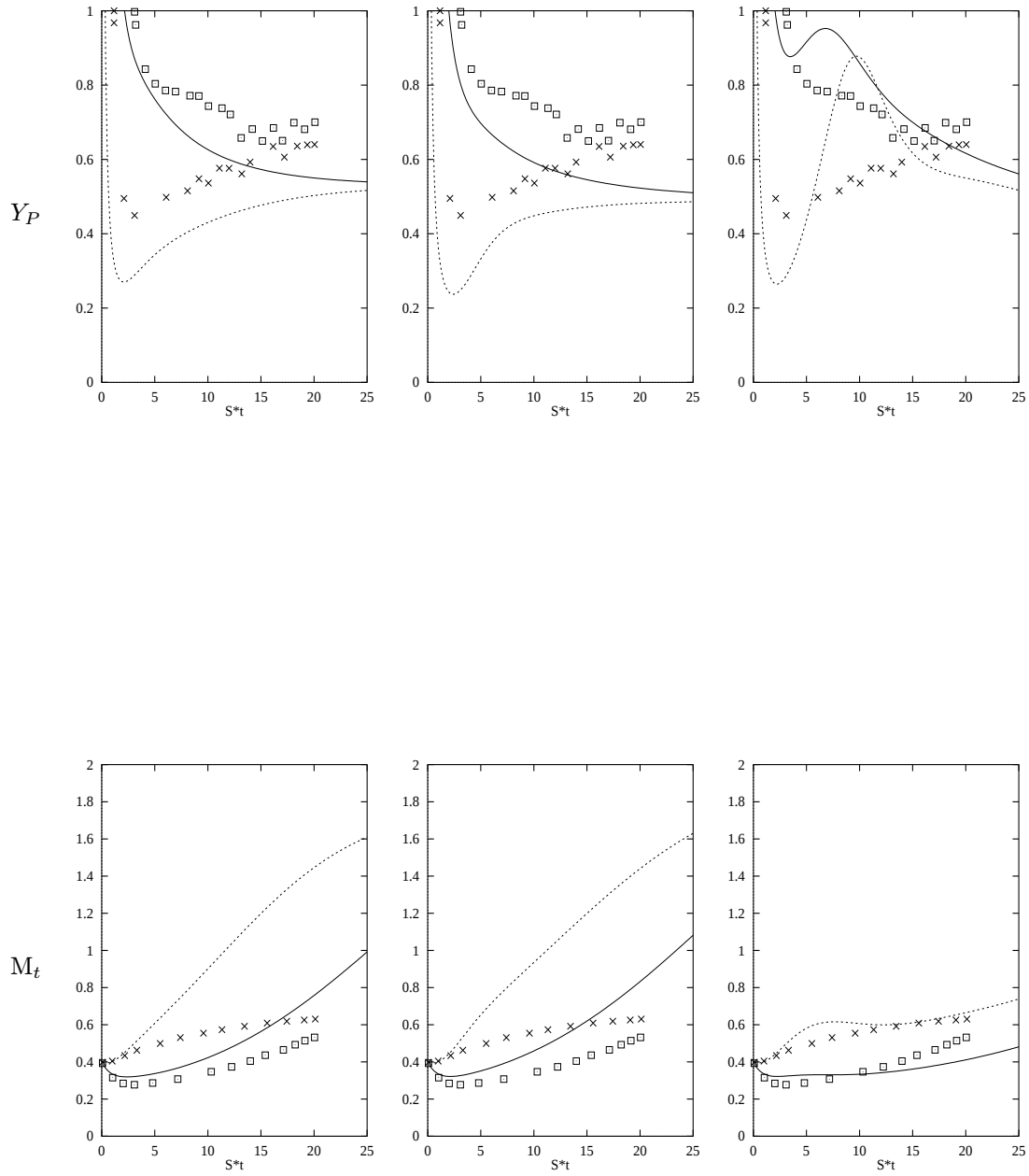


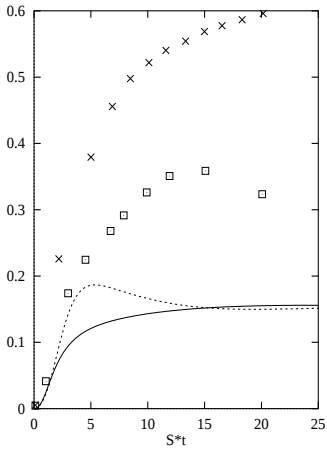
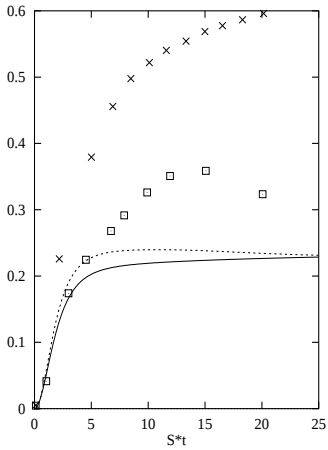
Fig. 3.32: L'écoulement homogène cisailé en régime compressible correspondant à la DNS de Sarkar: Résultats du calcul sans termes de compressibilité explicites.

Légende: $\square$ DNS cas A1, $\times$ DNS cas A4; — calcul cas A1, calcul cas A4.

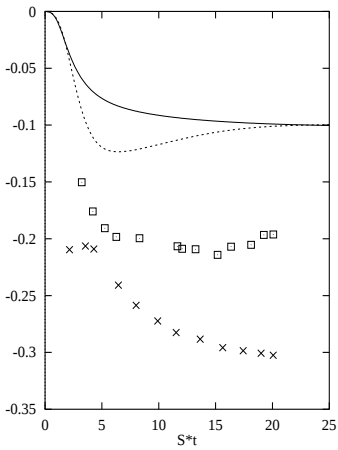
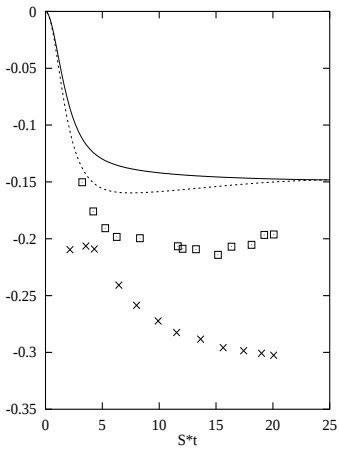
SSG & Sarkar

FLT-EL

b_{11}



b_{22}



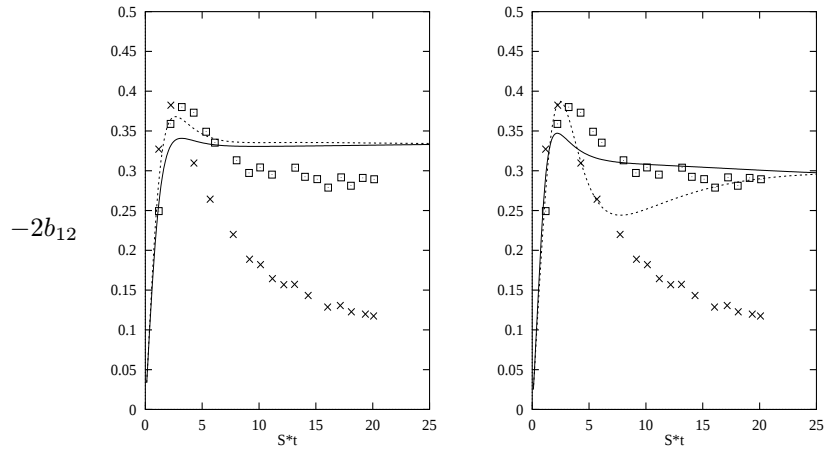
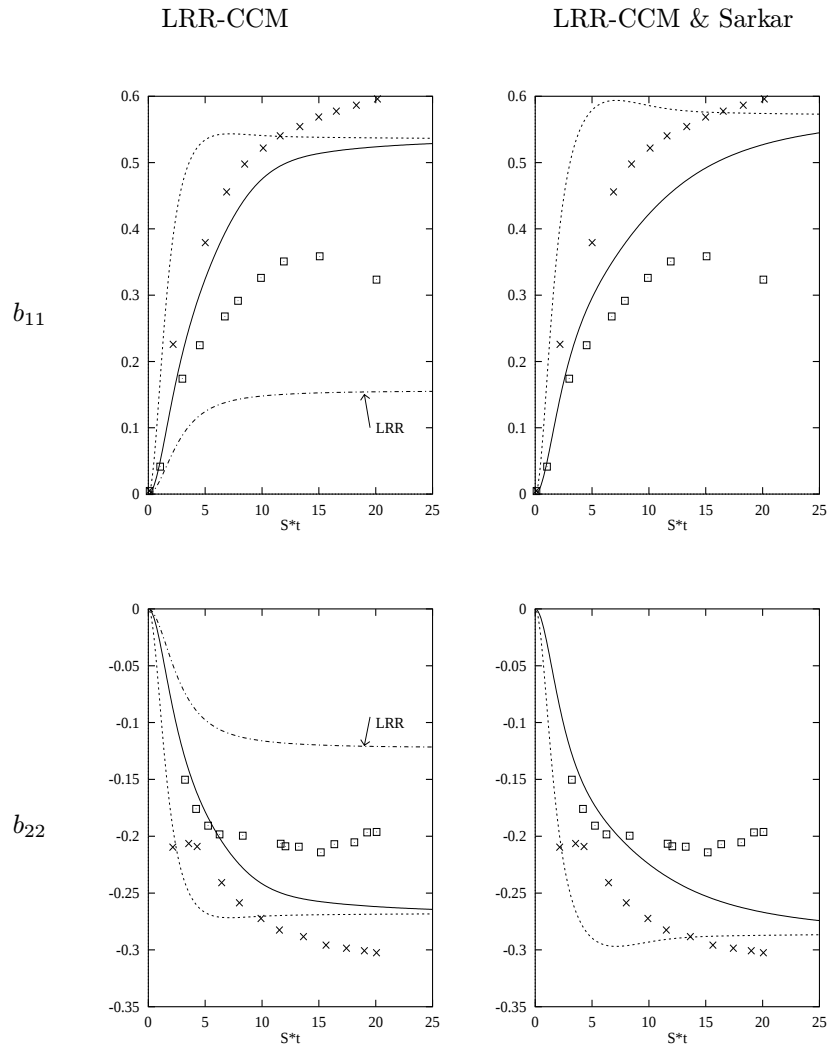


Fig. 3.33: L'écoulement homogène cisailé en régime compressible correspondant à la DNS de Sarkar: Résultats du calcul avec différents termes de compressibilité explicites.

Légende: $\square$ DNS cas A1, $\times$ DNS cas A4; — calcul cas A1, calcul cas A4.



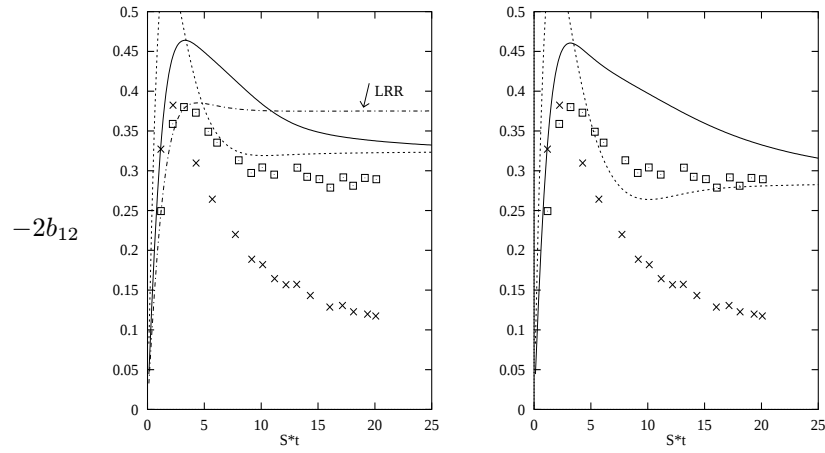
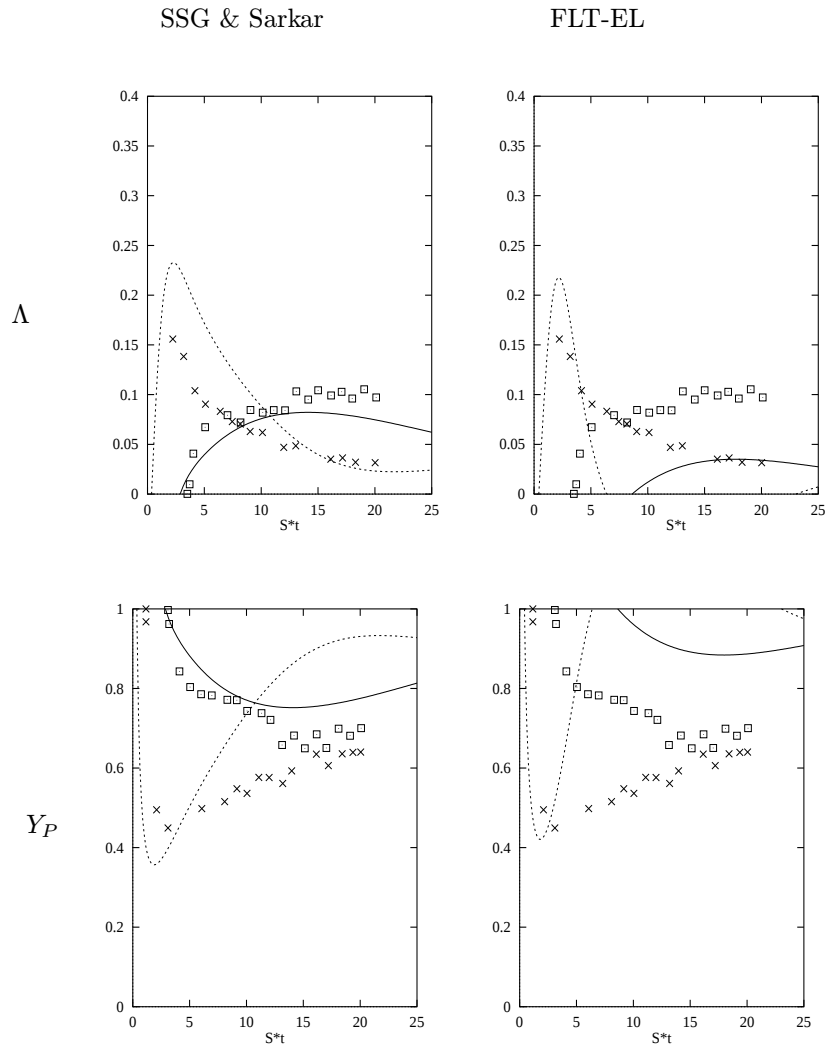


Fig. 3.34: L'écoulement homogène cisailé en régime compressible correspondant à la DNS de Sarkar: Résultats du calcul avec différents termes de compressibilité explicites.

Légende: $\square$ DNS cas A1, $\times$ DNS cas A4; — calcul cas A1, calcul cas A4.



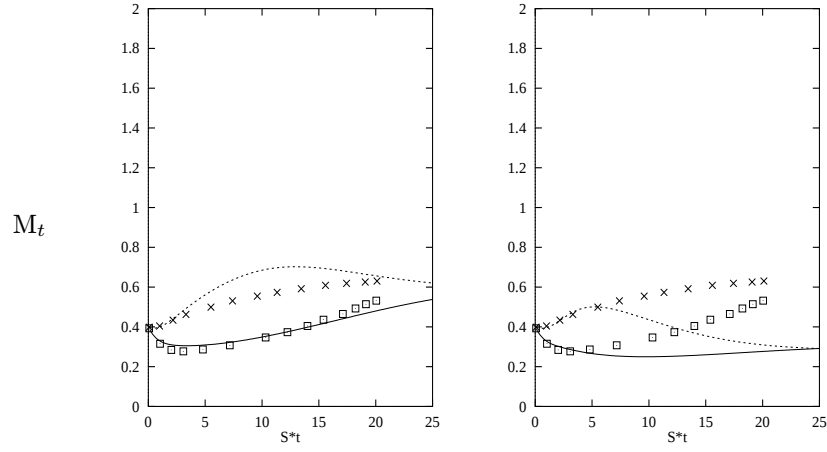
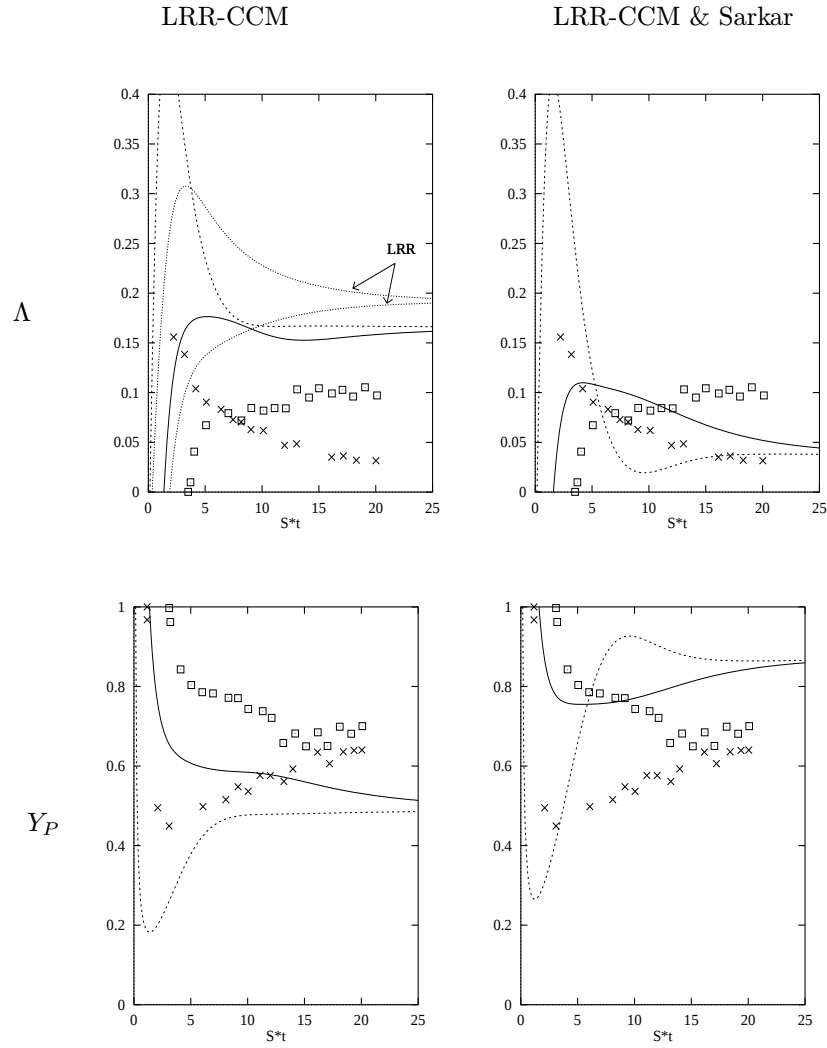


Fig. 3.35: L'écoulement homogène cisailé en régime compressible correspondant à la DNS de Sarkar: Résultats du calcul avec différents termes de compressibilité explicites.
Légende: $\square$ DNS cas A1, $\times$ DNS cas A4; — calcul cas A1, calcul cas A4.



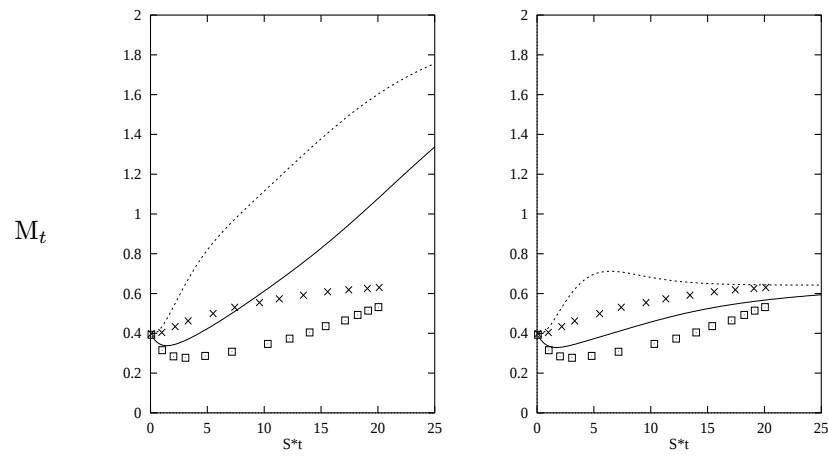


Fig. 3.36: L'écoulement homogène cisailé en régime compressible correspondant à la DNS de Sarkar: Résultats du calcul avec différents termes de compressibilité explicites.

Légende: □ DNS cas A1, × DNS cas A4; — calcul cas A1, calcul cas A4.

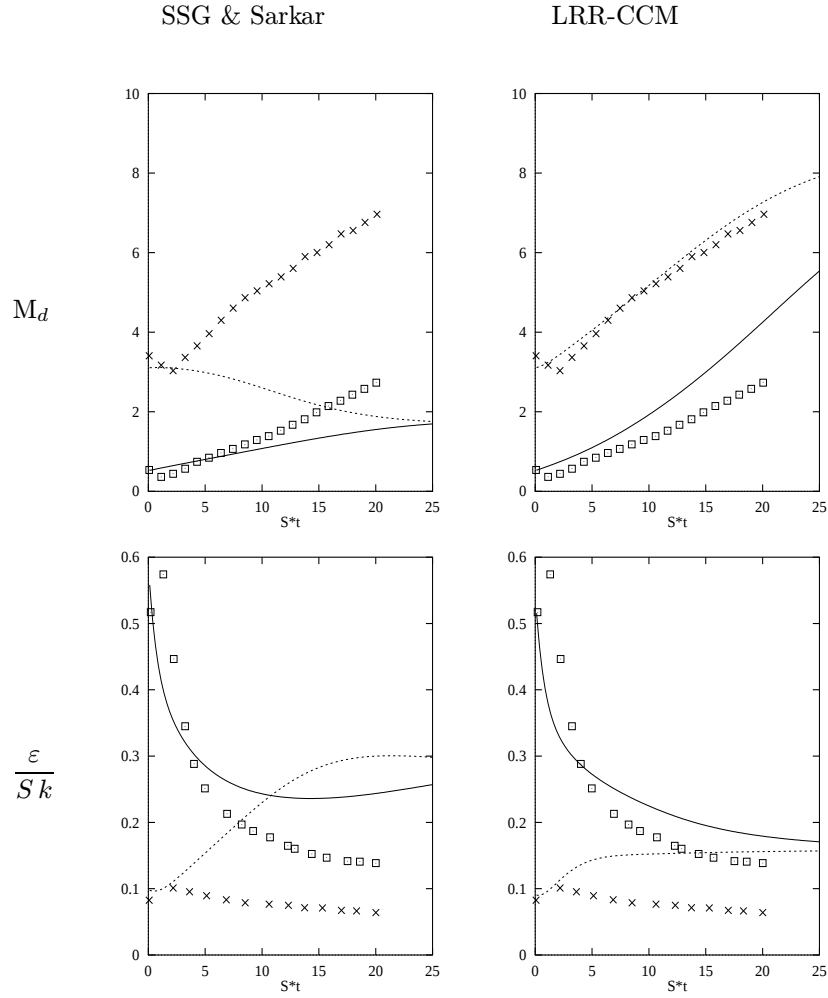


Fig. 3.37: L'écoulement homogène cisailé en régime compressible correspondant à la DNS de Sarkar: Résultats du calcul avec différents termes de compressibilité explicites.
Légende: $\square$ DNS cas A1, $\times$ DNS cas A4; — calcul cas A1, calcul cas A4.

Figures: Etude des écoulements libres

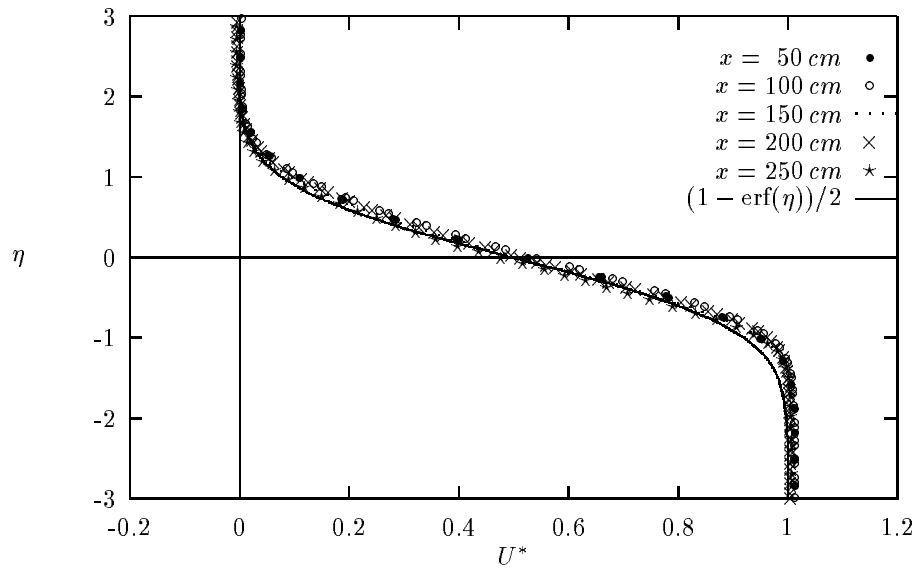


Fig. 4.2: La normalisation des profils transversaux successifs de la couche de mélange incompressible: Comparaison des résultats du calcul avec le modèle SSG avec la fonction (4.2) de Goertler.

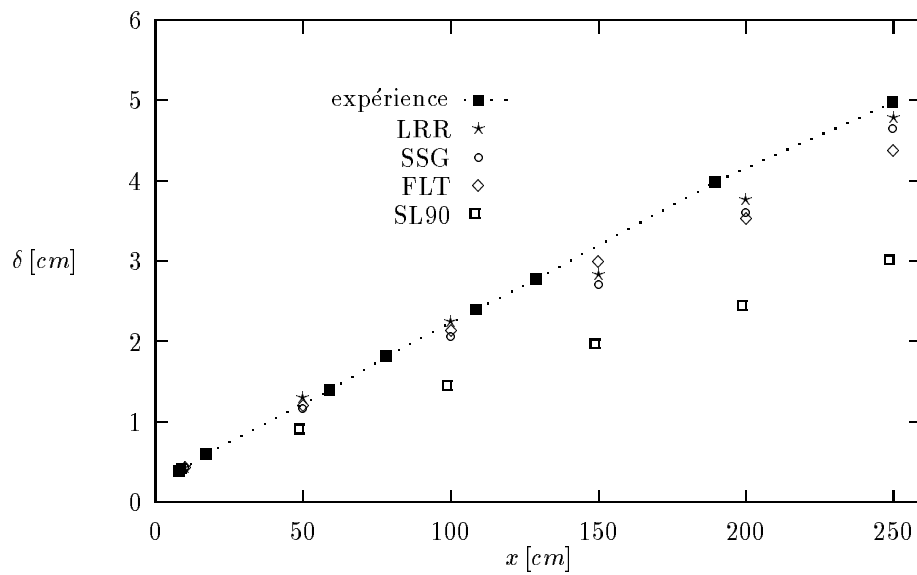


Fig. 4.3: L'évolution de l'échelle de longueur laterale δ de la couche de mélange incompressible: Comparaison entre l'expérience et les résultats obtenus avec les fermetures de second ordre.

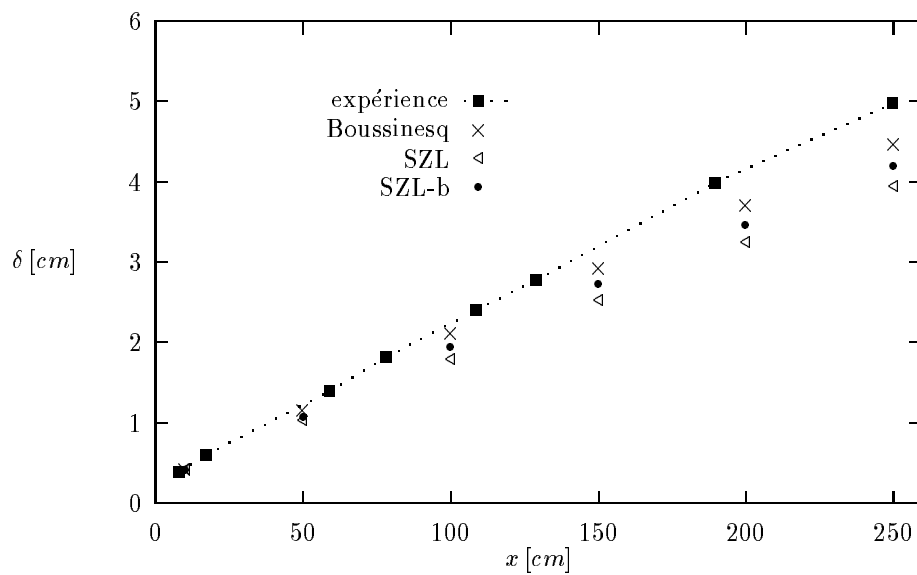


Fig. 4.4: L'évolution de l'échelle de longueur laterale δ de la couche de mélange incompressible: Comparaison entre l'expérience et les résultats obtenus avec les fermetures de premier ordre.

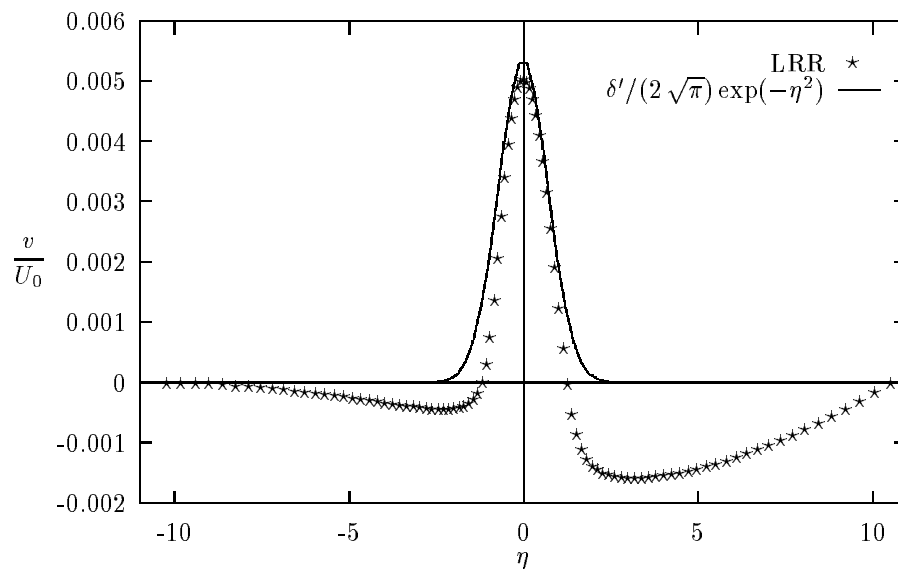


Fig. 4.5: Le profil de la vitesse transversale dans la région d'équilibre de la couche de mélange incompressible: Comparaison entre la relation analytique (4.4) et les résultats numériques obtenus avec le modèle LRR.

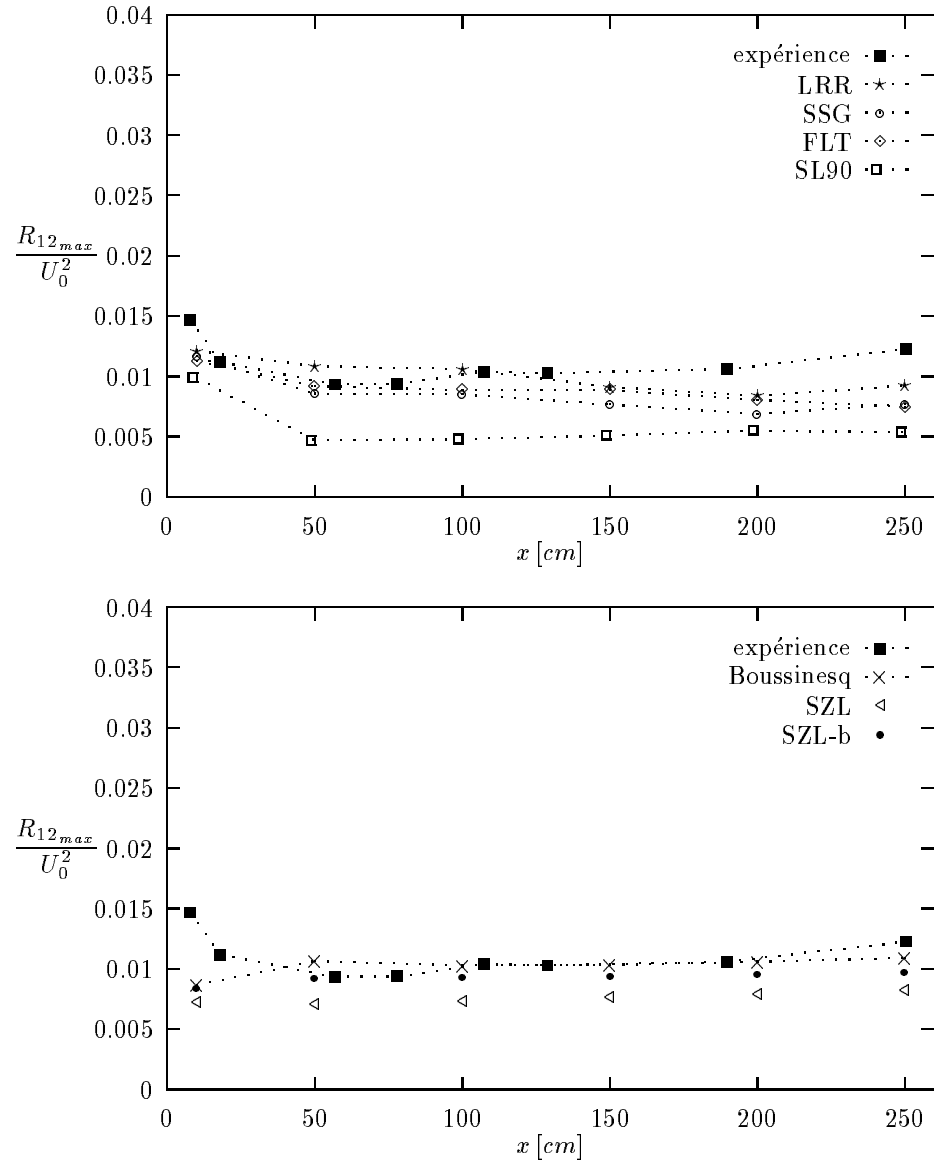


Fig. 4.6: L'évolution axiale des maxima de la contrainte turbulente.

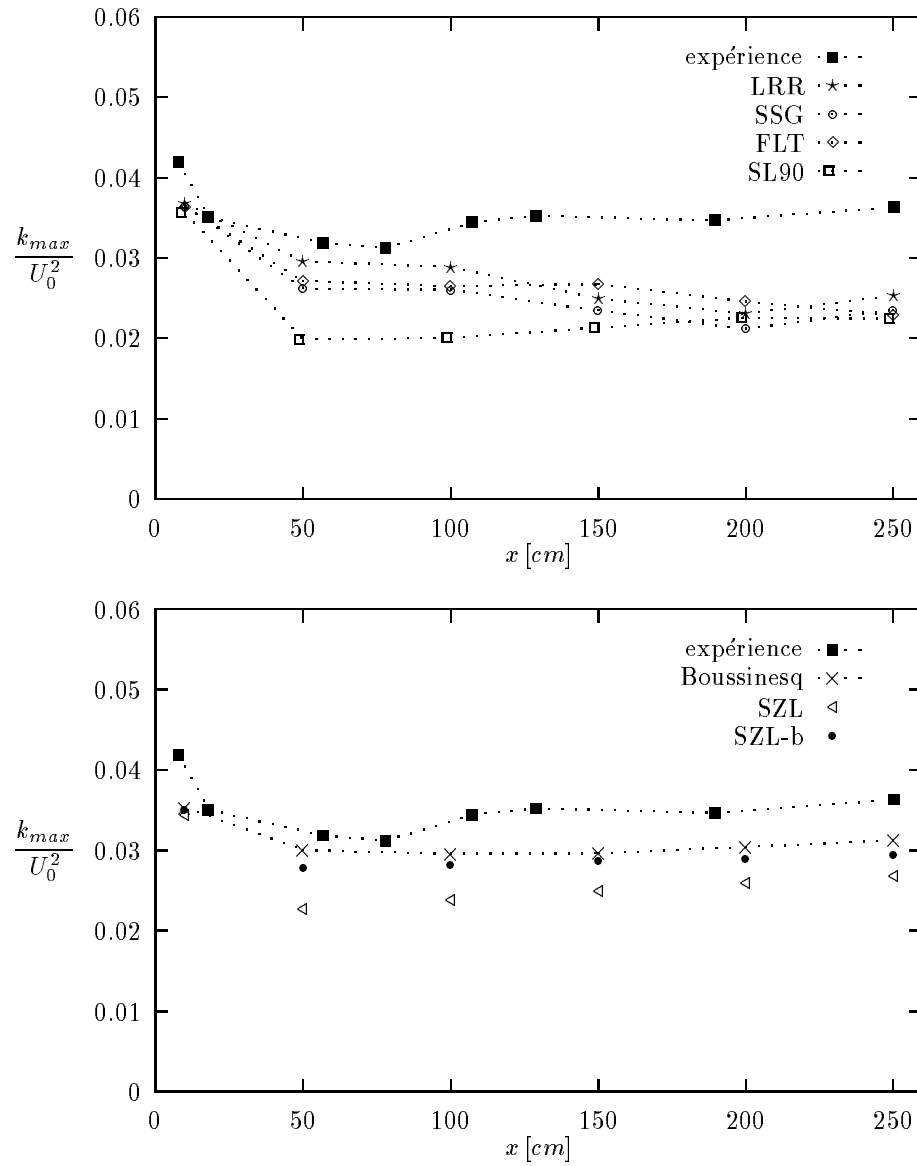


Fig. 4.7: L'évolution axiale des maxima de l'énergie cinétique turbulente.

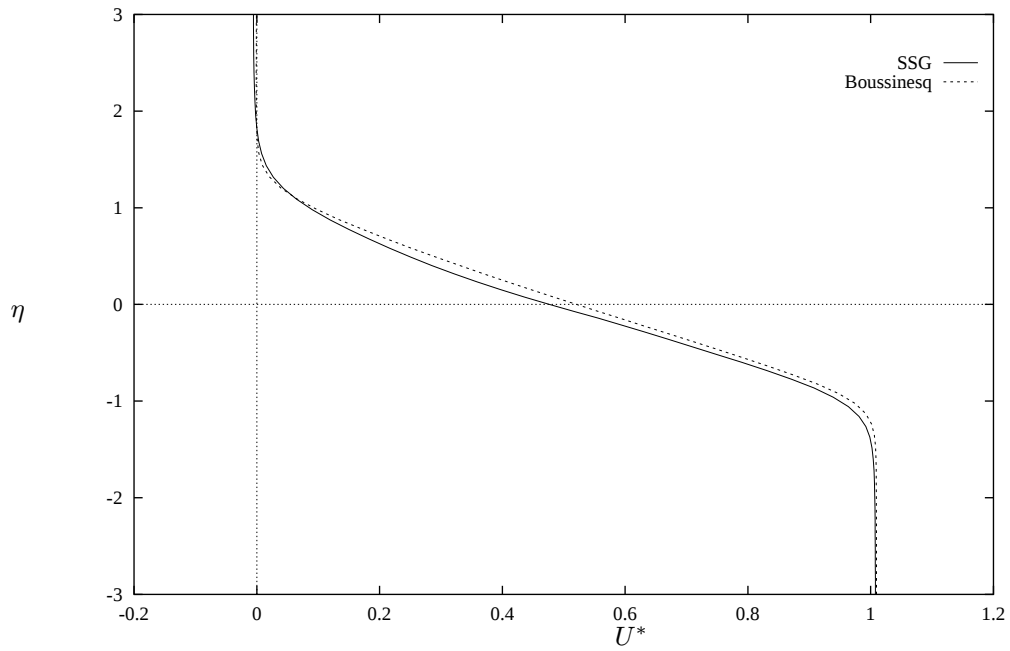


Fig. 4.8: Comparaison de la forme des profils de vitesse axiale avec un calcul avec la fermeture de second ordre (SSG) et une fermeture de premier ordre (Boussinesq).

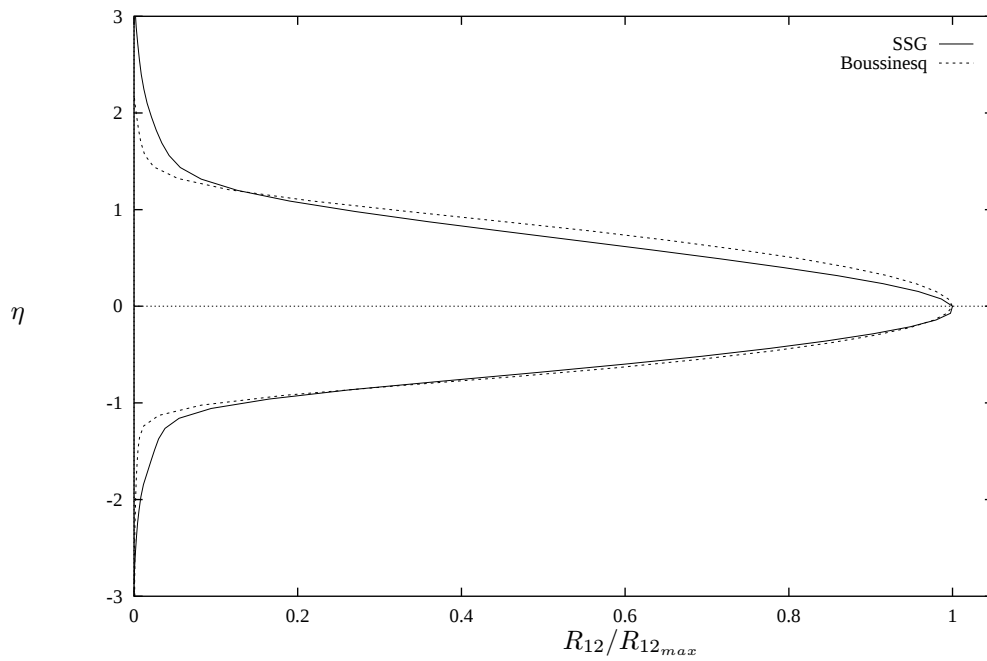


Fig. 4.9: Comparaison de la forme des profils de la contrainte de Reynolds normalisé avec un calcul avec la fermeture de second ordre (SSG) et une fermeture de premier ordre (Boussinesq).

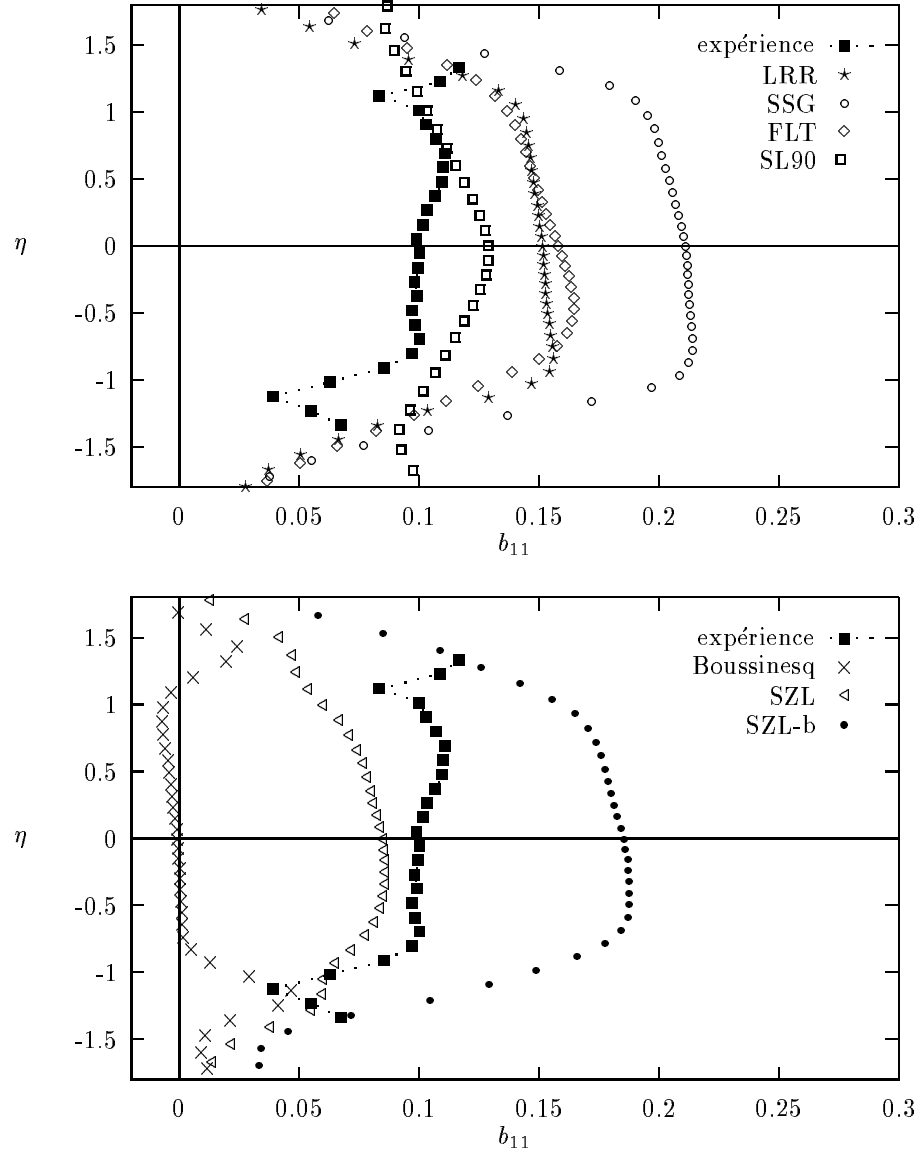


Fig. 4.10: Profils transversaux de la composante axiale b_{11} de l'anisotropie.

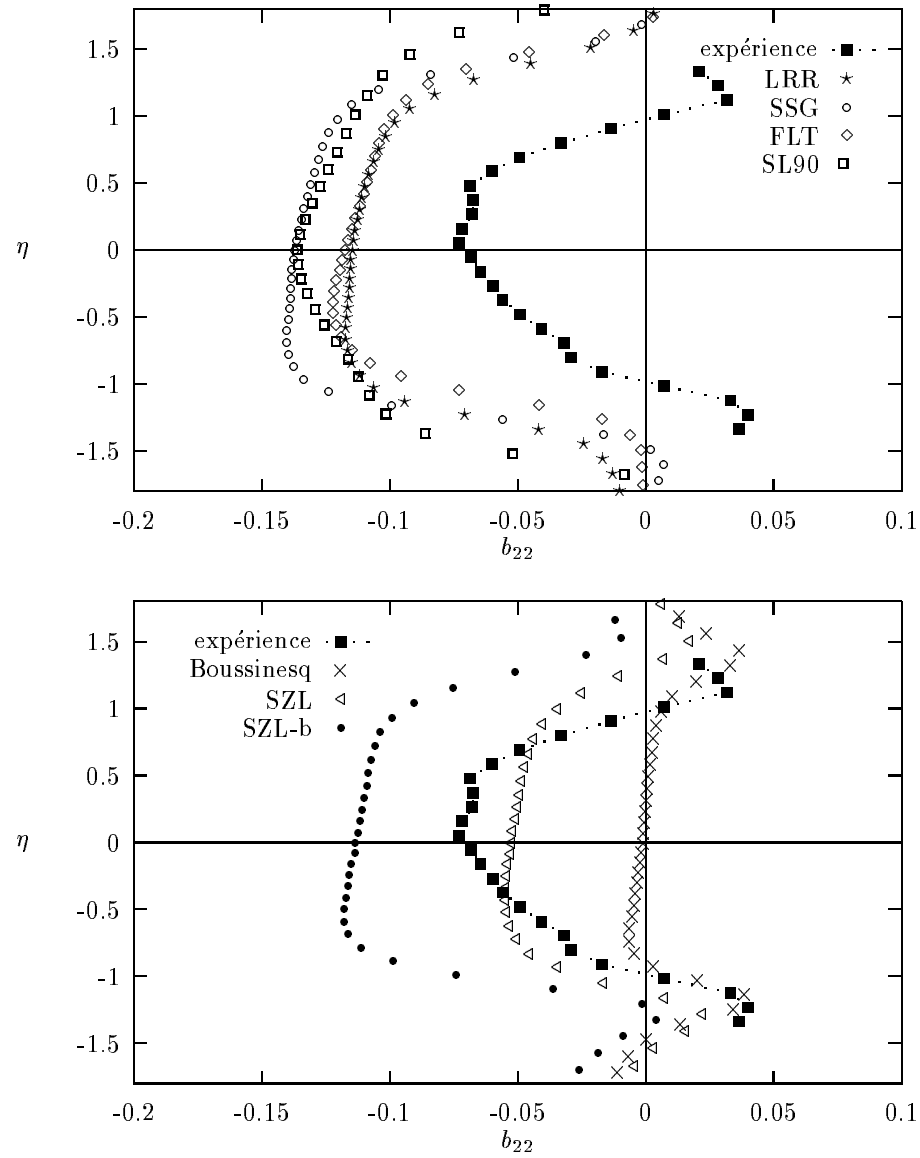


Fig. 4.11: Profils transversaux de la composante transversale b_{22} de l'anisotropie.

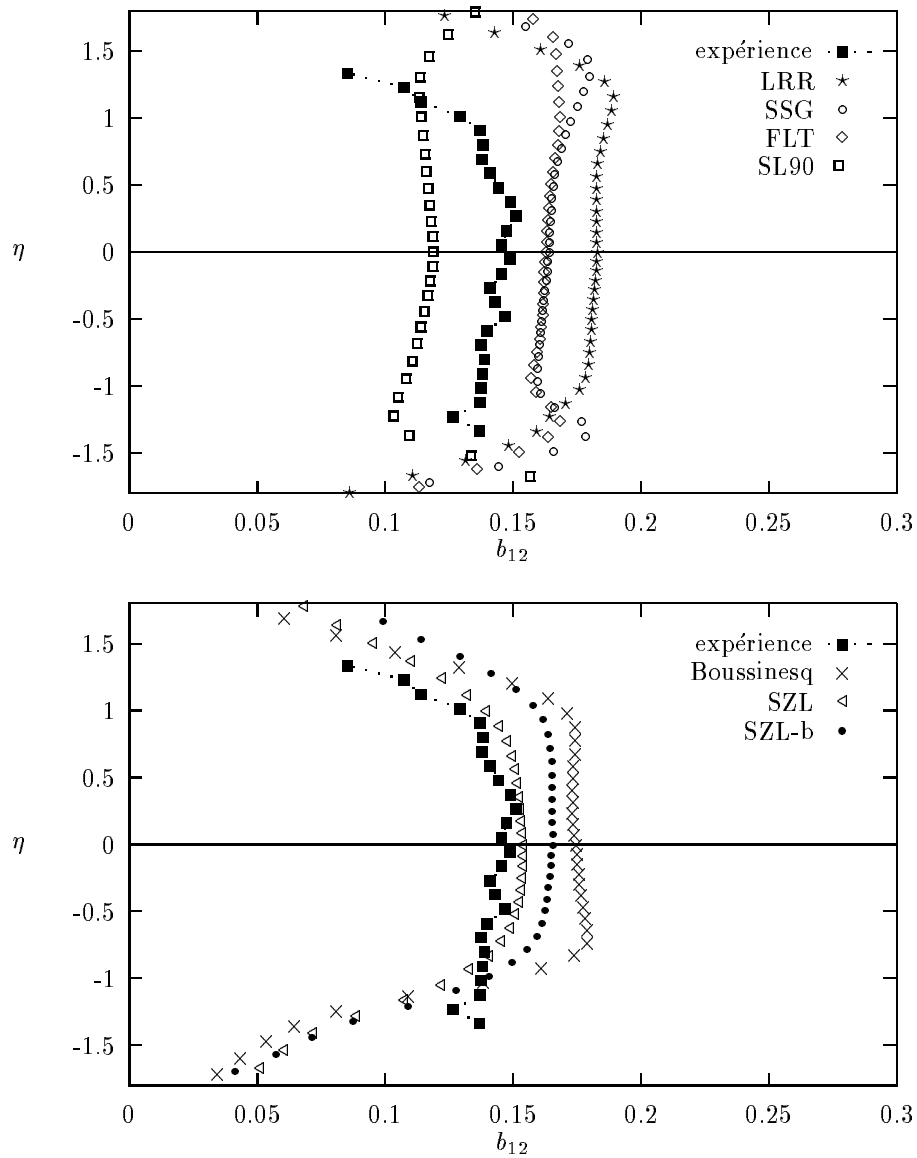


Fig. 4.12: Profils transversaux de la composante tangentielle b_{12} de l'anisotropie.

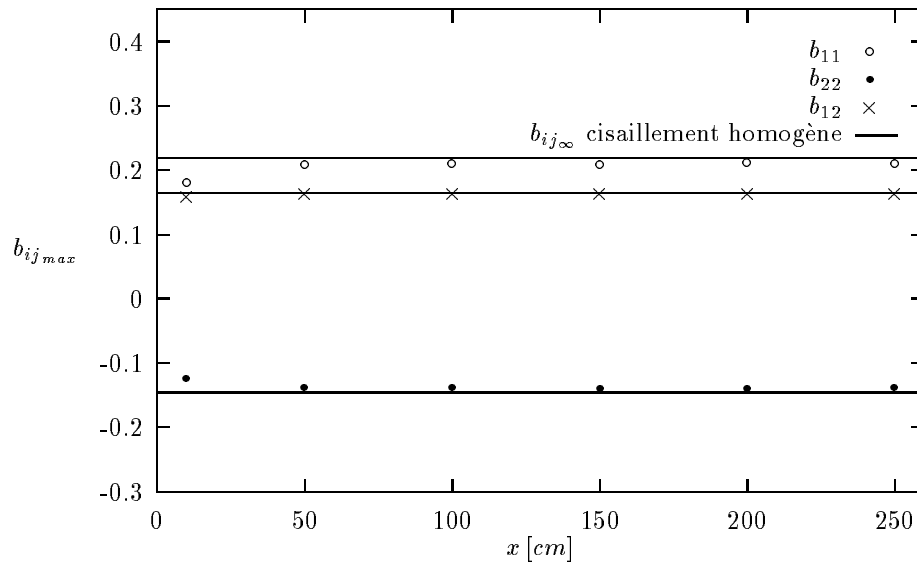


Fig. 4.13: L'évolution axiale des valeurs de l'anisotropie b_{ij} sur l'axe $y = 0$ de la couche de mélange obtenue par le calcul avec le modèle SSG. Les traits solides représentent les valeurs asymptotiques du modèle SSG dans un écoulement homogène cisailé.

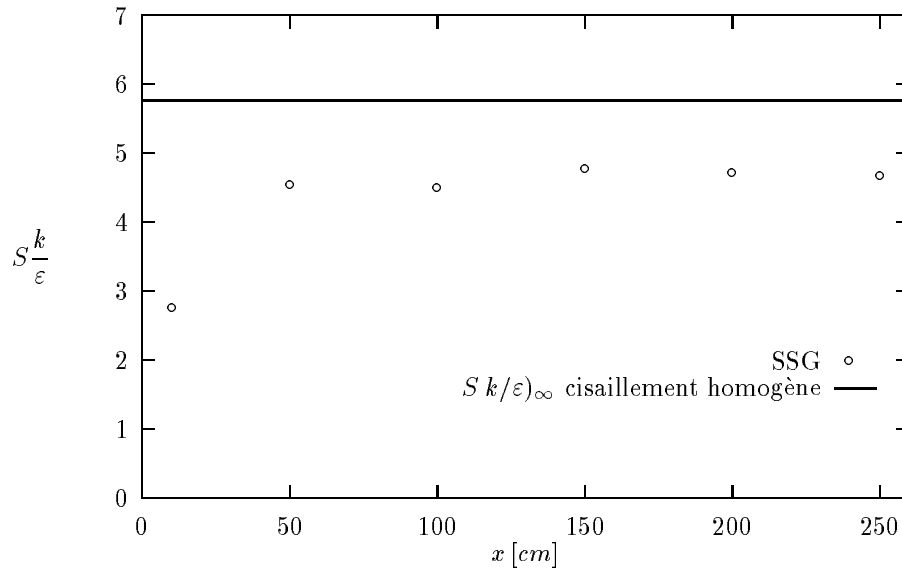


Fig. 4.14: L'évolution axiale du rapport des échelles du temps caractéristiques $S k/\varepsilon$ sur l'axe $y = 0$. Le trait solide représente la valeur asymptotique du modèle SSG dans un écoulement homogène cisailé.

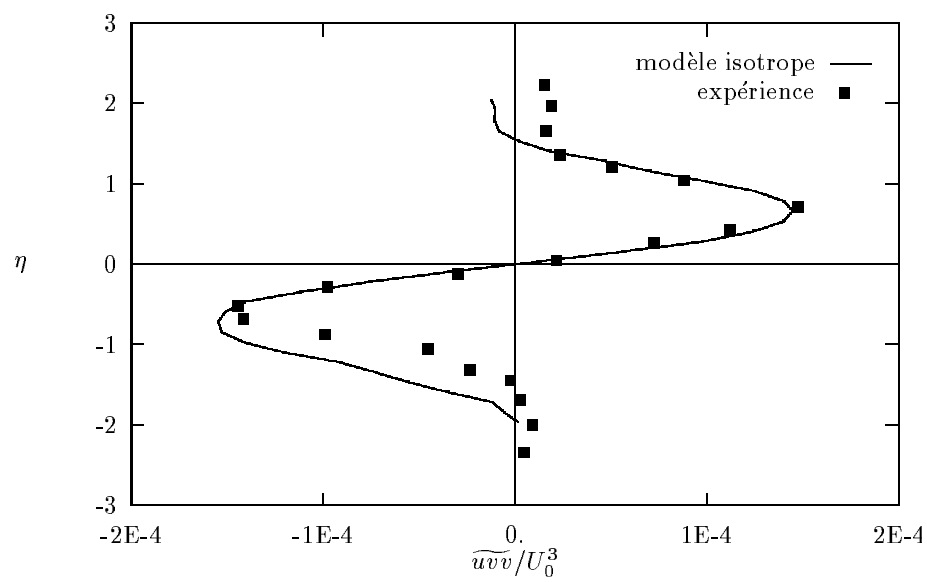


Fig. 4.15: Test a priori du modèle de diffusion isotrope (1.81) par rapport aux mesures de la corrélation $\widetilde{uvv}$.

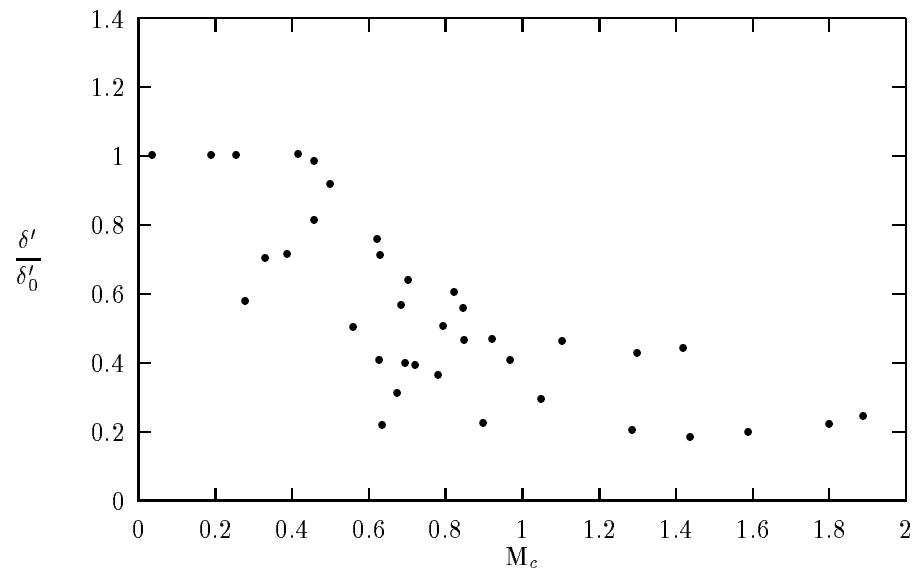


Fig. 4.16: La variation du taux de croissance d'une couche de mélange en fonction du nombre de Mach convectif: collection d'un grand nombre des mesures effectués par différents auteurs et considérés dans la base de données de Settles et Dodson [212].

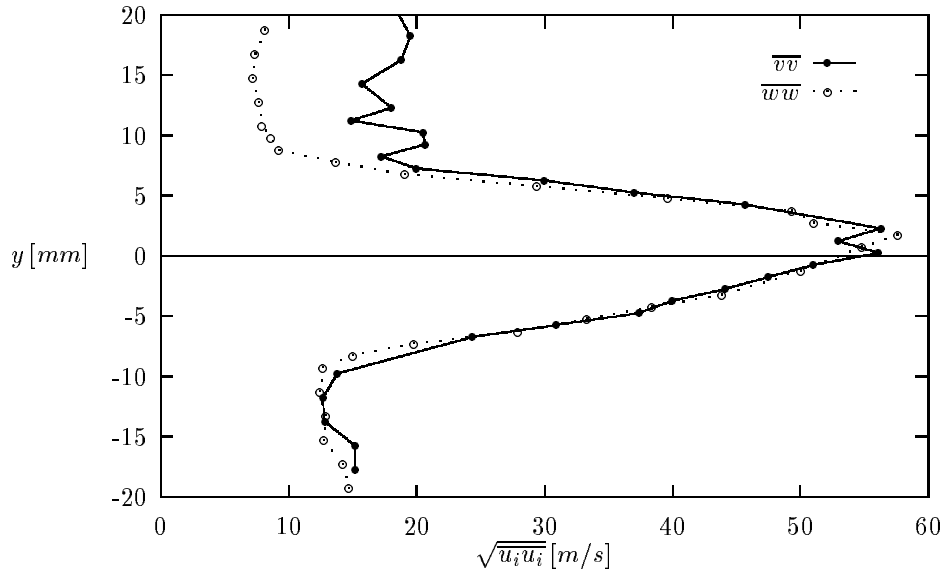


Fig. 4.17: Comparaison des profils des fluctuations de vitesse dans la troisième direction avec ceux dans la direction transversale d'une couche de mélange à haute vitesse relative étudié par Goebel et Dutton [11] ($M_c = 0.78$).

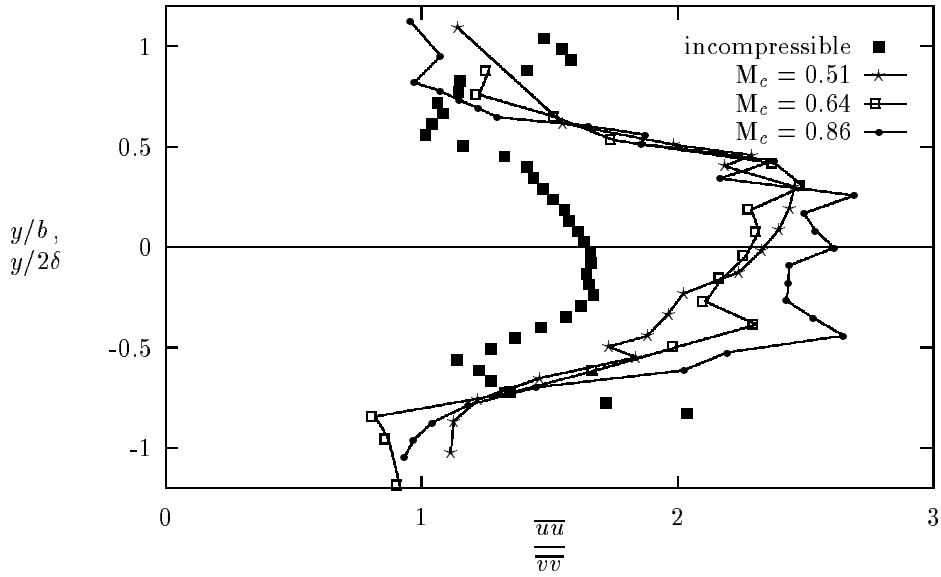


Fig. 4.18: Profils de l'anisotropie des composantes normales: mesures de Samimy et Elliott [10] à haute vitesse, Bell et Mehta [199] en régime incompressible.

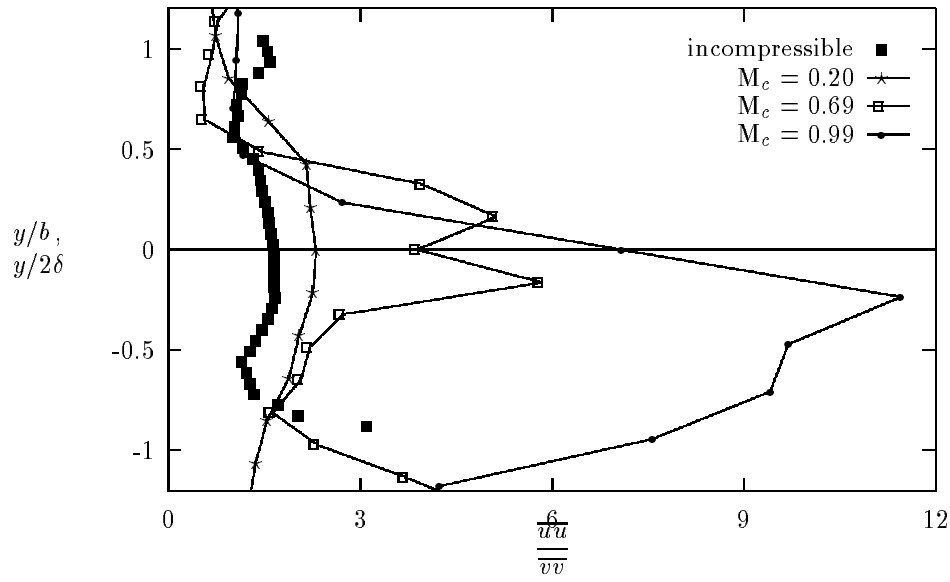


Fig. 4.19: Profils de l'anisotropie des composantes normales: mesures de Goebel et Dutton [11] à haute vitesse, Bell et Mehta [199] en régime incompressible.

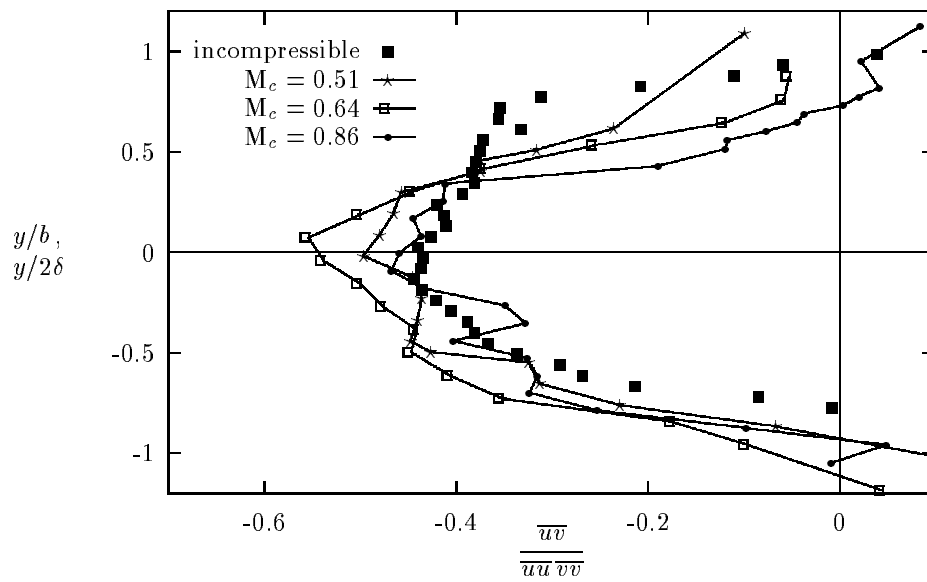


Fig. 4.20: Profils de l'anisotropie de la contrainte turbulente: mesures de Samimy et Elliott [10] à haute vitesse, Bell et Mehta [199] en régime incompressible.

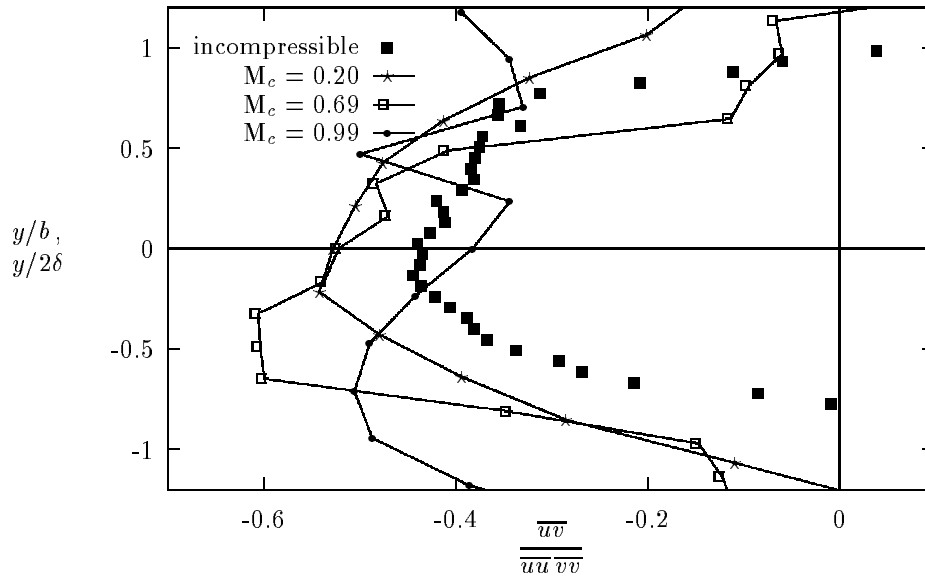


Fig. 4.21: Profils de l'anisotropie de la contrainte turbulente: mesures de Goebel et Dutton [11] à haute vitesse, Bell et Mehta [199] en régime incompressible.

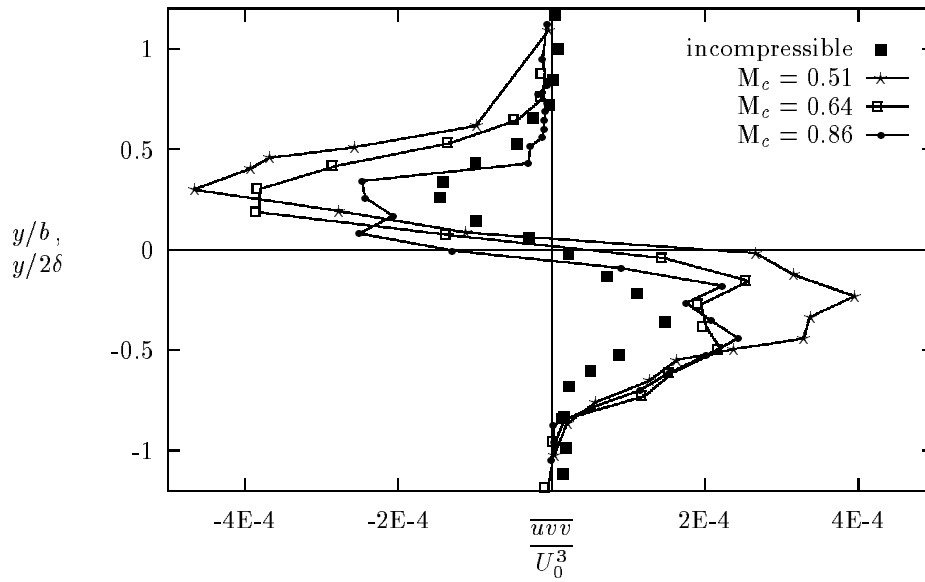


Fig. 4.22: Profils de la corrélation triple représentant le transport transversal de la contrainte turbulente: mesures de Samimy et Elliott [11] à haute vitesse, Bell et Mehta [199] en régime incompressible.

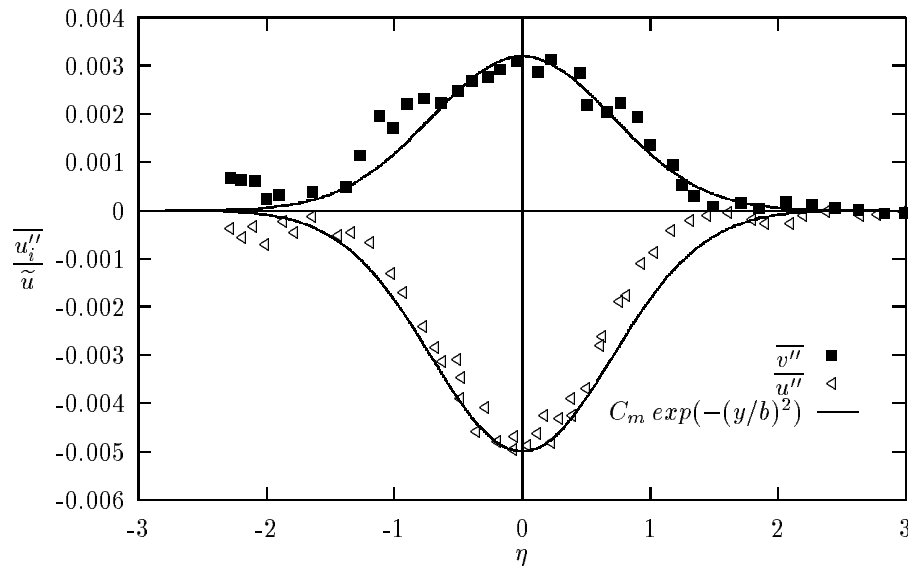


Fig. 4.23: Le flux de masse normalisée par la vitesse moyenne de Favre, mesuré par Bowersox et Schetz [93]. Le trait solide représente une fonction exponentielle $f(\eta) = C_m \exp(-\eta^2)$, où C_m est la valeur maximale de l'expérience.

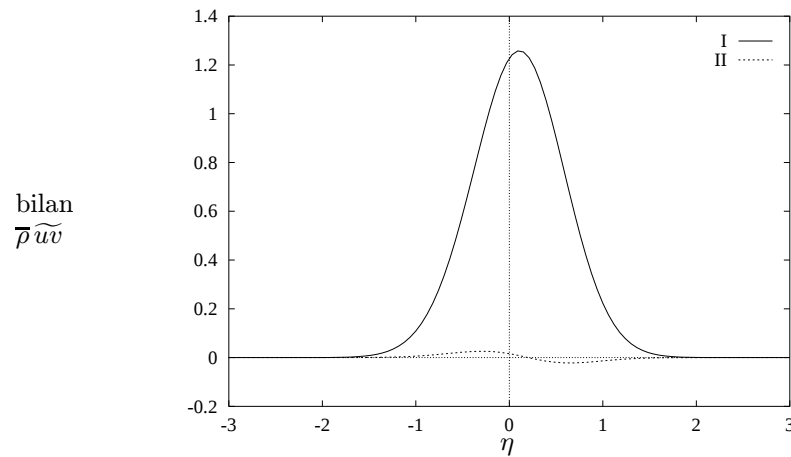


Fig. 4.24: Comparaison d'ordre de grandeur des termes dans l'équation de transport de la tension $\widehat{\overline{\rho uv}}$, normalisés par $U_0^3 \rho_0 / (\delta \sqrt{\pi})$. I : terme de production $-P_{12}$; II: terme de source $-\overline{u''} \overline{p}_{,y}$.

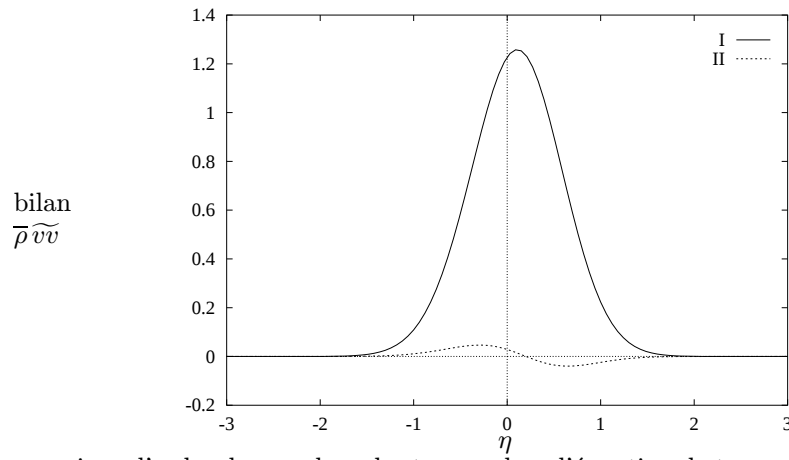


Fig. 4.25: Comparaison d'ordre de grandeur des termes dans l'équation de transport de la tension $\overline{\rho \widetilde{vv}}$. I : terme de dissipation $2/3\overline{\rho \varepsilon}$; II: terme de source $-(\overline{v''} \overline{p}_{,y} / 2)$.

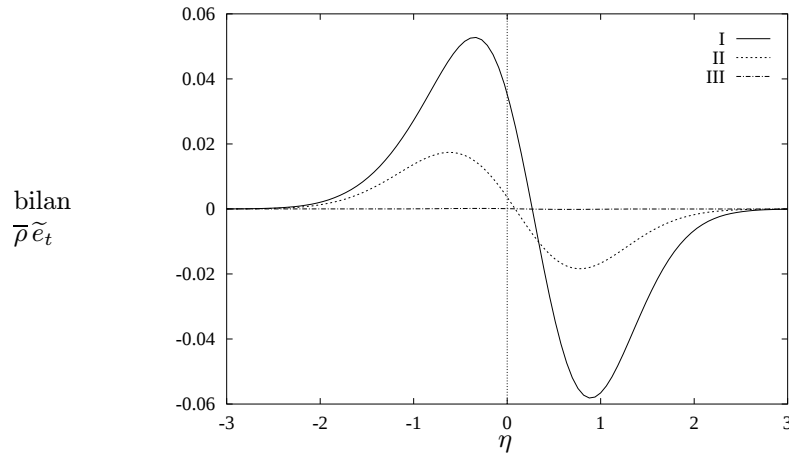


Fig. 4.26: Comparaison d'ordre de grandeur des termes dans l'équation de transport de l'énergie totale $\overline{\rho \widetilde{e}_t}$. I : terme de dissipation visqueuse $(\overline{\rho \widetilde{u} \widetilde{uv}})_{,y}$; II: terme lié au gradient du flux de masse turbulent $\overline{\rho v''}_{,y}$; III: terme lié au gradient de pression $\overline{p}_{,y} v''$.

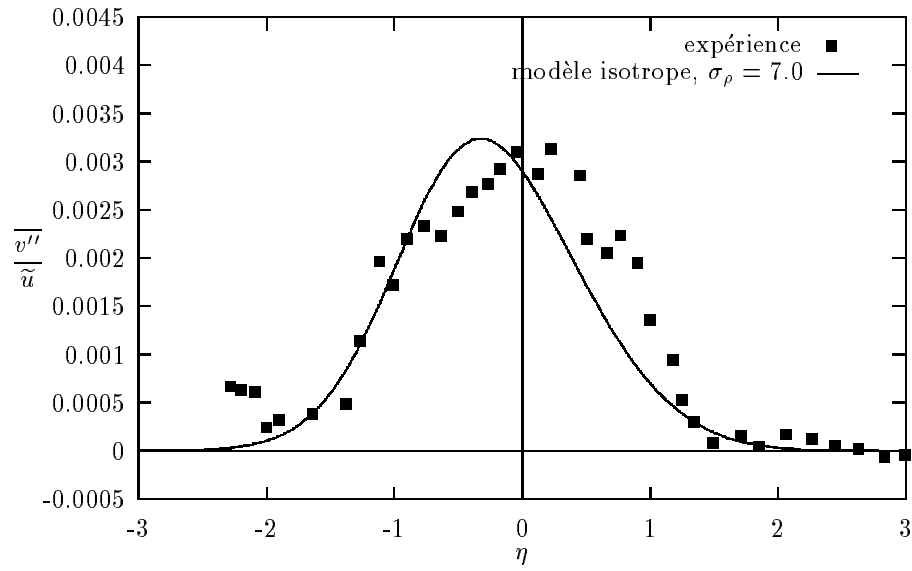


Fig. 4.27: Estimation de la composante transversale du flux de masse turbulent par le modèle isotrope avec $\sigma_\rho = 7.0$.

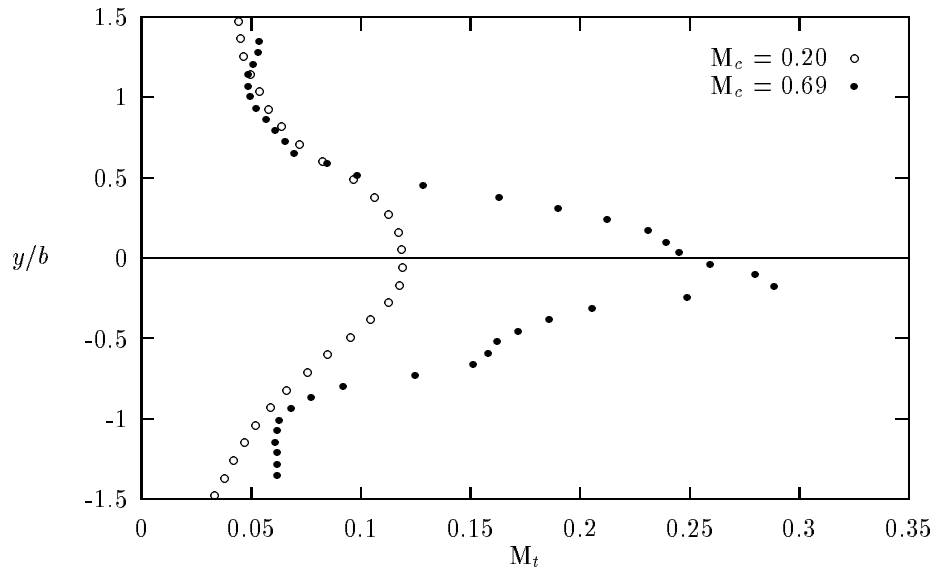


Fig. 4.28: Estimation du profil du nombre de Mach turbulent $M_t \equiv \sqrt{2k}/c$ dans la région d'équilibre de la couche de mélange de Goebel et Dutton [11]. L'énergie cinétique turbulente a été estimée par l'approximation $k = (\overline{uu} + 2\overline{vv})/2$. La valeur de la densité a été reconstruite en supposant une température totale constante.

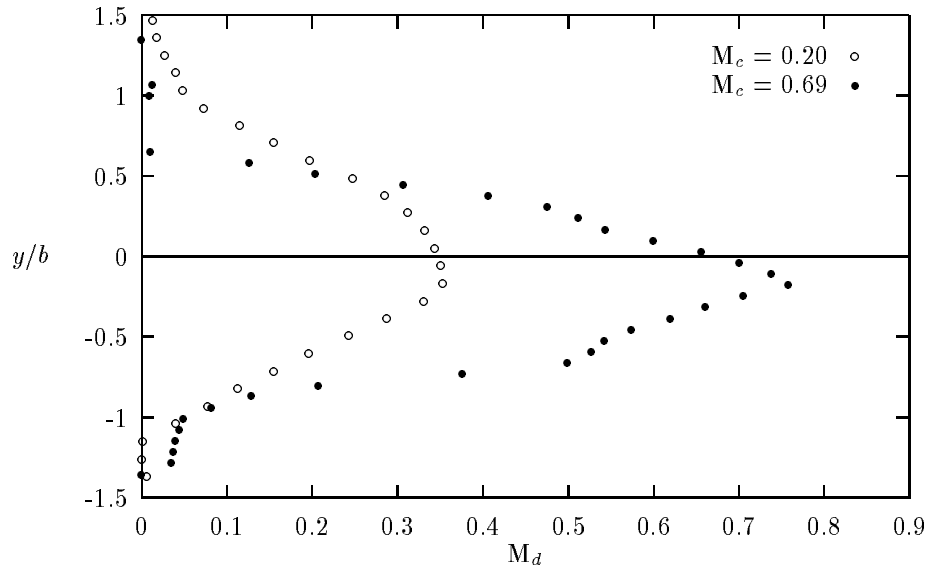


Fig. 4.29: Estimation du profil du nombre de Mach de déformation $M_d \equiv S k^{3/2}/(\varepsilon c)$ dans la région d'équilibre de la couche de mélange de Goebel et Dutton [11]. En plus des hypothèses utilisées pour estimer le nombre de Mach turbulent M_t (figure 4.28), la valeur de la dissipation a été reconstruite par l'hypothèse de Boussinesq.

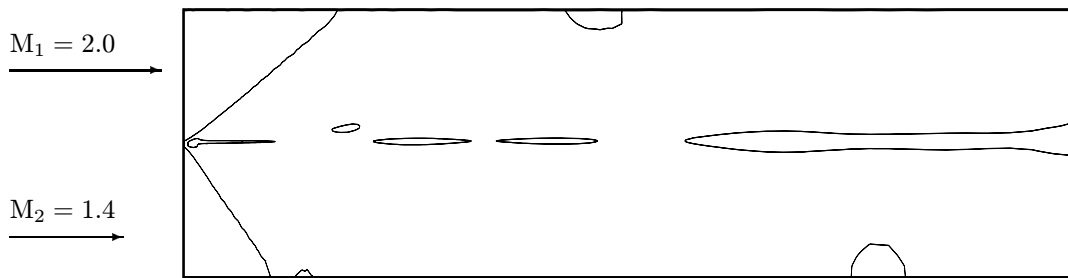


Fig. 4.30: Lignes d'isovaleur de la pression relative $\bar{p}/p_{ref}$ du calcul de la couche de mélange correspondant au cas 1 de l'expérience de Goebel et Dutton, configuration supersonique-supersonique. Les variations sont faibles avec $0.99 < \bar{p}/p_{ref} < 1.00$.

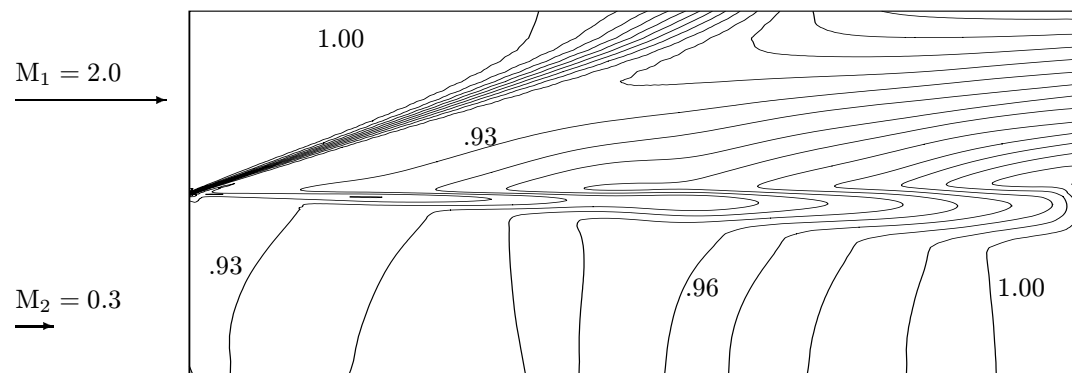


Fig. 4.31: Lignes d'isovaleur de la pression relative $\bar{p}/p_{ref}$ du calcul de la couche de mélange correspondant au cas 3 de l'expérience de Goebel et Dutton, configuration supersonique-subsonique. Le maximum est de $\bar{p}/p_{ref} = 1.02$, le minimum $\bar{p}/p_{ref} = 0.90$. L'onde de détente dans la partie supersonique de l'écoulement ainsi que la dépression sur l'axe de la région de mélange et le gradient axial positif dans le courant subsonique sont visibles.

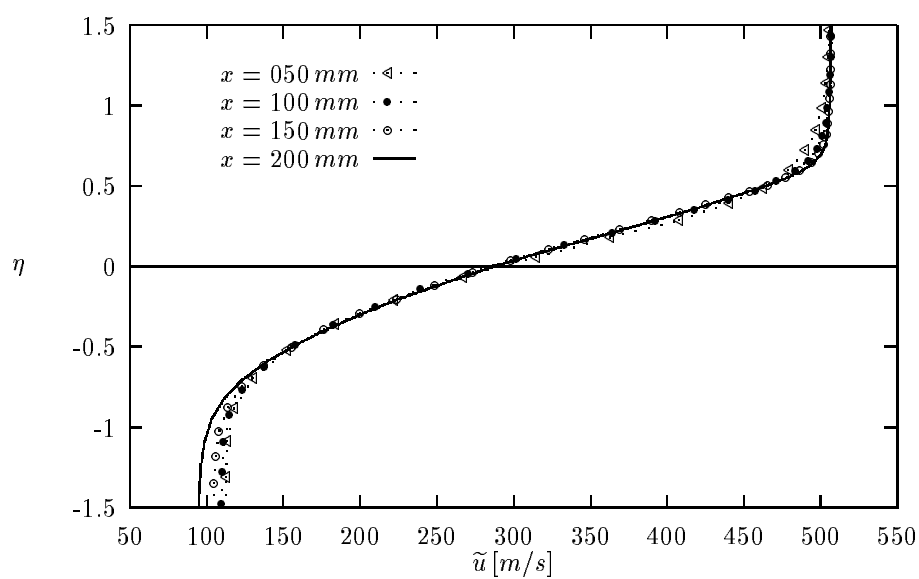


Fig. 4.32: Profils transversaux de la vitesse axiale moyenne à plusieurs sections successives correspondant au cas 3 de l'étude de Goebel et Dutton. Résultats obtenus par le calcul avec le modèle SSG.

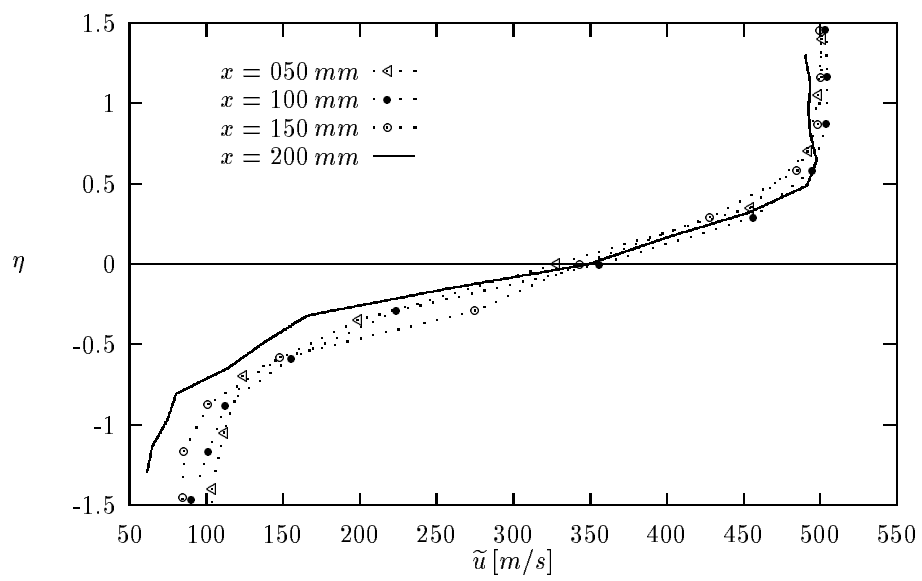


Fig. 4.33: Profils transversaux de la vitesse axiale moyenne à plusieurs sections successives du cas 3. Mesures de Goebel et Dutton.

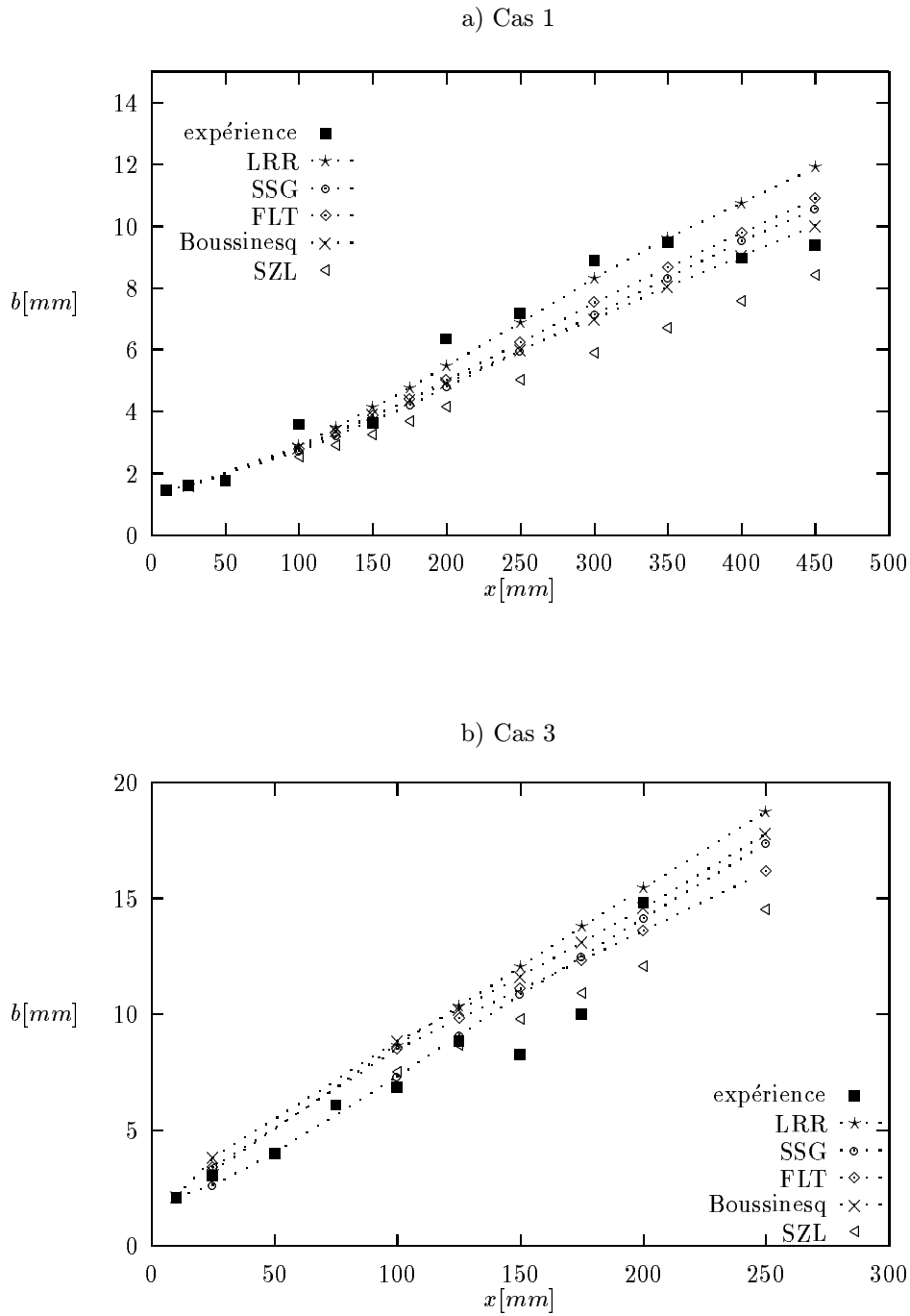


Fig. 4.34: Croissance spatiale de la couche de mélange dans les deux cas de l'étude de Goebel et Dutton: comparaison entre mesures et résultats des calculs numériques.

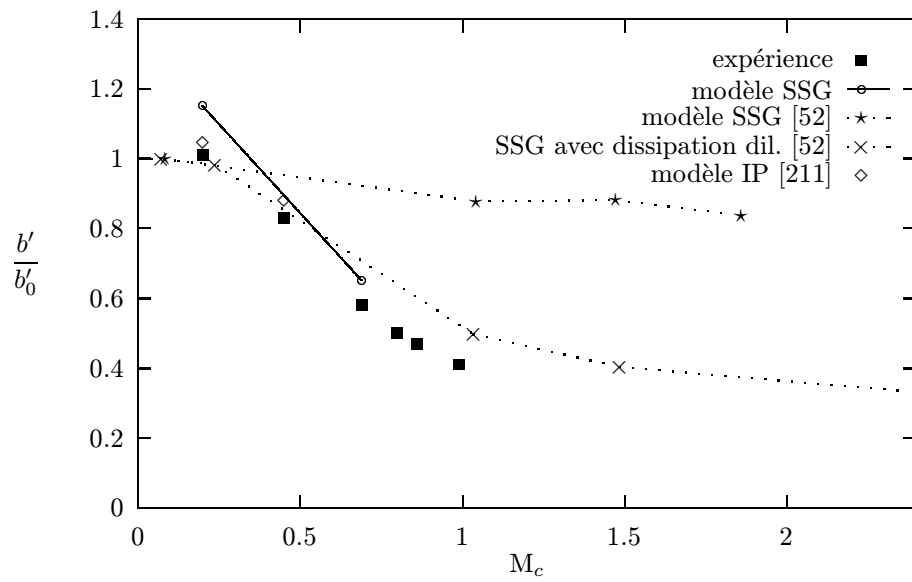


Fig. 4.35: Taux d'épanouissement relatif en fonction du nombre de Mach convectif: comparaison entre nos résultats avec le modèle SSG et ceux d'autres auteurs avec et sans termes explicites de compressibilité.

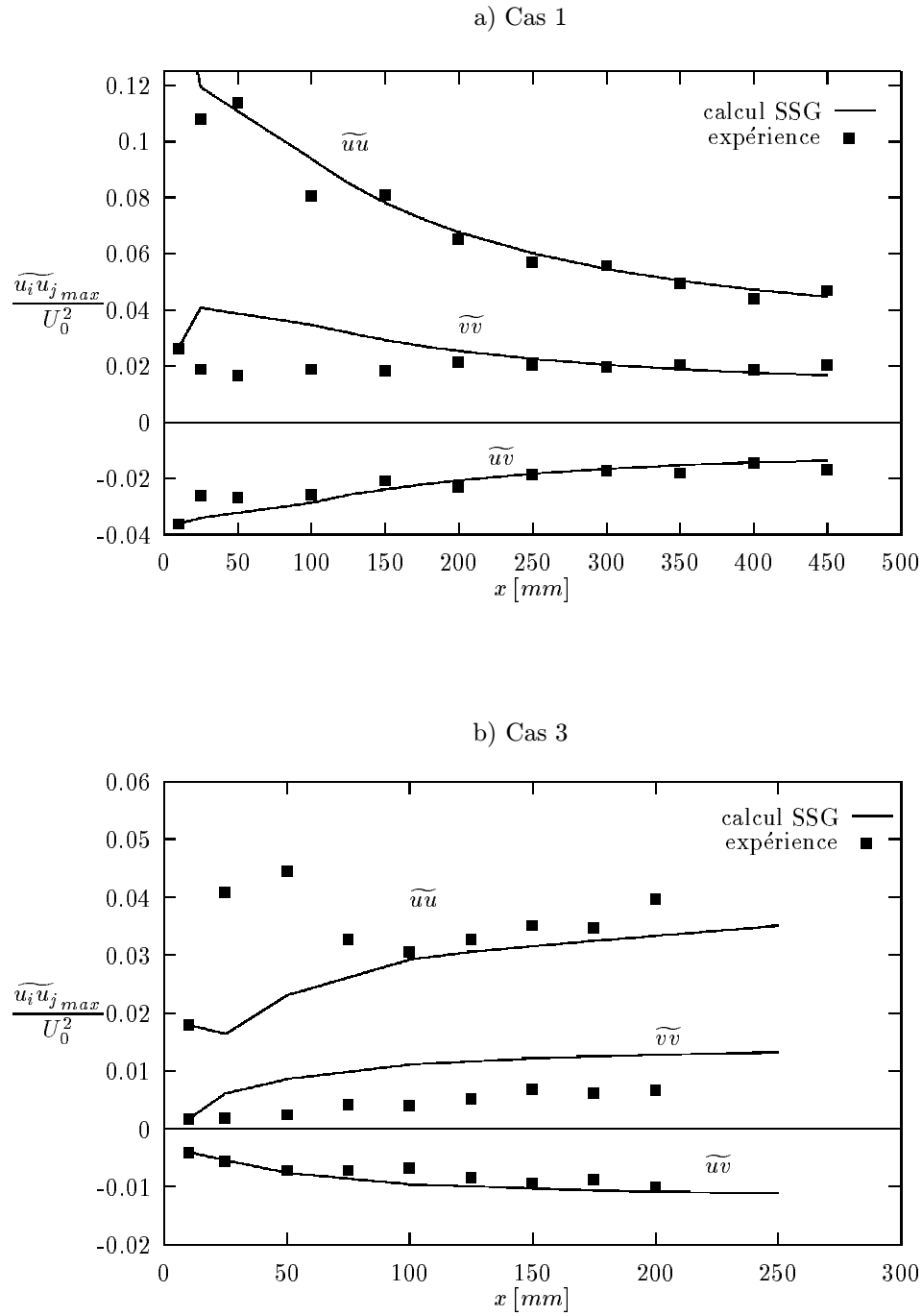


Fig. 4.36: Evolution axiale des maxima des composantes de la tension de Reynolds dans les deux cas étudiés: comparaison entre les mesures de Goebel et Dutton et les résultats obtenus par le calcul avec le modèle SSG.

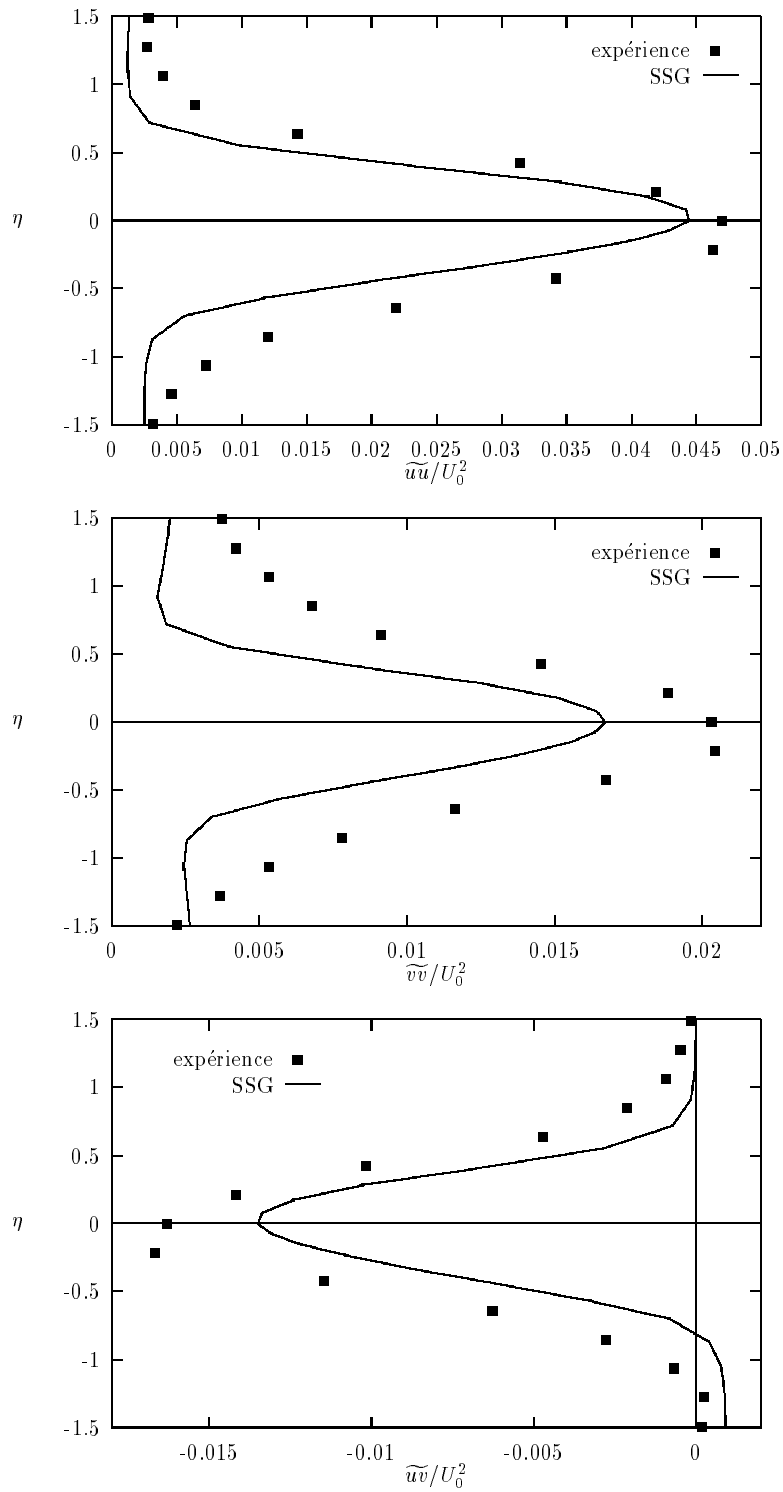


Fig. 4.37: Profils des composantes de la tension de Reynolds du cas 1 de la couche de mélange de Goebel et Dutton dans la section à $x = 450\text{ mm}$. Comparaison entre les mesures et les résultats obtenus par le calcul avec le modèle SSG.

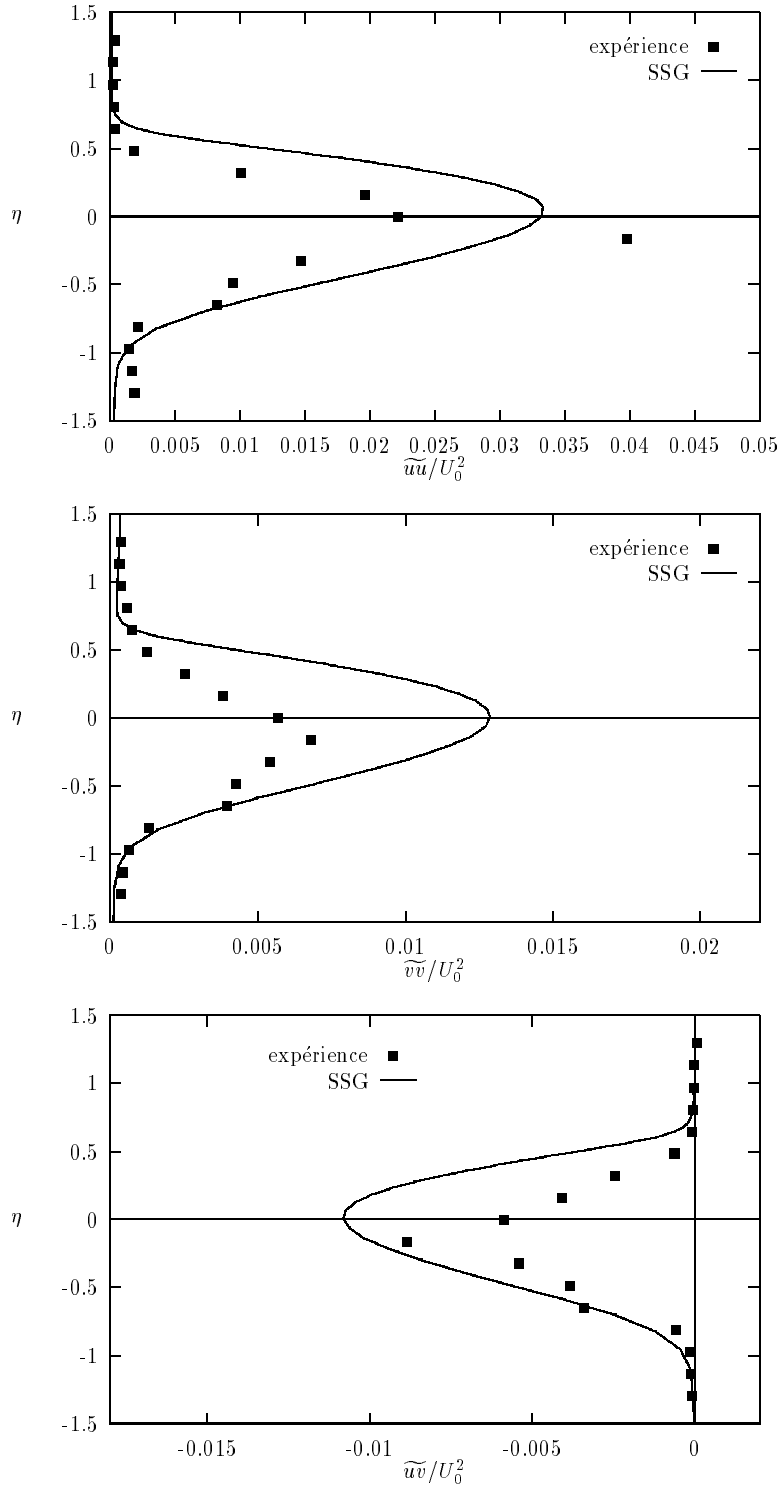


Fig. 4.38: Profils des composantes de la tension de Reynolds du cas 3 de la couche de mélange de Goebel et Dutton dans la section à $x = 200\text{ mm}$. Comparaison entre les mesures et les résultats obtenus par le calcul avec le modèle SSG.

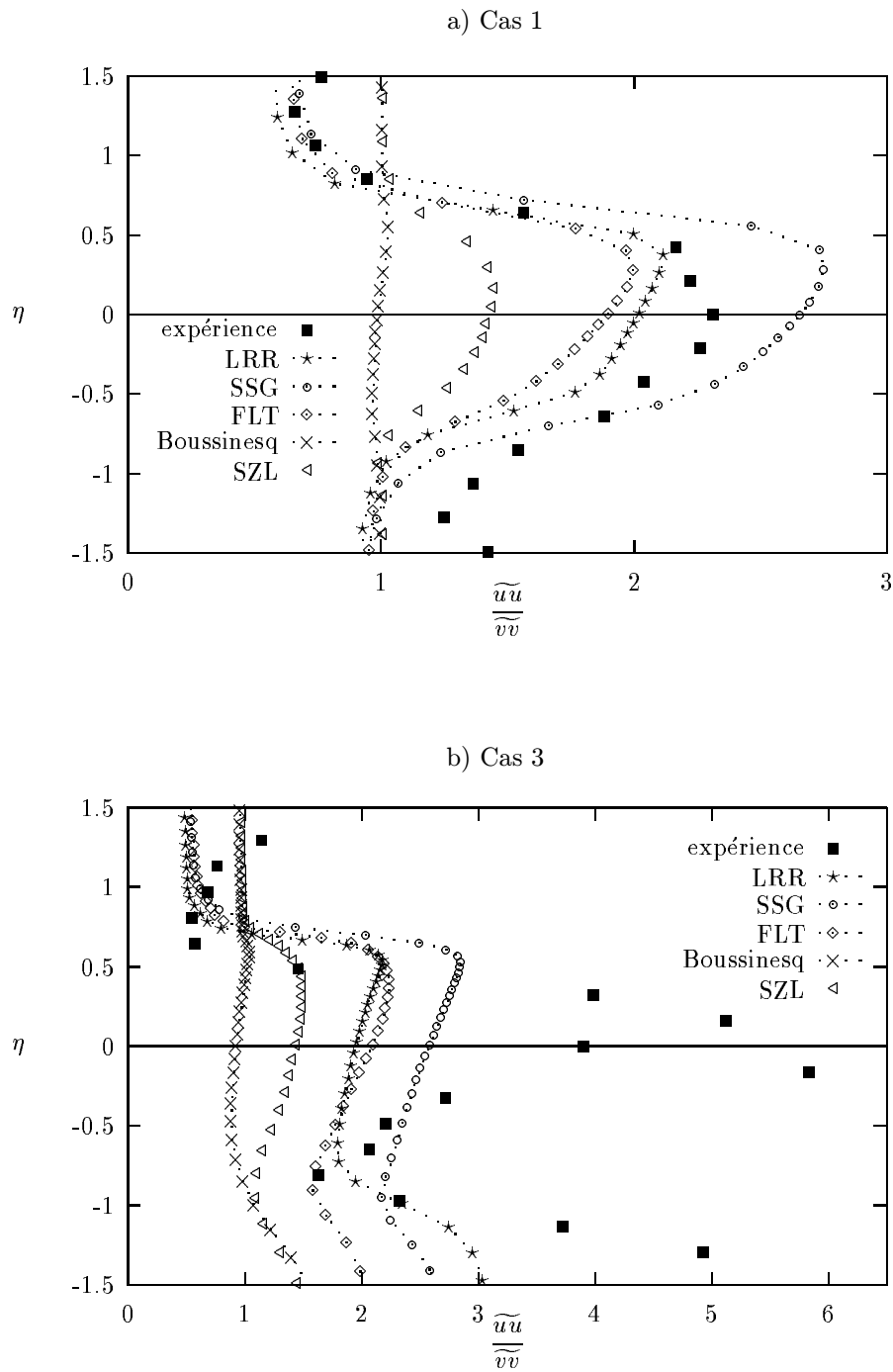


Fig. 4.39: Profils de l'anisotropie des composantes normales $\widetilde{uu}/\widetilde{vv}$ dans les deux cas de l'étude de Goebel et Dutton. Comparaison des mesures et des résultats des calculs numériques.

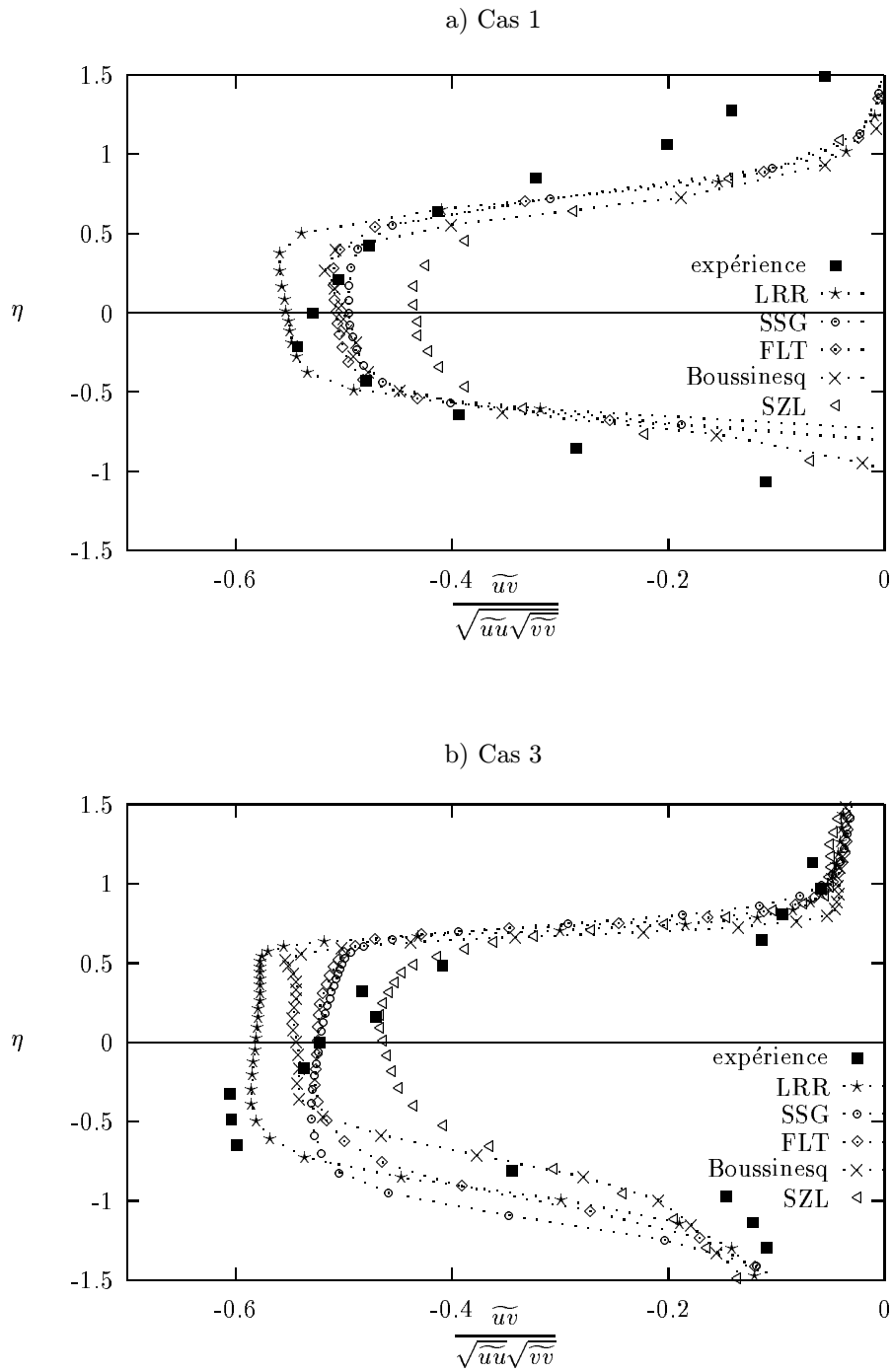


Fig. 4.40: Profils de l'anisotropie de la contrainte tangentielle $\widetilde{uv}/(\sqrt{\widetilde{uu}}\sqrt{\widetilde{vv}})$ dans les deux cas de l'étude de Goebel et Dutton. Comparaison des mesures et des résultats des calculs numériques.

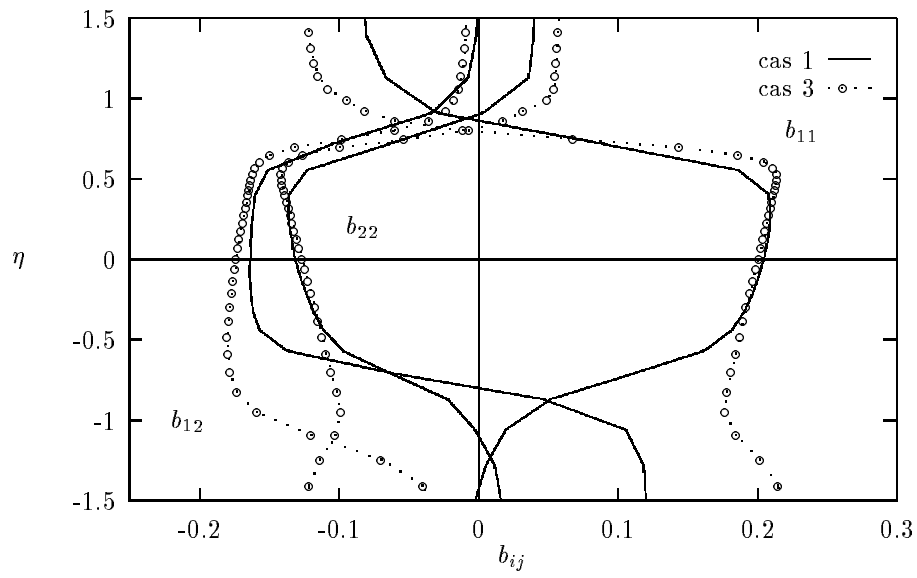


Fig. 4.41: Les profils de l'anisotropie b_{ij} obtenus par le calcul avec le modèle SSG dans les deux cas de la couche de mélange.

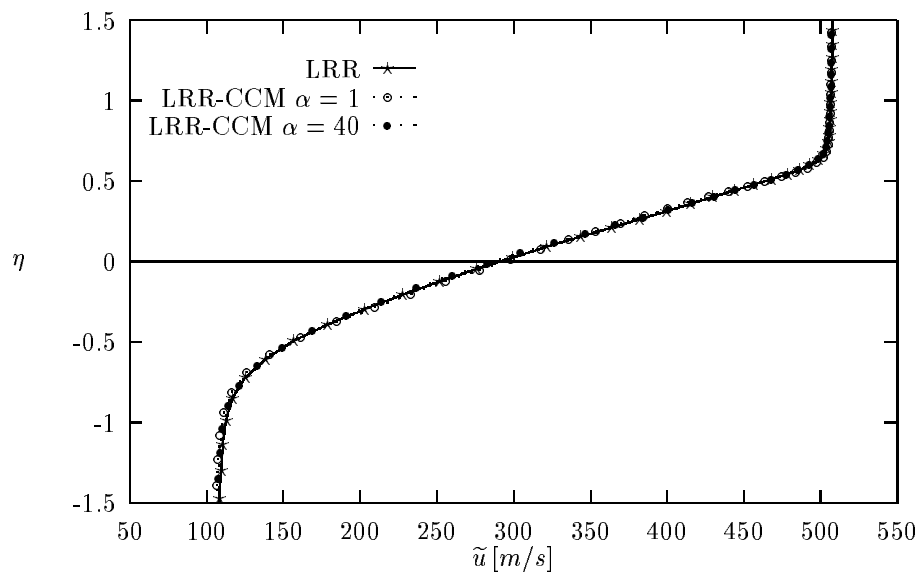


Fig. 4.42: Similitude des profils de la vitesse moyenne axiale obtenue par le calcul avec la modification du modèle de pression-déformation LRR-CCM par rapport au modèle de base LRR. Les conditions du calcul correspondent au cas 3 de Goebel et Dutton.

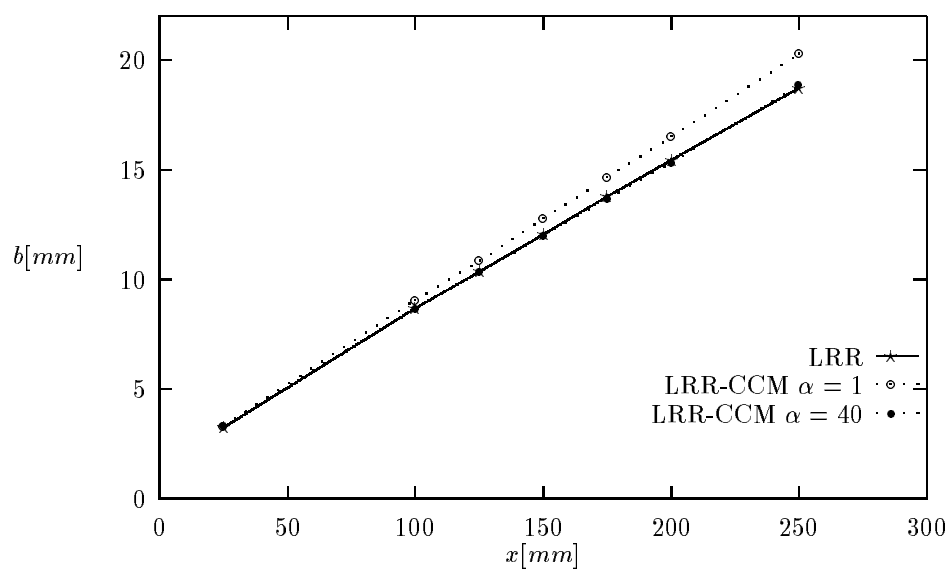


Fig. 4.43: La croissance spatiale de la couche de mélange obtenue en utilisant le modèle LRR-CCM à différentes valeurs de la constante α .

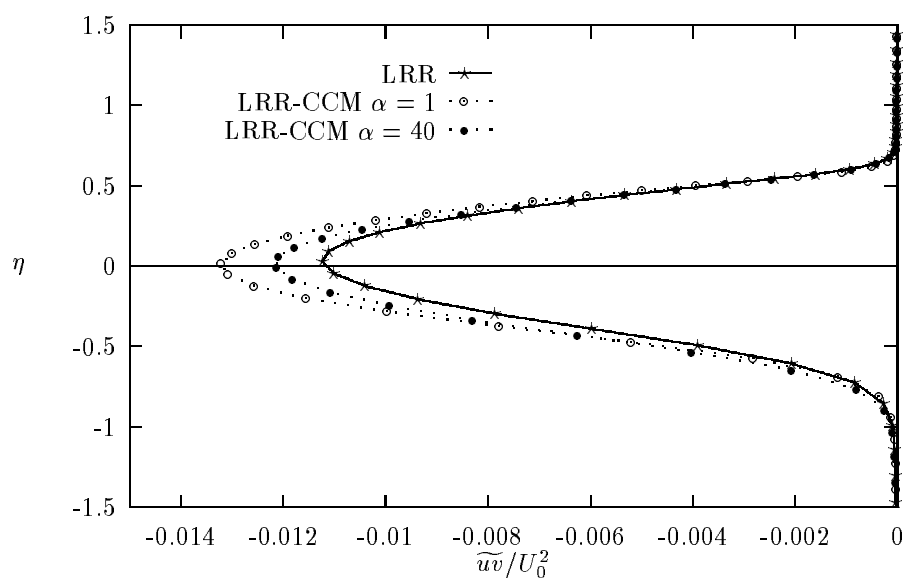


Fig. 4.44: Comparaison des profils de la contrainte tangentielle obtenus selon la valeur de la constante α du modèle LRR-CCM.

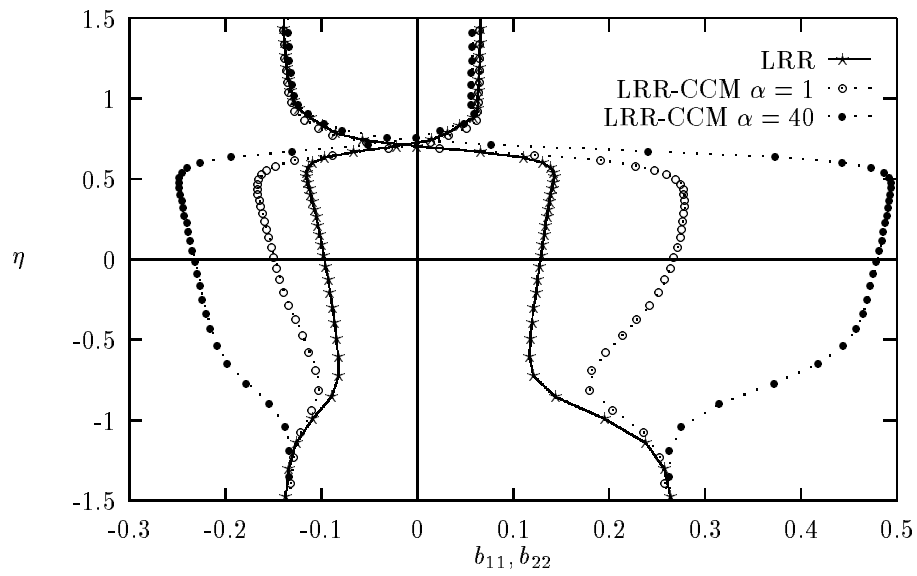


Fig. 4.45: L'influence du modèle LRR-CCM sur les profils des composantes normales de l'anisotropie .

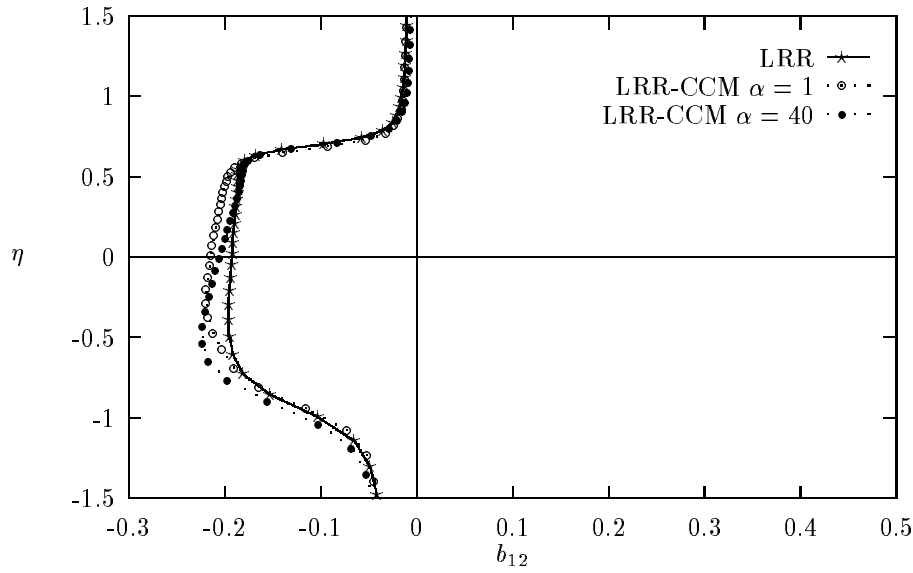


Fig. 4.46: L'influence du modèle LRR-CCM sur les profils de la composante tangentielle de l'anisotropie .

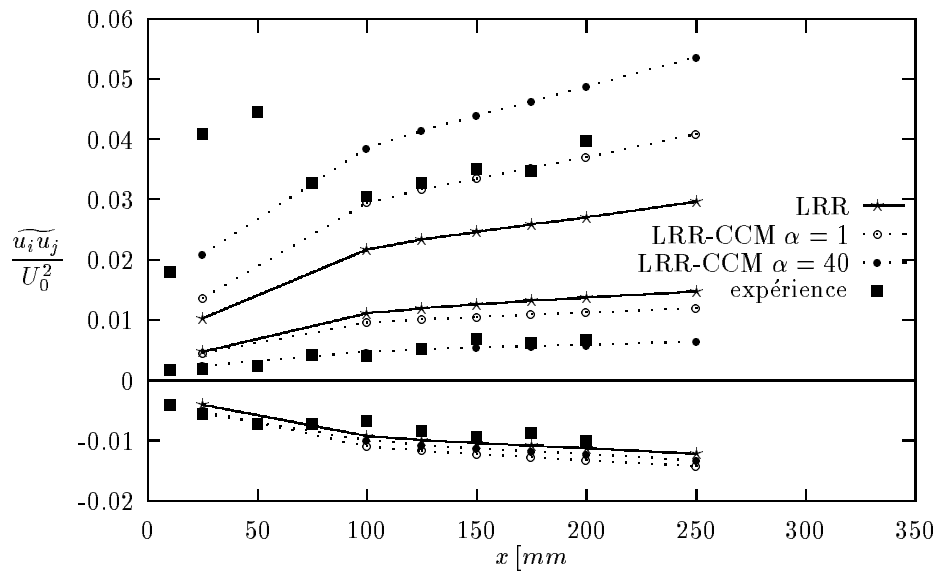


Fig. 4.47: Evolution longitudinale des maxima des composantes de la tension turbulente: comparaison entre les mesures et les résultats des calculs avec le modèle LRR-CCM.

Figures: Etude des écoulements pariétaux

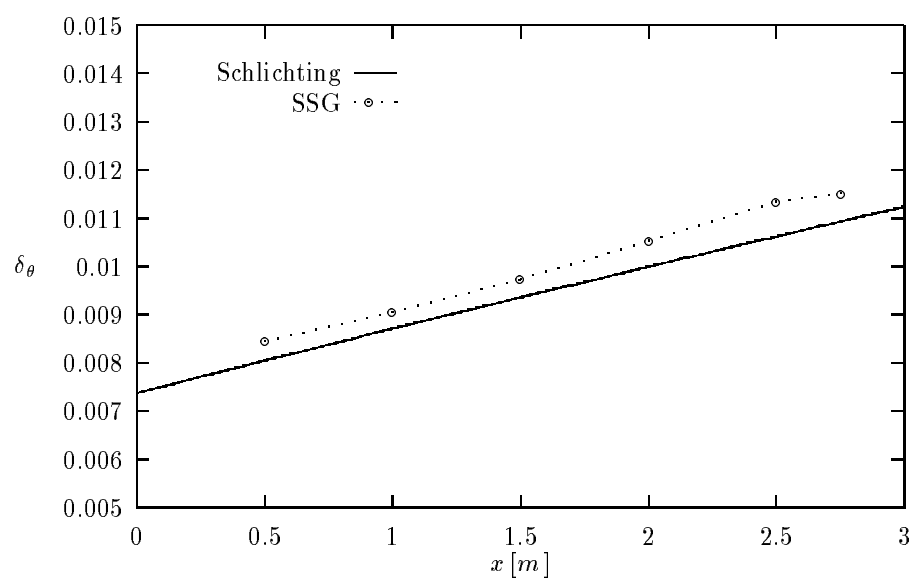


Fig. 5.5: Evolution de l'épaisseur de quantité de mouvement d'une couche limite se développant à $Re_\theta \approx 7000$.

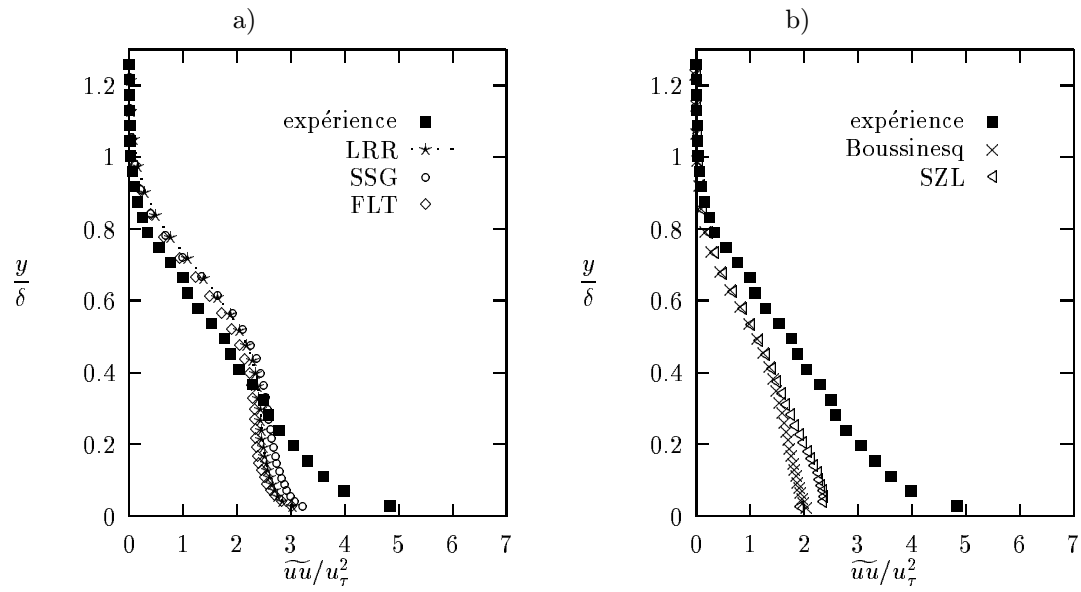


Fig. 5.6: Profils transversaux de la tension longitudinale selon le modèle utilisé: a) résultats des calculs avec différentes fermetures au second ordre, b) modèles de fermeture au premier ordre.

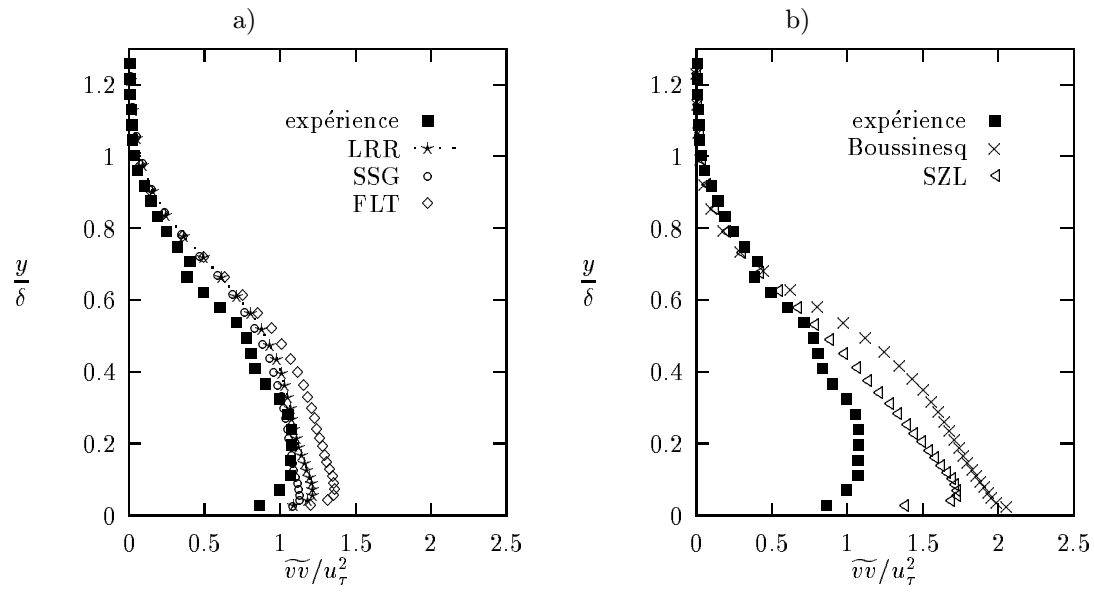


Fig. 5.7: Profils transversaux de la tension normale selon le modèle utilisé: a) résultats des calculs avec différentes fermetures au second ordre, b) modèles de fermeture au premier ordre.

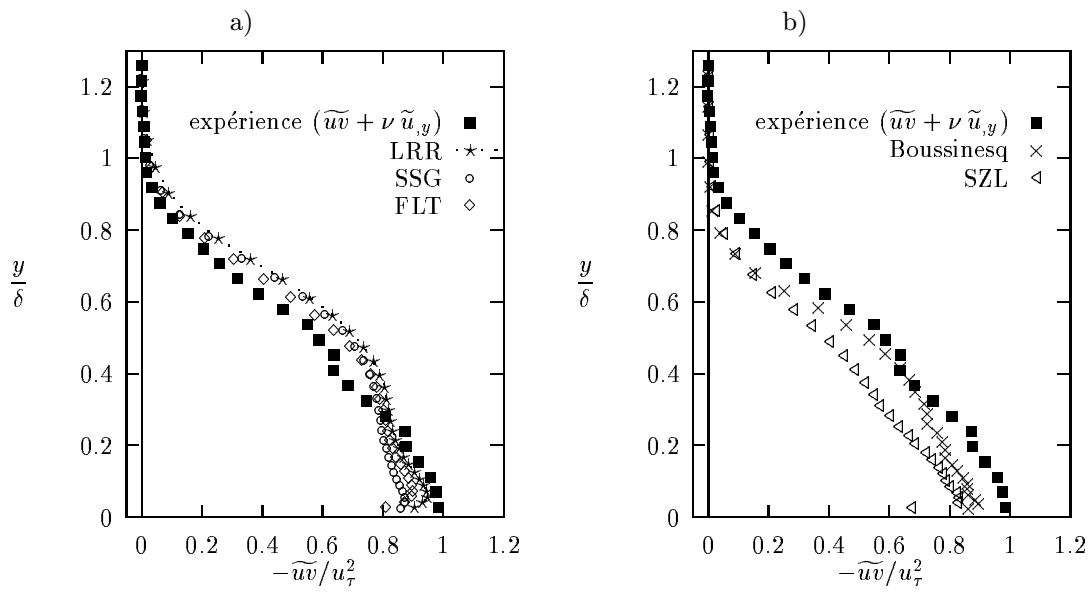


Fig. 5.8: Profils transversaux de la contrainte tangentielle selon le modèle utilisé: a) résultats des calculs avec différentes fermetures au second ordre, b) modèles de fermeture au premier ordre.

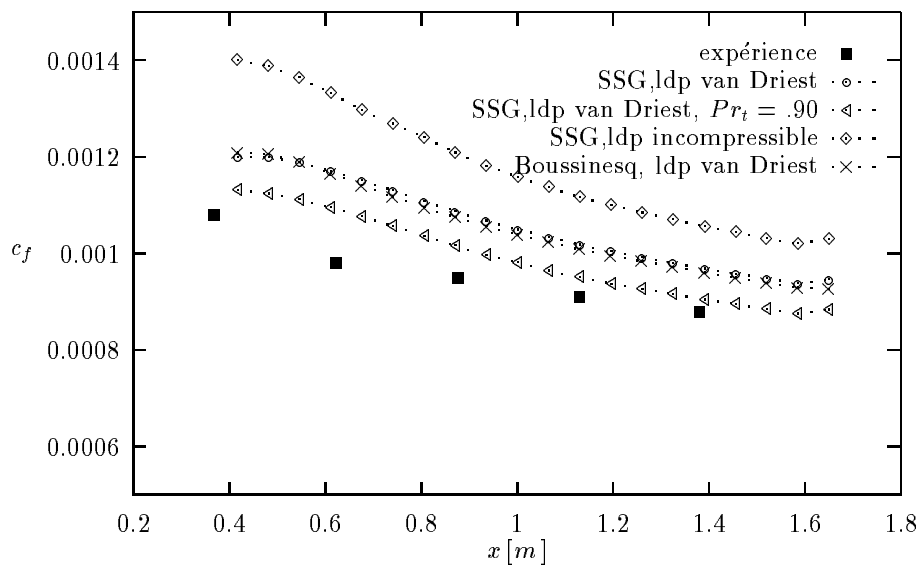


Fig. 5.9: Evolution du coefficient de frottement le long la plaque plane de Mabey à $M_\infty = 4.5$. Calculs avec différentes fermetures (second ordre: SSG; premier ordre: Boussinesq), différentes conditons à la limite de la paroi solide (loi de paroi de van Driest; ldp incompressible) et différents valeurs de Pr_t .

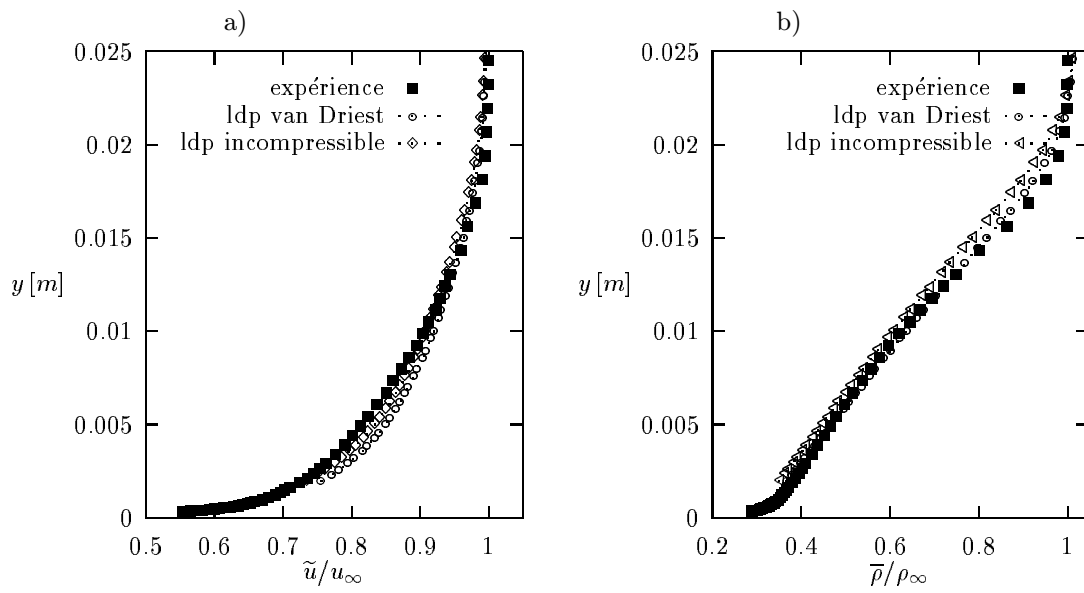


Fig. 5.10: Profils transversaux de: a) vitesse moyenne axiale; b) masse volumique moyenne. Calculs effectués avec le modèle SSG pour différentes conditions à la limite de la paroi solide.

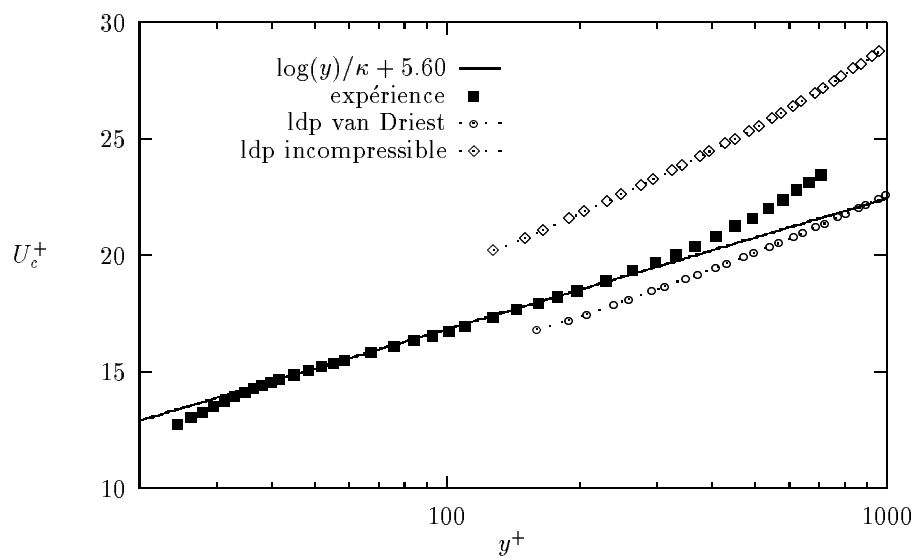


Fig. 5.11: Profil de vitesse moyenne axiale en coordonnées de la paroi.

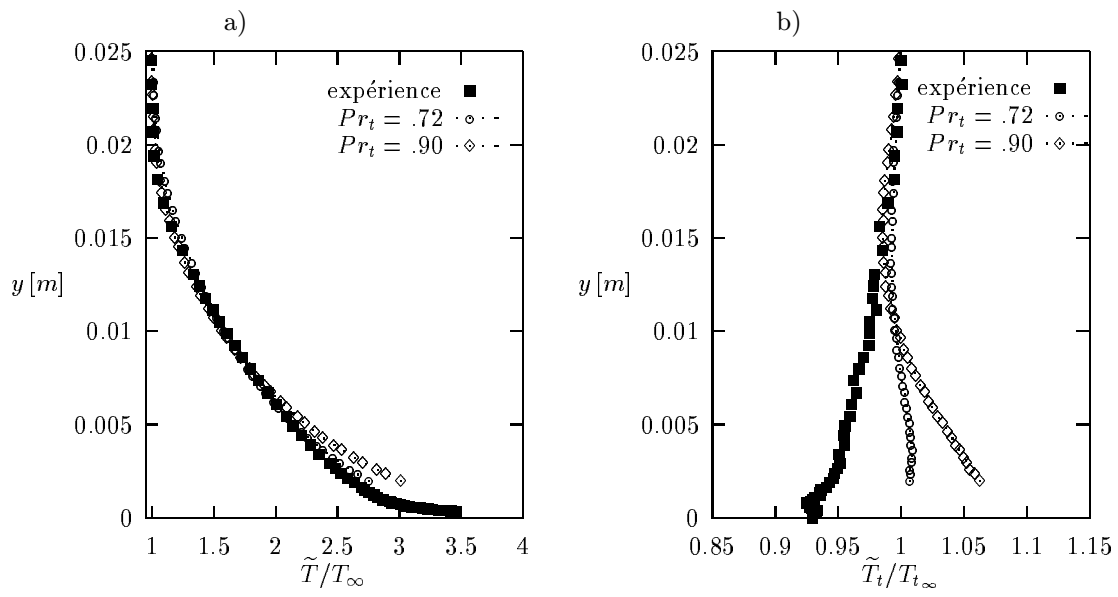


Fig. 5.12: Profils transversaux de: a) température statique; b) température totale. Calculs effectués avec le modèle SSG et la loi de van Driest pour différentes valeurs de Pr_t .

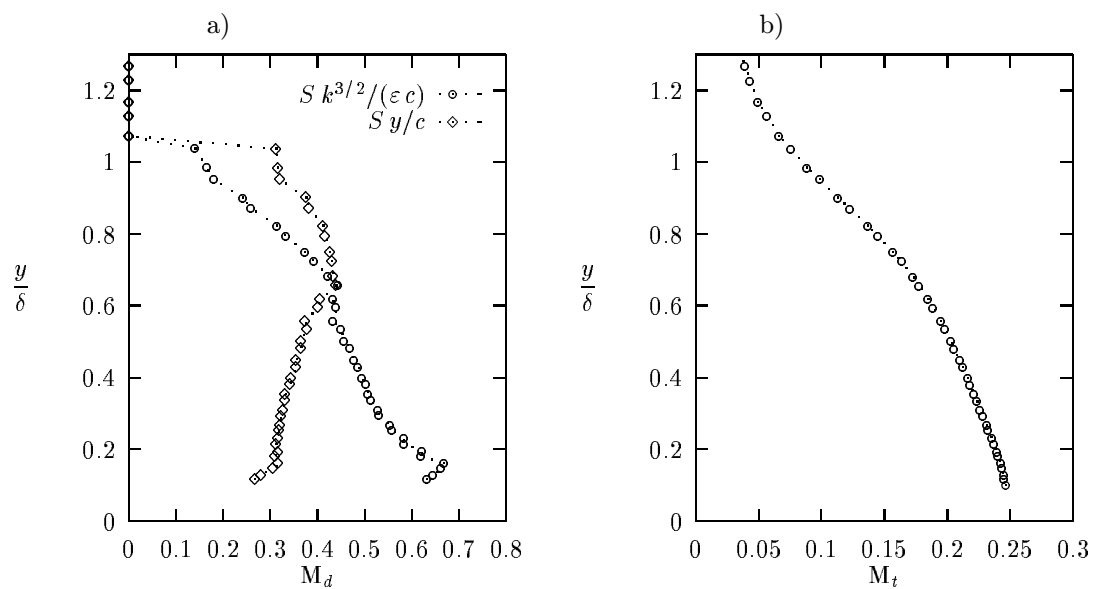


Fig. 5.13: Distribution des nombres de Mach à partir d'un résultat de calcul avec le modèle SSG: a) nombre de Mach de distorsion; b) nombre de Mach turbulent.

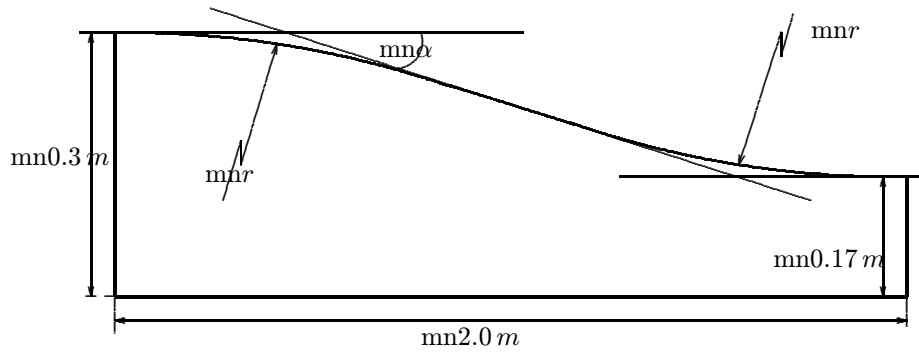


Fig. 5.14: Détails de la géométrie utilisé dans le cas de la couche limite sous l'influence d'un gradient de pression adverse avec $\alpha = 5^\circ$ et $r = 6\text{ m}$.

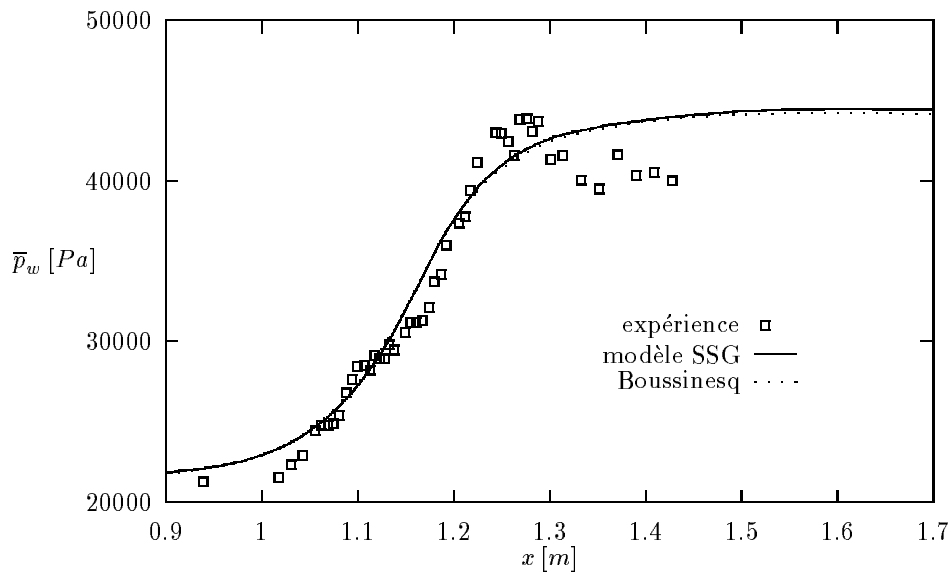


Fig. 5.15: Variation de la pression pariétale obtenue dans le calcul.

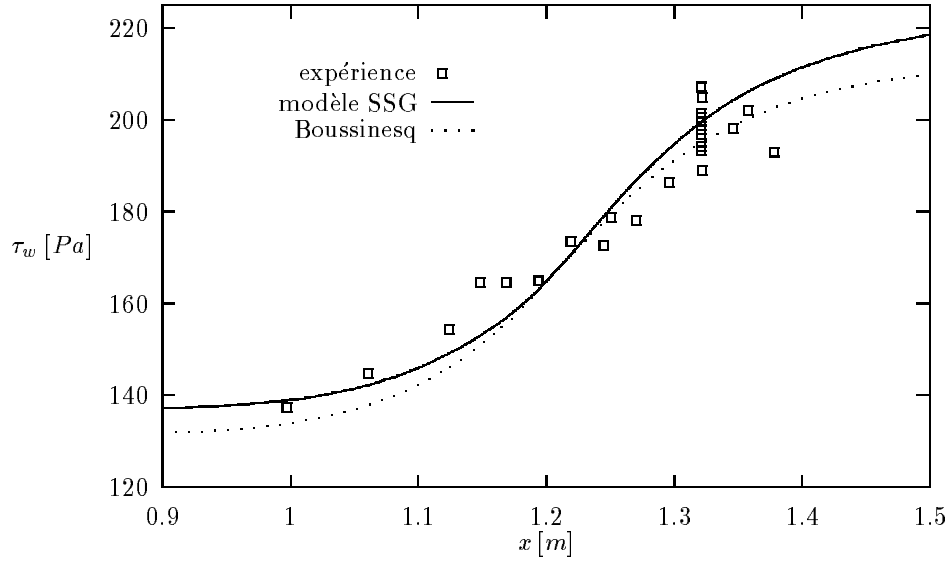


Fig. 5.16: Evolution de la tension pariétale dans la zone d'interaction principale.

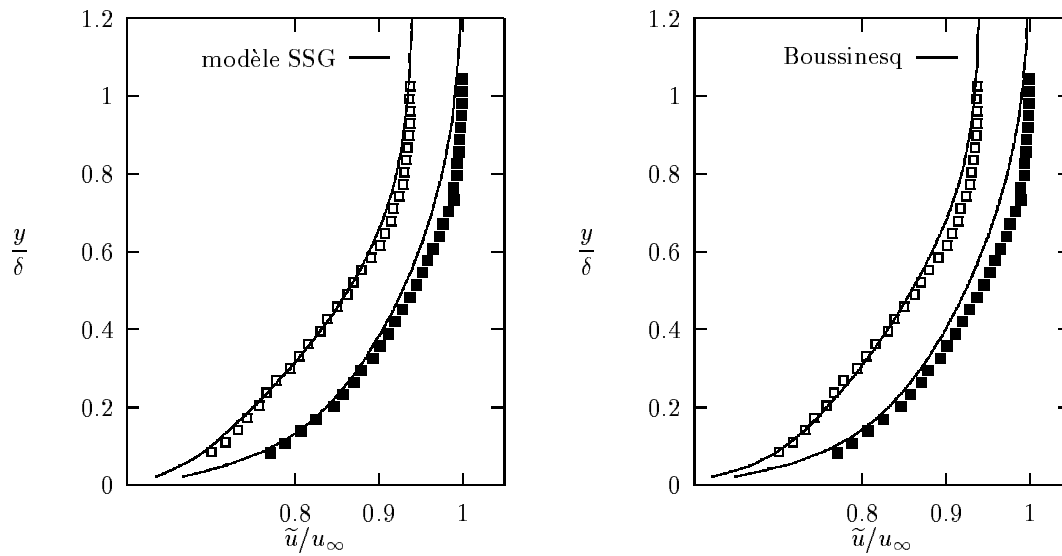


Fig. 5.17: Profils de vitesse moyenne axiale selon le type de fermeture utilisé. ■ $x = 1$ m (avant interaction); □ $x = 1.381$ m (fin interaction).

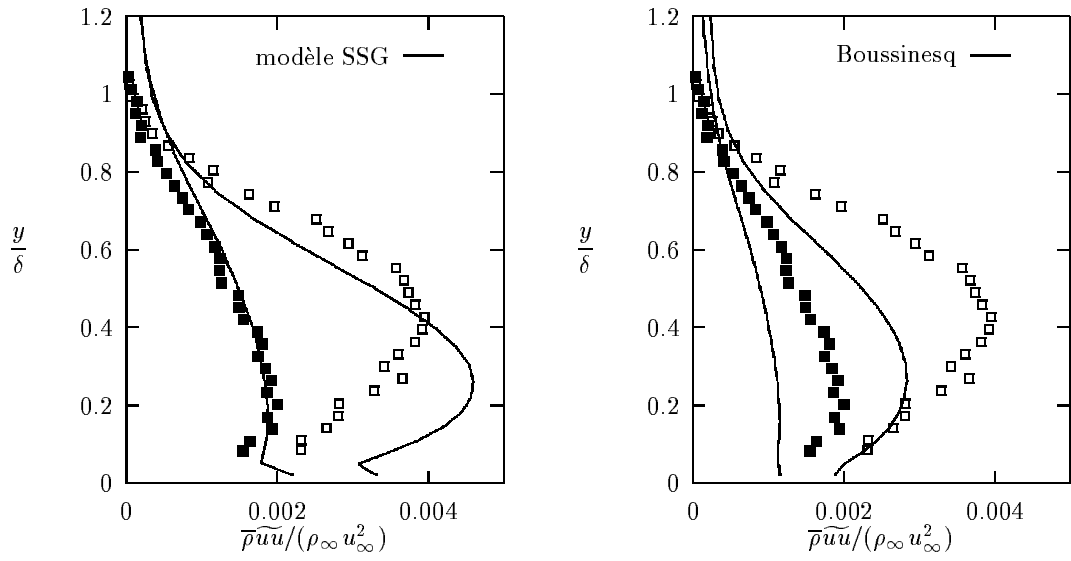


Fig. 5.18: Profils de la tension turbulente longitudinale selon le type de fermeture utilisé. ■ $x = 1\text{ m}$ (avant interaction); □ $x = 1.381\text{ m}$ (fin interaction).

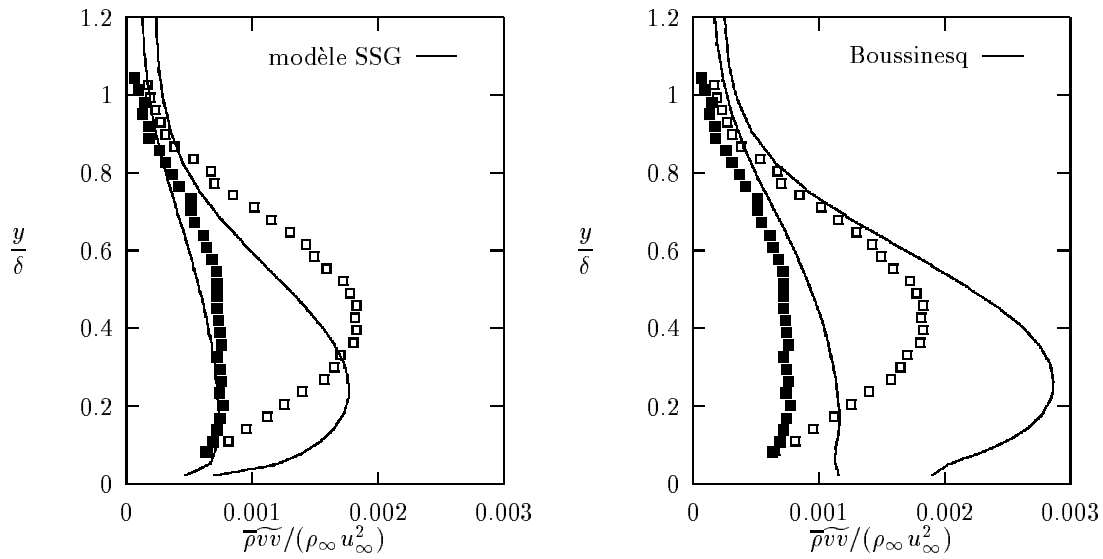


Fig. 5.19: Profils de la tension turbulente normale selon le type de fermeture utilisé. ■ $x = 1\text{ m}$ (avant interaction); □ $x = 1.381\text{ m}$ (fin interaction).

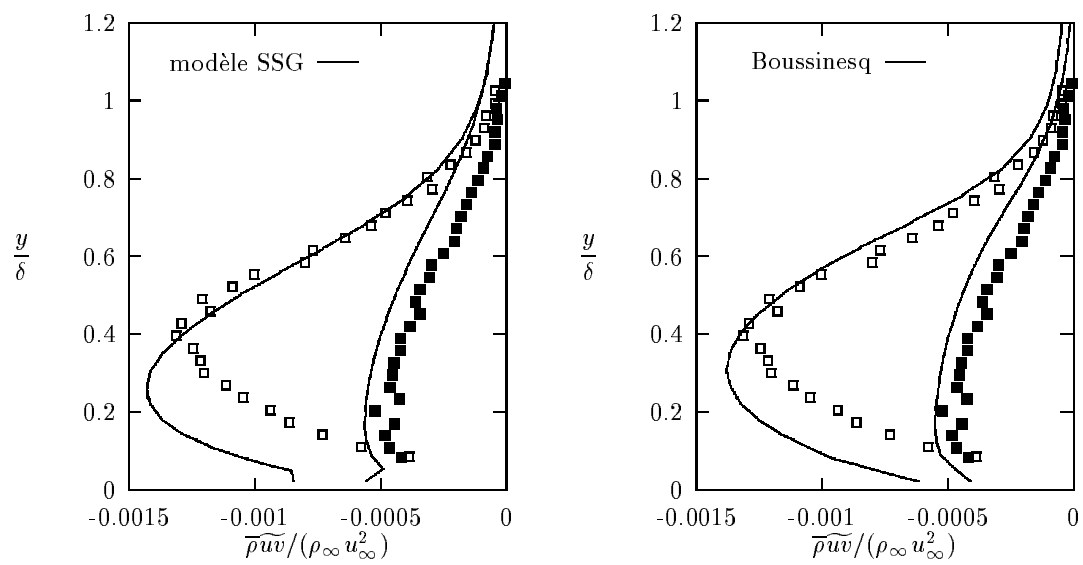


Fig. 5.20: Profils de la contrainte turbulente selon le type de fermeture utilisé. ■ $x = 1\text{ m}$ (avant interaction); □ $x = 1.381\text{ m}$ (fin interaction).

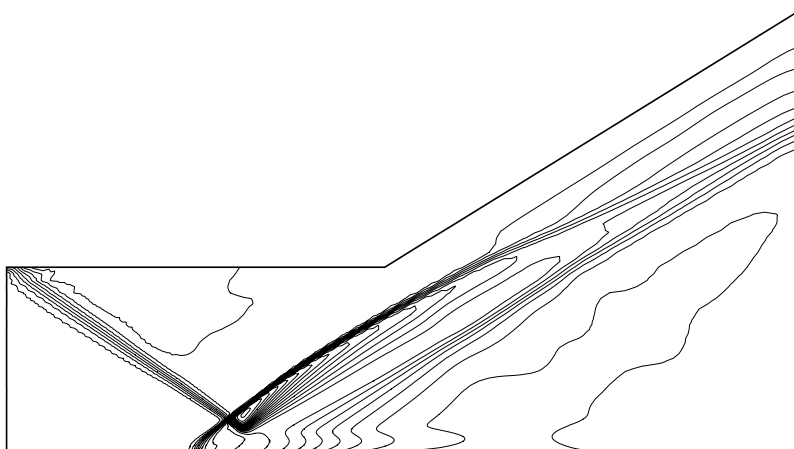


Fig. 5.21: Lignes d'isovaleur de la pression moyenne obtenue avec le modèle SSG.

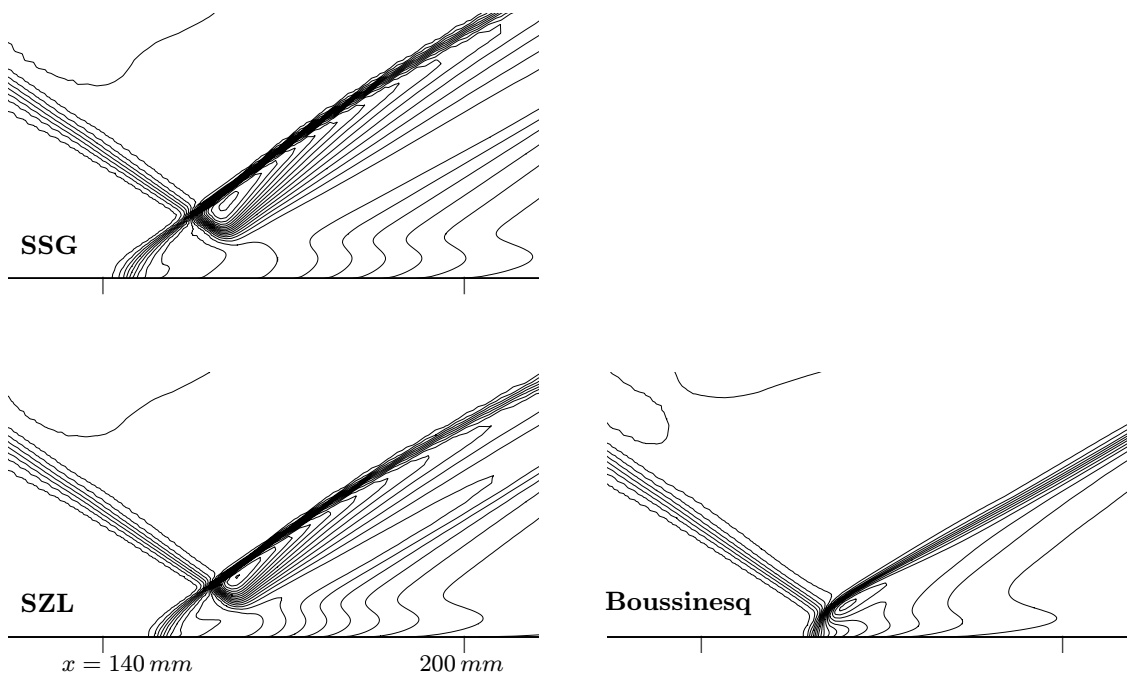


Fig. 5.22: Lignes d'isovaleur de la pression moyenne dans la zone d'interaction selon le modèle de fermeture utilisé (28 lignes équi-partitionnées entre 4500 Pa et 24750 Pa).

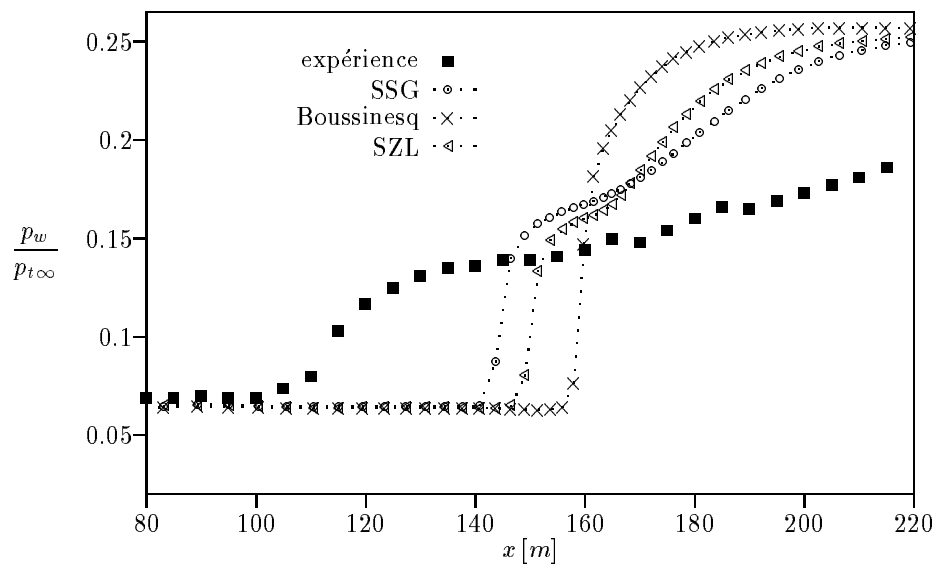


Fig. 5.23: Evolution de la pression pariétale selon différents modèles de fermeture.

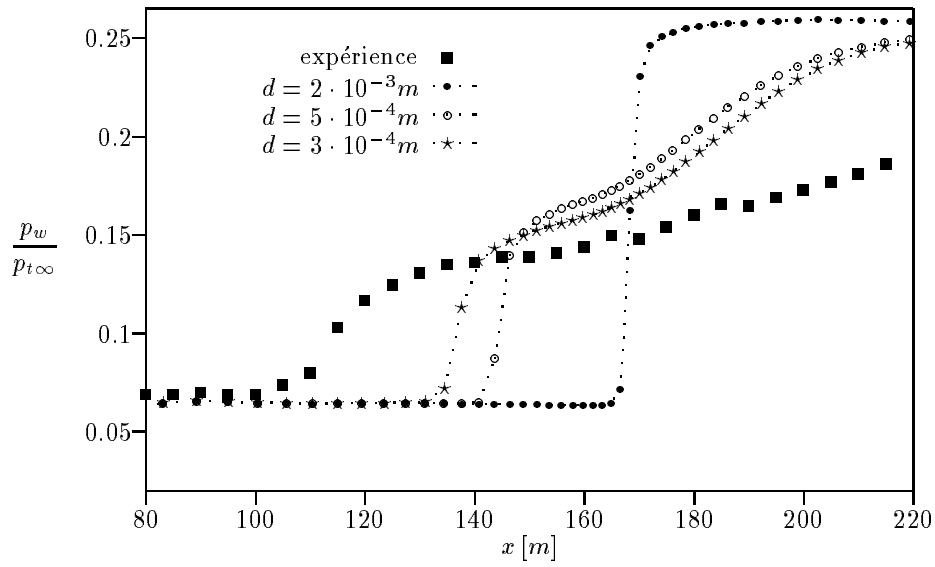


Fig. 5.24: Evolution de la pression pariétale selon la distance d entre la paroi physique et le premier nœud du maillage dans le calcul avec le modèle SSG.

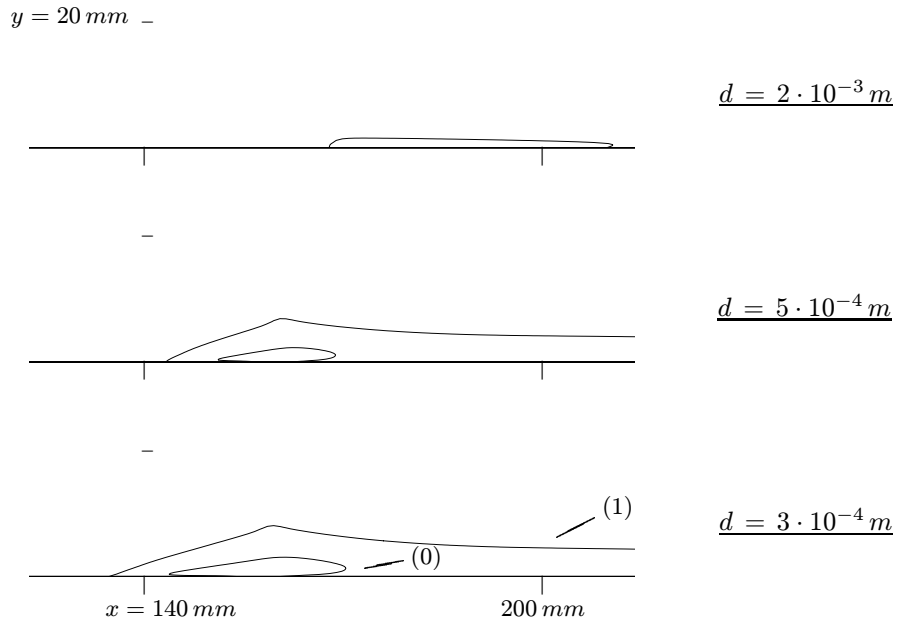


Fig. 5.25: L'influence de la distance d entre la paroi physique et le premier nœud du maillage dans le calcul avec le modèle SSG. (0) ligne de vitesse $\tilde{u} = 0$; (1) ligne sonique $M = 1$.

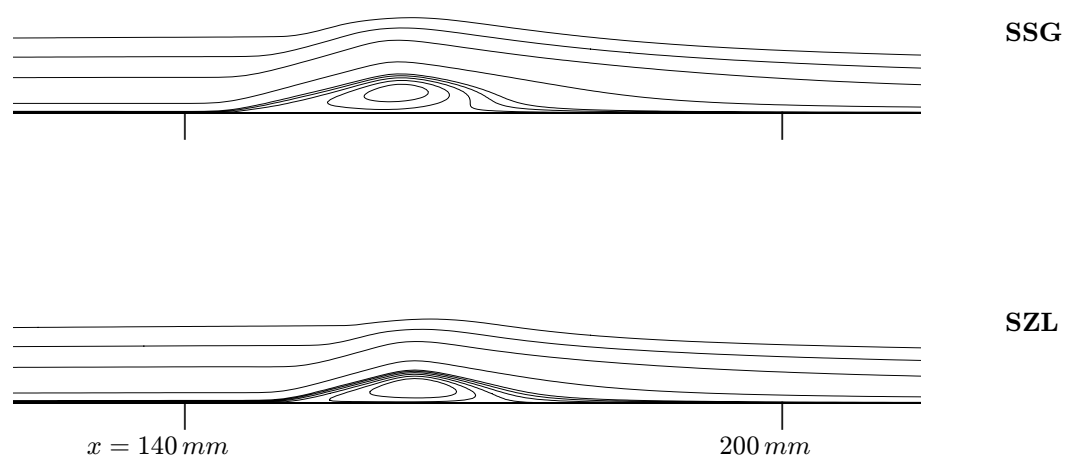


Fig. 5.26: Isolignes de la fonction de courant Ψ dans la zone d'interaction obtenues par le calcul avec le modèle de second ordre SSG et la fermeture au premier ordre SZL.

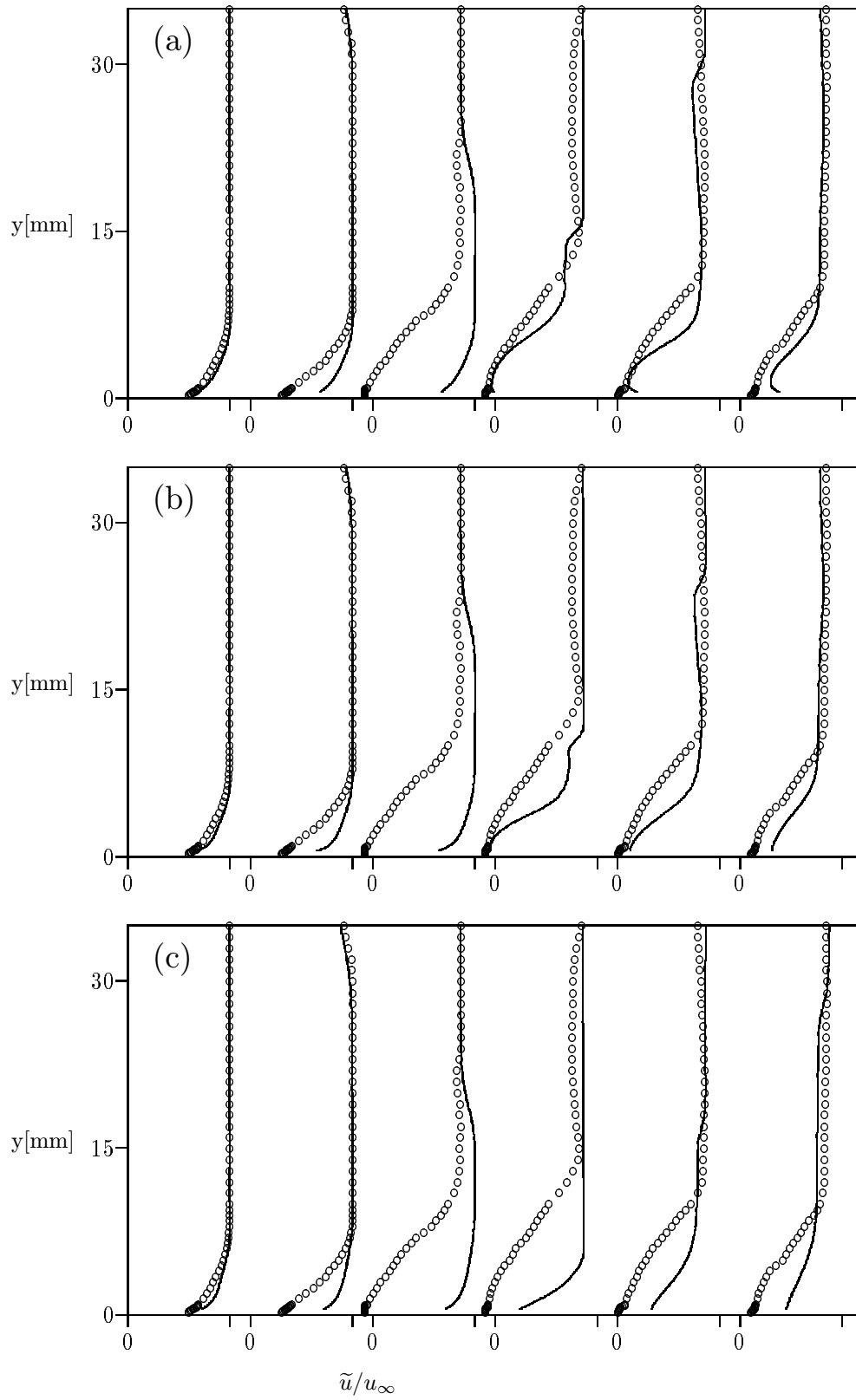


Fig. 5.27: Profils successifs de la vitesse moyenne ($x = \{100, 120, 140, 160, 180, 200\} \text{ mm}$) obtenue avec différents modèles de fermeture: (a) SSG, (b) SZL, (c) Boussinesq; $\circ$ expérience, $—$ calcul.

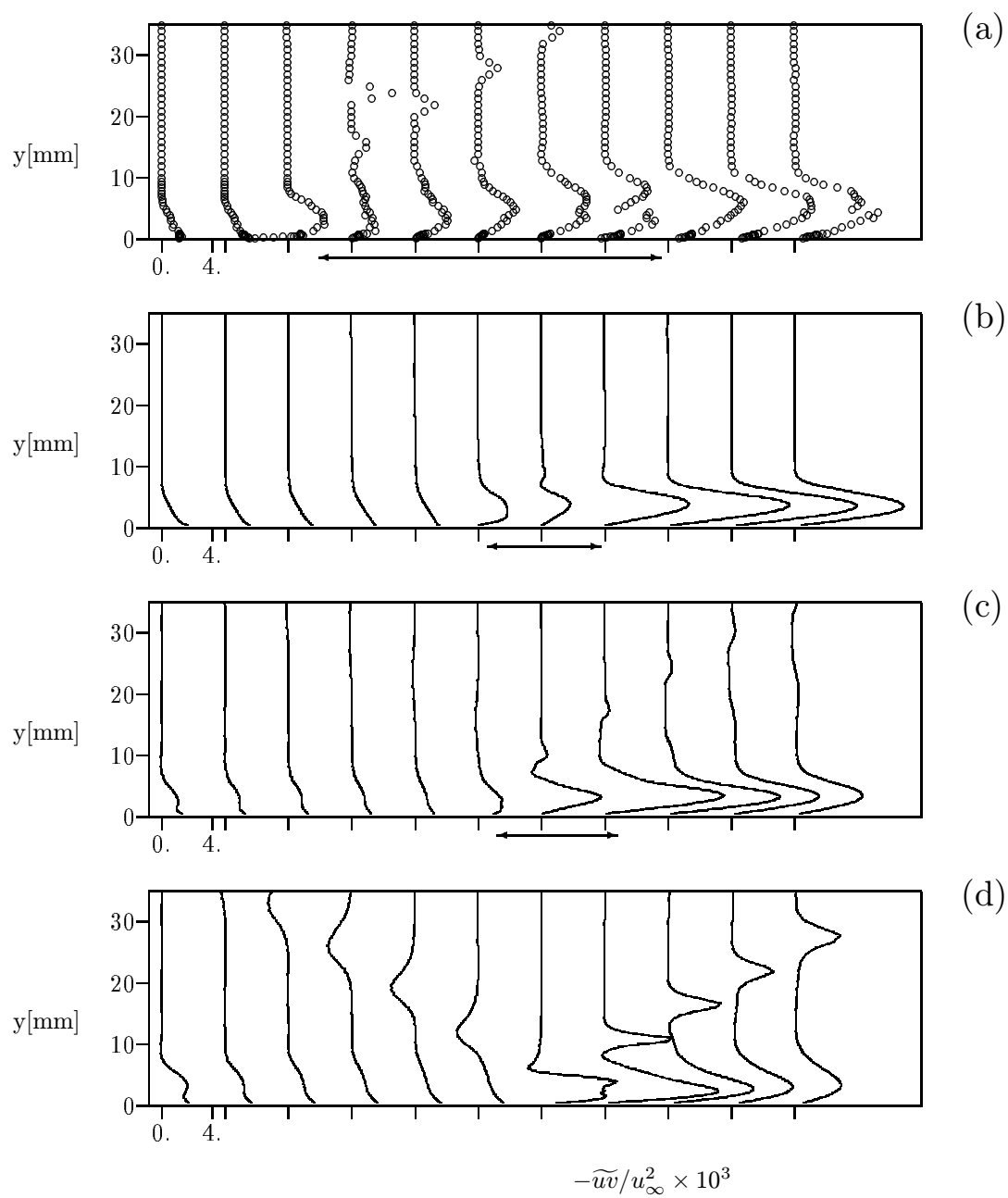


Fig. 5.28: Profils successifs de la contrainte tangentielle turbulente ($x = \{100, \dots, 200\} \text{ mm}$) obtenue avec différents modèles de fermeture: (a) expérience, (b) SSG, (c) SZL, (d) Boussinesq. Les flèches indiquent l'étendue de la zone de recirculation.

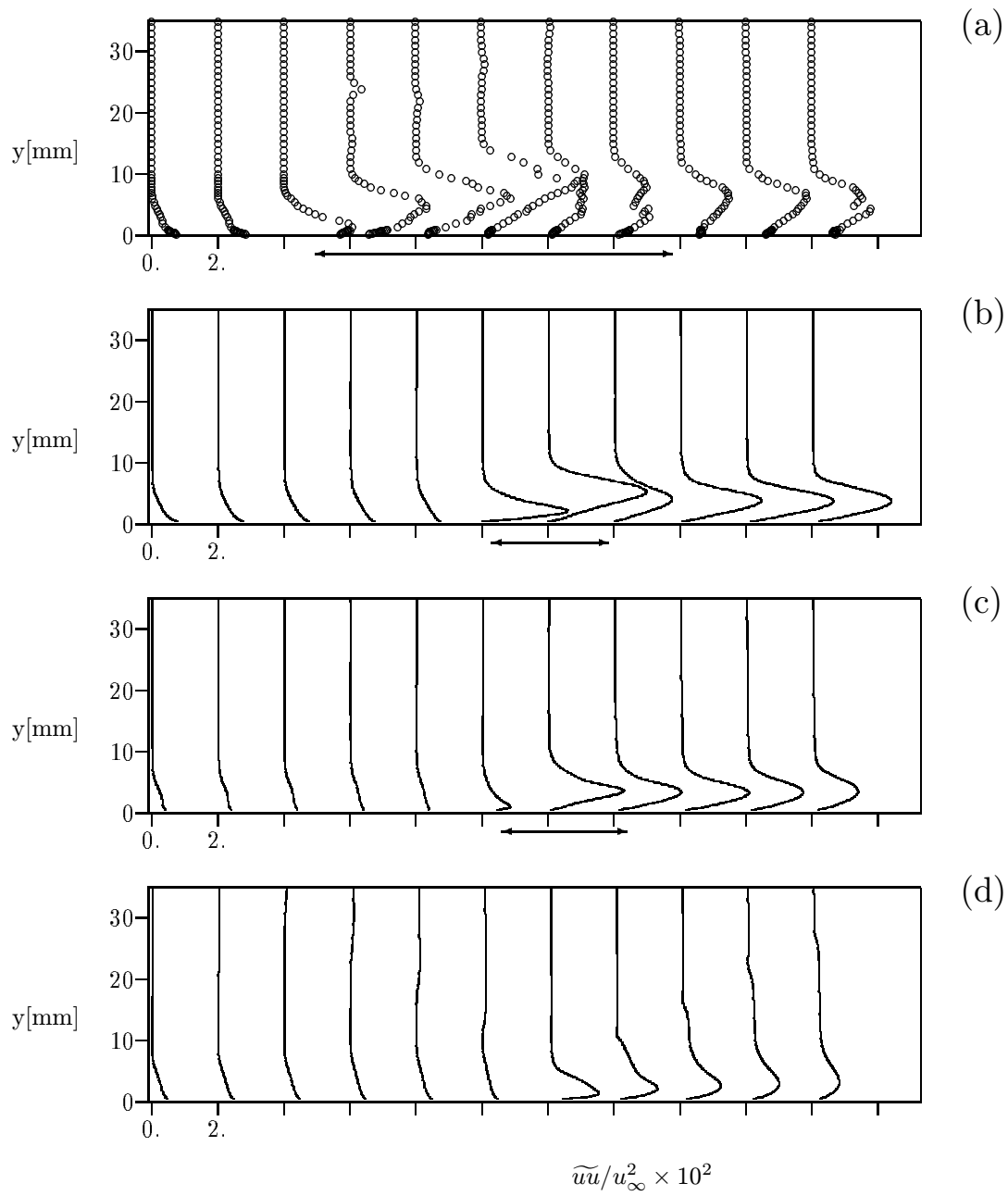


Fig. 5.29: Profils successifs de la contrainte axiale turbulente ($x = \{100, \dots, 200\} \text{ mm}$) obtenue avec différents modèles de fermeture: (a) expérience, (b) SSG, (c) SZL, (d) Boussinesq. Les flèches indiquent l'étendue de la zone de recirculation.

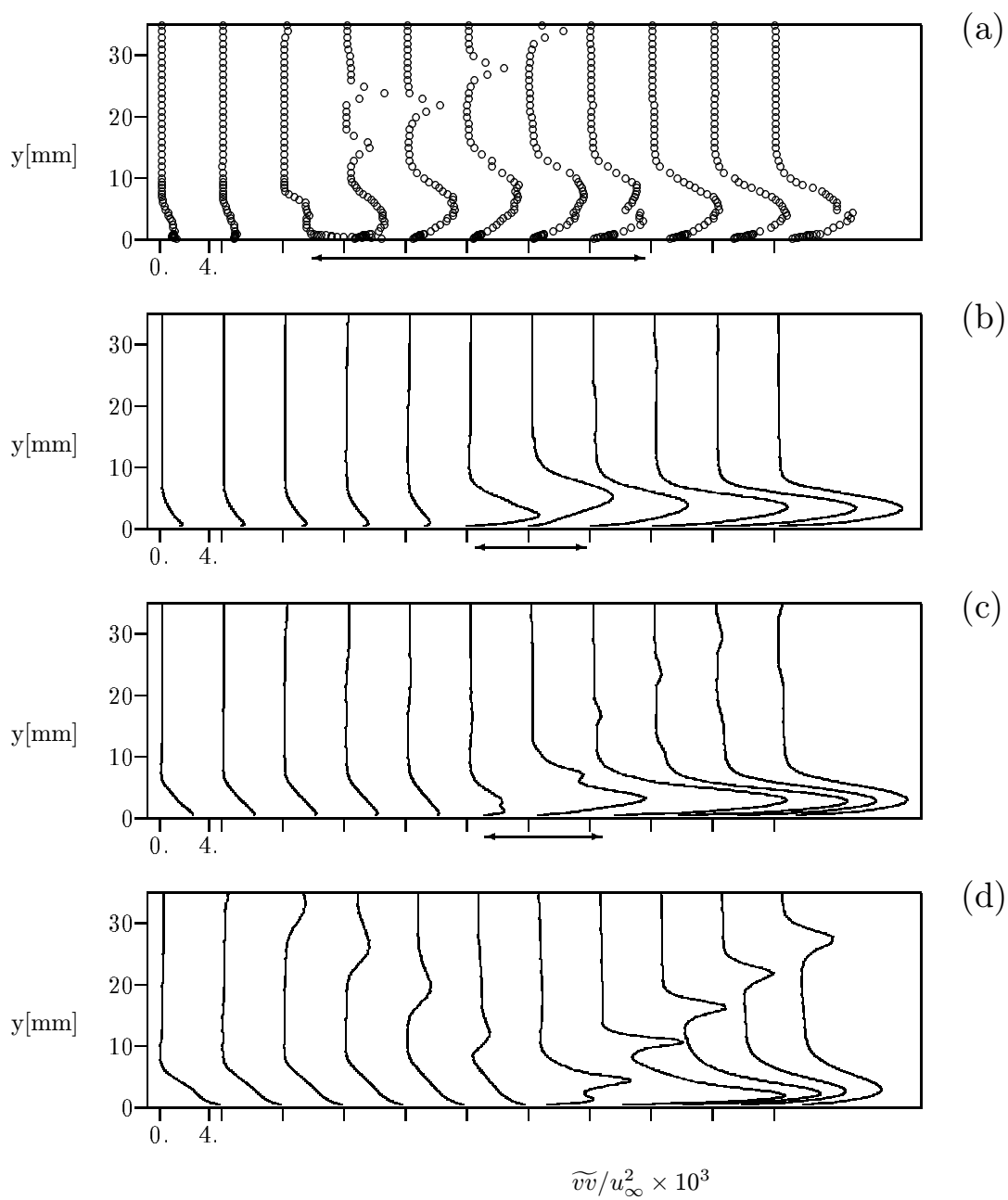


Fig. 5.30: Profils successifs de la contrainte normale turbulente ($x = \{100, \dots, 200\} \text{ mm}$) obtenue avec différents modèles de fermeture: (a) expérience, (b) SSG, (c) SZL, (d) Boussinesq. Les flèches indiquent l'étendue de la zone de recirculation.

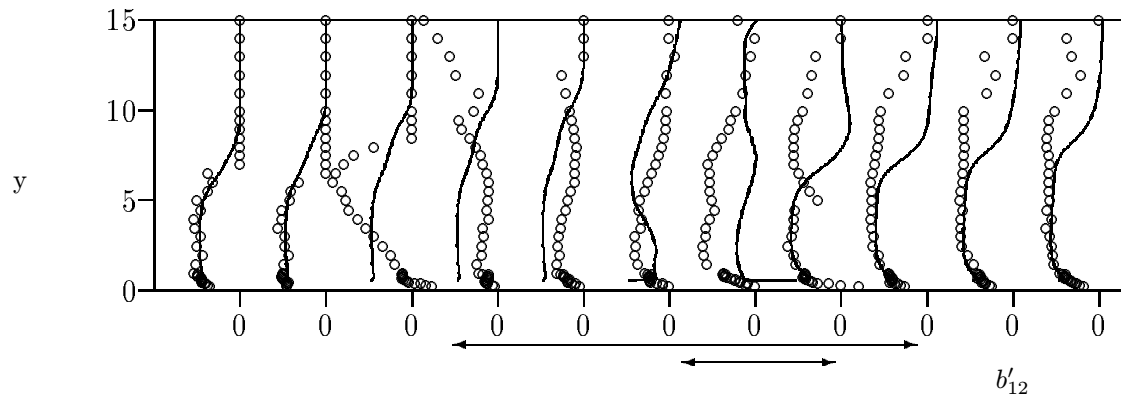


Fig. 5.31: Profils successifs de la composante tangentielle de l'anisotropie; $\circ$ expérience, — calcul. Les flèches indiquent l'étendue de la zone de recirculation de l'expérience et du calcul.

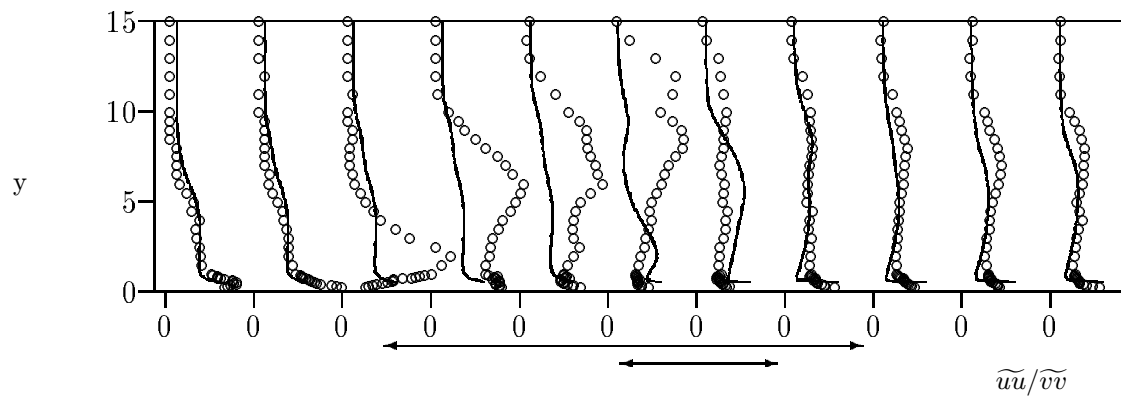


Fig. 5.32: Profils successifs du rapport des composantes diagonales du tenseur de Reynolds; $\circ$ expérience, — calcul. Les flèches indiquent l'étendue de la zone de recirculation de l'expérience et du calcul.

Annexe A

Les modèles de pression-déformation utilisés

Ici, on donne la formulation à masse volumique variable des modèles pour la corrélation entre la pression et la déformation. Les modèles sont écrits de façon à assurer une trace nulle. Différentes notations sont utilisées afin de garder la formulation des auteurs.

Modèle LRR. Le modèle de Launder *et al.* [34] s'écrit

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^{dev} = & -C_1 \bar{\rho} \varepsilon b_{ij} - \frac{C_2 + 8}{11} \left(P_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij} \right) \\ & - \frac{8C_2 - 2}{11} \left(D_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij} \right) - \frac{30C_2 - 2}{55} \bar{\rho} k \tilde{S}_{ij} \end{aligned} \quad (A.1)$$

où

$$D_{ij} = -\bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_k'' u_{k,j}} - \bar{\rho} \widetilde{u_j'' u_k'' u_{k,i}}, \quad P_{ij} = -\bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_k'' u_{j,k}} - \bar{\rho} \widetilde{u_j'' u_k'' u_{i,k}},$$

et les constantes prennent les valeurs

$$C_1 = 3.0, \quad C_2 = 0.4 \quad .$$

Modèle SSG. Le modèle de Speziale *et al.* [62] s'écrit

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^{dev} = & -(C_1 \bar{\rho} \varepsilon + C_1^* P_{kk}) b_{ij} + C_2 \bar{\rho} \varepsilon (b_{ik} b_{kj} - \frac{1}{3} II \delta_{ij}) \\ & + \left(C_3 - C_3^* II^{1/2} \right) \bar{\rho} k (s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} \delta_{ij}) \\ & + C_4 \bar{\rho} k (b_{ik} s_{jk} + b_{jk} s_{ik} - \frac{2}{3} b_{kl} s_{kl} \delta_{ij}) \\ & + C_5 \bar{\rho} k (b_{ik} \omega_{jk} + b_{jk} \omega_{ik}) \quad , \end{aligned} \quad (A.2)$$

où

$$s_{ij} = \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j} - \tilde{u}_{j,i}), \quad b_{ij} = \frac{\widetilde{u_i'' u_j''}}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij},$$

et

$$II = b_{ij}b_{ji}, \quad III = b_{ik}b_{kl}b_{li}.$$

Les constants prennent les valeurs

$$C_1 = 3.4, C_1^* = 1.80, C_2 = 4.2, C_3 = 0.8, C_3^* = 1.3, C_4 = 1.25, C_5 = 0.4.$$

Modèle FLT. Le modèle de Fu *et al.* [38] s'écrit

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^{dev} = & -C_1 \bar{\rho} \varepsilon b_{ij} + C_2 \bar{\rho} \varepsilon \left(b_{ik}b_{kj} - \frac{1}{3} II \delta_{ij} \right) + \frac{4}{5} \bar{\rho} k \left(s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} \delta_{ij} \right) \\ & + \frac{6}{5} \bar{\rho} k \left(b_{ik}s_{jk} + b_{jk}s_{ik} - \frac{2}{3} b_{kl}s_{kl} \delta_{ij} \right) + \frac{26}{15} \bar{\rho} k (b_{ik}\omega_{jk} + b_{jk}\omega_{ik}) \\ & + \frac{4}{5} \bar{\rho} k (b_{ik}b_{kl}s_{jl} + b_{jk}b_{kl}s_{il} - 2b_{ik}b_{lj}s_{kl} - 3b_{kl}b_{ij}s_{kl} - b_{ij}s_{kk}) \\ & + \frac{4}{5} \bar{\rho} k (b_{ik}b_{kl}\omega_{jl} + b_{jk}b_{kl}\omega_{il}) - \frac{14}{5} \bar{\rho} k [8II_b (b_{ik}\omega_{jk} + b_{jk}\omega_{ik}) \\ & + 12 (b_{ik}b_{kl}\omega_{lm}b_{mj} + b_{jk}b_{kl}\omega_{lm}b_{mi})]. \end{aligned} \quad (A.3)$$

Les coefficients sont définis par

$$\begin{aligned} C_1 &= -120II_b\sqrt{F} - 2\sqrt{F} + 2, \quad C_2 = 144II_b\sqrt{F}, \\ F &= 1 + 9II_b + 27III_b, \\ II_b &= -\frac{1}{2}b_{ij}b_{ji}, \quad III_b = \frac{1}{3}b_{ij}b_{jk}b_{ki}. \end{aligned}$$

Modèle SL. La partie lente de Lumley [15] avec le modèle pour la partie rapide de Shih et Lumley [28] s'écrit

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^{dev} = & -\beta \bar{\rho} \varepsilon b_{ij} + \frac{4}{5} \bar{\rho} k \left(s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} \delta_{ij} \right) \\ & + 12 \alpha_5 \bar{\rho} k \left(b_{ik}s_{jk} + b_{jk}s_{ik} - \frac{2}{3} b_{kl}s_{kl} \delta_{ij} \right) + \frac{4}{3} (2 - 7\alpha_5) \bar{\rho} k (b_{ik}\omega_{jk} + b_{jk}\omega_{ik}) \\ & + \frac{4}{5} \bar{\rho} k (b_{ik}b_{kl}s_{jl} + b_{jk}b_{kl}s_{il} - 2b_{ik}b_{lj}s_{kl} - 3b_{kl}b_{ij}s_{kl} - b_{ij}s_{kk}) \\ & + \frac{4}{5} \bar{\rho} k (b_{ik}b_{kl}\omega_{jl} + b_{jk}b_{kl}\omega_{il}). \end{aligned} \quad (A.4)$$

Les coefficients sont définis par

$$\begin{aligned} \beta &= 2 + \frac{F}{9} \exp \left(-7.77/\sqrt{Re} \right) \left\{ 72/\sqrt{Re} + 80.1 \ln \left[1 + 62.4 \left(b_{ij}b_{ij} \frac{1}{2} + \frac{2.3}{3} b_{ij}b_{jk}b_{ki} \right) \right] \right\}, \\ Re_t &\equiv \frac{4}{9} \frac{k^2}{\nu \varepsilon}. \end{aligned}$$

On note que le coefficient α_5 est une constante dans la proposition originale de Shih et Lumley [28]. On denote donc par SL85 le modèle précédent (A.4) avec:

$$\alpha_5^{85} = \frac{1}{10}. \quad (A.5)$$

Dans la publication de Shih *et al.* [95], la définition de α_5 a été modifiée. On denote par SL90 le modèle (A.4) avec:

$$\alpha_5^{90} = \frac{1}{10} \left(1 + \frac{4}{5} \sqrt{F} \right) \quad . \quad (\text{A.6})$$

Annexe B

Détermination des coefficients de la diffusion

Lele [232] a établi une condition de consistance physique qui peut servir à réduire le nombre des constantes dans un modèle de transport. Il observe que la vitesse de propagation par la diffusion est finie. Si la valeur de cette vitesse était différente pour les deux variables ε et k , la grandeur avec la plus grande vitesse de diffusion pourrait éventuellement diffuser dans une région d'espace où l'autre grandeur est nulle — une situation non-physique. Lele pose alors l'équivalence des vitesses de diffusion associées à la dissipation ε et à l'énergie cinétique turbulente k .

On considère une source plane dans le plan (x, y) qui émet de la turbulence isotrope dans un fluide initialement au repos. La plupart des modélisations à deux équations ou au transport des composantes du tenseur s'écrivent dans ce cas:

$$\partial_t q^2 + \partial_z \left(-\alpha \frac{q^2}{\varepsilon} \frac{\partial q^2}{\partial z} \right) = -2\varepsilon \quad (\text{B.1})$$

$$\partial_t \varepsilon + \partial_z \left(-\beta \frac{q^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) = -\Psi \frac{\varepsilon^2}{q^2} \quad , \quad (\text{B.2})$$

où q^2 est l'intensité turbulente, $q^2 = 2k$, et la diffusion moléculaire a été négligée devant la contribution turbulente.

Les constantes dépendent des modèles utilisés. Dans le cas présent d'un transport isotrope par gradient (équations (1.81) et (1.83)), il vient

$$\alpha = \frac{C_\mu}{4\sigma_R}, \quad \beta = \frac{C_\mu}{4\sigma_\varepsilon}, \quad \Psi = 2C_{\varepsilon 2} \quad . \quad (\text{B.3})$$

La résolution du système (B.1) et (B.2) après un temps initial mène à la condition suivante pour l'égalité de la vitesse de diffusion [232]

$$\frac{\beta}{\alpha} = 6 \left[\sqrt{\Psi^2 + 1} - \Psi \right] \quad . \quad (\text{B.4})$$

Si on fixe la valeur de $C_{\varepsilon 2}$, qui détermine la décroissance de la turbulence isotrope, à la valeur standard de $C_{\varepsilon 2} = 1.92$, il vient:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sigma_R}{\sigma_\varepsilon} = 0.7684 \quad . \quad (\text{B.5})$$

Afin de permettre une bonne représentation de la zone logarithmique d'une couche limite (voir Patel *et al.* [168, équ. (26)] et Abid et Speziale [181]) nous utilisons la valeur $\sigma_\varepsilon = 1.3$ pour le coefficient de diffusion de la dissipation. La condition de Lele indique ensuite la valeur $\sigma_R = 1.0$ pour l'équation de l'énergie cinétique turbulente k . Ce même coefficient doit évidemment être utilisé pour toutes les composantes du tenseur de Reynolds.

Annexe C

Remarques supplémentaires concernant la réalisabilité

C.1 Caractérisation entropique

On définit une fonction d'entropie suivant Hérard *et al.* [96] par les valeurs instantanées:

$$\rho s^* \equiv \rho \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) . \quad (\text{C.1})$$

En utilisant l'identité $d_t(\rho s^*) = d_t(p) \rho/p - d_t(\rho)[(\rho s^*)/\rho + \gamma]$ et en substituant l'équation de conservation de la masse (1.1) et le transport de la pression [25]:

$$d_t(p) = -p \gamma u_{k,k} + (\gamma - 1) [(\lambda T_{,k})_{,k} + \Phi] , \quad \Phi \equiv \tau_{ij} \cdot u_{i,j} , \quad (\text{C.2})$$

on obtient:

$$\partial_t(\rho s^*) + (u_k \rho s^*)_{,k} - \left(\frac{1}{c_v} \frac{\lambda T_{,k}}{T} \right)_{,k} = \frac{\lambda}{c_v} \frac{T_{,k}^2}{T^2} + \frac{\Phi}{c_v} \geq 0 . \quad (\text{C.3})$$

On constate que le premier membre de l'équation (C.3) est sous forme conservative. Le second membre contient deux terme non-négatifs, plus particulièrement on a pour le terme de dissipation:

$$\Phi = \mu S_{ij} (s_{ij} + \omega_{ij}) = 2 \mu (s_{ij} s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} s_{ll}) \geq 0 , \quad (\text{C.4})$$

avec les déformations instantanées $s_{ij} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ et $\omega_{ij} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$.

De façon analogue on définit pour les grandeurs moyennées

$$\bar{\rho} s \equiv \bar{\rho} \ln \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}^\gamma} \right) , \quad (\text{C.5})$$

ce qui permet d'obtenir l'équation suivante:

$$\begin{aligned} \partial_t(\bar{\rho} s) + (\bar{u}_k \bar{\rho} s)_{,k} - \left([(\gamma - 1) + s] \overline{\rho' u_k''} \right)_{,k} - \left(\frac{\overline{\lambda T_{,k}}}{v_v \bar{T}} - \frac{\bar{\rho} \widetilde{u_k'' T''}}{\bar{T}} \right)_{,k} = \\ - \overline{\rho' u_k''} \gamma \frac{\bar{\rho}_{,k}}{\bar{\rho}} - \frac{\bar{T}_{,k}}{\bar{T}} \left(\bar{\rho} \widetilde{u_k'' T''} - \frac{\overline{\lambda T_{,k}}}{c_v} \right) + \frac{1}{c_v \bar{T}} \left(\bar{\Phi} - \overline{p' u_{k,k}''} \right) . \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

En développant le second membre de l'équation précédente, il vient:

$$\text{SM}_{(C.6)} = \overline{u_k''}(\gamma 1), \bar{\rho}_{,k} - \frac{\tilde{T}_{,k}}{\tilde{T}^2} \left(\bar{\rho} \widetilde{T'' u_k''} - \frac{\lambda}{c_v} \left[\tilde{T}_{,k} + \overline{T''_{,k}} \right] \right) + \frac{1}{c_v \tilde{T}} \left(\overline{\tau_{ij} u_{i,j}''} + \tilde{\tau}_{ij} \tilde{u}_{i,j} + \overline{\tau_{ij}'' \tilde{u}_{i,j}} - \overline{p' u_{k,k}''} \right). \quad (C.7)$$

En considérant négligeables les corrélations avec la densité en conjonction avec la viscosité $\lambda \overline{T''}$ et $\overline{\tau_{ij}''}$ (voir paragraphe 1.4.6) et en introduisant le modèle algébrique pour le flux de chaleur turbulent (équation (1.16)), le second membre s'écrit:

$$\text{SM}_{(C.6)} = \overline{u_k''}(\gamma - 1) \bar{\rho}_{,k} + \frac{\tilde{T}_{,k}^2}{\tilde{T}^2} \left(\frac{\mu_t}{Pr_t} + \frac{\mu}{Pr} \right) + \frac{1}{c_v \tilde{T}} \left(\bar{\rho} \varepsilon + \tilde{\tau}_{ij} \tilde{u}_{i,j} - \overline{p' u_{k,k}''} \right). \quad (C.8)$$

Les termes à modéliser dans l'expression (C.8) sont le flux de masse turbulent $\overline{u_k''}$, le taux de dissipation $\bar{\rho} \varepsilon$ et la corrélation pression-dilatation $\overline{p' u_{k,k}''}$, les autres termes étant naturellement non-négatifs.

- Quant à la dissipation, elle doit être positive par définition, une contrainte qui fait partie de la réalisabilité faible (relation (1.107)).
- Concernant le flux de masse turbulent, parmi les propositions algébriques du paragraphe 1.4.6.1, deux modèles assurent la non-négativité du premier terme de l'expression (C.8). Le modèle de transport isotrope par gradient de la masse volumique moyenne (1.96) assure évidemment la positivité de l'expression $\overline{u_k''} \bar{\rho}_{,k}$, de même pour le modèle anisotrope de Ristorcelli/Zeman (1.95) qui donne en particulier:

$$\begin{aligned} \overline{u_k''} \bar{\rho}_{,k} &= \frac{\tau}{\bar{\rho}} \bar{\rho}_{,l} \bar{\rho}_{,k} \widetilde{u_k'' u_l''} = \frac{\tau}{\bar{\rho}^2} \sum_k \sum_l \left(\bar{\rho}_{,l} \bar{\rho}_{,k} \overline{\rho u_k'' u_l''} \right) \\ &= \frac{\tau}{\bar{\rho}^2} \left\langle \rho \left(\sum_l \bar{\rho}_{,l} u_l'' \right)^2 \right\rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (C.9)$$

Le résultat (C.9) est valable sous condition que l'ensemble du modèle pour le tenseur de Reynolds est fortement réalisable.

- Seulement des valeurs non-positives de la corrélation pression-dilatation assurent la positivité de l'expression (C.8) (voir également [98]). Parmi les propositions discutées dans le paragraphe 1.4.3, aucun modèle n'a une forme correspondante. Par conséquent, une caractérisation entropique du système des équations statistiques avec la fonction d'entropie particulière (C.5) n'est pas possible en utilisant un de ces modèles pour la corrélation pression-dilatation.

On peut conclure que le modèle de fermeture au second ordre (dans le contexte discuté ici) permet une caractérisation entropique du système par la relation (C.5) quand la corrélation pression-dilatation est négligée et le taux de dissipation turbulente est positif et le flux de masse est soit (a) négligé soit (b) modélisé par le modèle isotrope (1.96) soit (c) modélisé par l'expression non-isotrope (1.95) en conjonction avec un modèle fortement réalisable pour la tension de Reynolds.

C.2 La réalisabilité forte des équations exactes

Les valeurs propres $\lambda_{(\alpha)}$ de la tension de Reynolds sont données par la relation suivante:

$$\widetilde{u_i'' u_j''} \cdot r_j^{(\alpha)} = \lambda_{(\alpha)} \cdot r_i^{(\alpha)}, \quad (C.10)$$

où $r^{(\alpha)}$ est le vecteur propre à droite associé à la valeur propre $\lambda_{(\alpha)}$. Lumley [15] a démontré la validité de la relation suivante:

$$d_t(\lambda_{(\alpha)}) = r_i^{(\alpha)} \cdot d_t(\widetilde{u''_i u''_j}) \cdot r_j^{(\alpha)} , \quad (C.11)$$

ce qui veut dire que la variation des axes principales n'intervient pas dans les considérations de réalisabilité.

On peut établir la forte réalisabilité des équations exactes en manipulant simplement la dérivée substantielle de la tension de Reynolds. On dénote les composantes diagonales du tenseur écrit en axes principales par: $\widetilde{u''_{(\alpha)} u''_{(\alpha)}} = \lambda_{(\alpha)}$. On a donc l'identité suivante:

$$d_t(\widetilde{\rho u''_{(\alpha)} u''_{(\alpha)}}) = d_t(\overline{\rho u''_{(\alpha)} u''_{(\alpha)}}) = 2 \overline{\rho u''_{(\alpha)} d_t(u''_{(\alpha)})} + \overline{u''_{(\alpha)} u''_{(\alpha)} d_t(\rho)} . \quad (C.12)$$

Dans la relation (1.106) on avait déjà établi que le flux d'un scalaire quelconque s'annule dans la direction α où le valeur propre $\lambda_{(\alpha)}$ devient zéro. On a donc ici:

$$\widetilde{u''_{(\alpha)} u''_{(\alpha)}} = 0 \Rightarrow d_t(\overline{\rho u''_{(\alpha)} u''_{(\alpha)}}) = 0 . \quad (C.13)$$

Pour la dérivée seconde on obtient l'identité suivante:

$$\begin{aligned} d_t \left[d_t(\overline{\rho u''_{(\alpha)} u''_{(\alpha)}}) \right] &= 2 \left[\overline{\rho u''_{(\alpha)} d_{tt}(u''_{(\alpha)})} + \overline{\rho d_t(u''_{(\alpha)}) d_t(u''_{(\alpha)})} + \overline{u''_{(\alpha)} d_t(\rho) d_t(u''_{(\alpha)})} \right] \\ &\quad + \left[\overline{u''_{(\alpha)} u''_{(\alpha)} d_{tt}(\rho)} + 2 \overline{u''_{(\alpha)} d_t(u''_{(\alpha)}) d_t(\rho)} \right] , \end{aligned} \quad (C.14)$$

et en utilisant une fois de plus la relation (1.106), il vient:

$$\widetilde{u''_{(\alpha)} u''_{(\alpha)}} = 0 \Rightarrow d_t \left[d_t(\overline{\rho u''_{(\alpha)} u''_{(\alpha)}}) \right] = 2 \overline{\rho [d_t(u''_{(\alpha)})]^2} \geq 0 , \quad (C.15)$$

ce qui montre la réalisabilité forte pour les équations exactes.

C.3 La conformité des propositions avec les contraintes de la réalisabilité

Les remarques qui suivent sont valables uniquement pour des solutions régulières avec des gradients de vitesses moyennes bornés.

C.3.1 Les corrélations avec la pression

On considère ici les modèles pour la pression-déformation dans le cas d'un fluide compressible. Les propositions du paragraphe 1.4.3 constituent soit des modifications d'une fermeture classique, soit des termes supplémentaires. On suppose donc d'abord que le modèle de base est fortement réalisable. Dans le cas où une expression supplémentaire est introduite, on peut écrire:

$$\overline{p' (u''_{i,j} + u''_{j,i})} = \bar{p} (\Pi_{ij}^r + \Pi_{ij}^s)_{inc} + \bar{p} \Pi_{ij}^{comp} . \quad (C.16)$$

On a les cas suivants:

- Le modèle de Vandromme donné dans l'équation (1.37) s'écrit en axes principales de la tension de Reynolds:

$$\Pi_{(\alpha)(\alpha)}^{comp} = C_6 2 k b_{(\alpha)(\alpha)} \widetilde{u}_{k,k} . \quad (C.17)$$

Quand la valeur propre $\lambda_{(\alpha)}$ tend vers zéro, $b_{(\alpha)(\alpha)}$ tend vers la valeur de $-1/3$. La positivité de l'expression ne peut donc pas être garantie.

- Le modèle de El-Baz et Launder (1.40) donne dans le même cas:

$$\Pi_{(\alpha)(\alpha)}^{comp} = F_{El-Baz} \cdot \left[\frac{8}{9} k s_{kk} + \tilde{u}_{(\alpha),(\alpha)} \frac{3}{5} u''_{(\alpha)} \widetilde{u''_{(\alpha)}} + \frac{14}{20} u''_{(\alpha)} \widetilde{u''_{(\alpha)}} \widetilde{u''_k u''_l} \frac{\tilde{u}_{k,l}}{k} \right] . \quad (C.18)$$

A cause du terme $8/9 k s_{kk}$, ce modèle n'est pas réalisable.

- Les expressions de Rubesin (1.47), Sarkar (1.51) et Zeman (1.48) modélisent la trace de la pression-déformation, ils sont donc invariants. Puisqu'ils ne contiennent pas explicitement une fonction qui détecte un état limite (par exemple la fonction F du modèle de Lumley (A.4)), ils ne garantissent pas la positivité de la tension de Reynolds.

Les deux modifications de la partie déviatrice de la pression-déformation dues à Cambon *et al.* (1.44) et à Vreman (1.45) sont de la forme suivante:

$$\overline{p' \left(u''_{i,j} + u''_{j,i} \right)} = \bar{p} \left(\Pi_{ij}^r \right)_{inc} \cdot f^{comp} + \bar{p} \left(\Pi_{ij}^s \right)_{inc} , \quad (C.19)$$

où f^{comp} est une fonction positive et bornée des grandeurs invariantes. Cette approche ne modifie pas les propriétés de réalisabilité du modèle de base.

C.3.2 La dissipation

On se restreint ici au cas gaussien, où les équations pour k et ε peuvent être écrites de la manière suivante:

$$d_t(\bar{p}\varepsilon) = -\tilde{u}_{k,k} \bar{p}\varepsilon - \bar{p} \tilde{u}_{i,j} \widetilde{u''_i u''_j} C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \bar{p} \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon , \quad (C.20)$$

$$d_t(\bar{p}k) = -\tilde{u}_{k,k} \bar{p}k - \bar{p} \tilde{u}_{i,j} \widetilde{u''_i u''_j} - \bar{p}\varepsilon + \overline{p' u''_{k,k}} - \overline{u''_k \bar{p}_{,k}} , \quad (C.21)$$

où S_ε désigne l'ensemble des termes de compression moyenne du paragraphe 1.4.4.2.

C.3.2.1 La positivité de l'échelle de temps

En utilisant l'identité $d_t(\theta) = d_t(\bar{p}k)/(\bar{p}\varepsilon) - d_t(\bar{p}\varepsilon) \cdot \bar{p}k/(\bar{p}\varepsilon)^2$, l'équation de l'échelle de temps s'écrit avec les équations (C.20) et (C.21):

$$\begin{aligned} d_t(\theta) = & -\tilde{u}_{i,j} \widetilde{u''_i u''_j} \theta \frac{1}{k} (1 - C_{\varepsilon 1}) + (C_{\varepsilon 2} - 1) \\ & - S_\varepsilon \theta \frac{1}{\bar{p}\varepsilon} + \frac{\overline{p' u''_{k,k}}}{\bar{p}k} \theta - \frac{\overline{u''_k \bar{p}_{,k}}}{\bar{p}k} \theta \frac{1}{\bar{p}k} . \end{aligned} \quad (C.22)$$

Les résultats suivantes à propos de la positivité de l'échelle θ sont obtenues:

- Quand les corrélations de la deuxième ligne sont exclues, on retrouve la condition de Hérard [16] $C_{\varepsilon 2} \geq 1$ qui est nécessaire afin d'assurer que $d_t(\theta) \geq 0$ si $\theta = 0$.
- Dans le cas du modèle de El-Baz et Launder (1.64) pour le terme de destruction de la dissipation, où le coefficient $C_{\varepsilon 2}$ n'est pas constant, la condition de positivité s'écrit:

$$C_{\varepsilon 2})_{inc} \geq 1 + 1.6 M_t^2 , \quad (C.23)$$

ce qui donne une limite supérieure pour le nombre de Mach turbulent: $M_t \leq 0.76$ avec la valeur standard de $C_{\varepsilon 2})_{inc} = 1.92$; $M_t \leq 0.71$ pour la valeur de El-Baz et Launder [46] de $C_{\varepsilon 2})_{inc} = 1.8$

- Les modèles pour les termes liés à la compression moyenne sont de la forme $S_\varepsilon = \tilde{u}_{k,k} \bar{\rho} \varepsilon C$, ce qui garantit que cette contribution s'annule quand θ s'annule.
- Parmi les différentes représentations de la pression-dilatation, le modèle de El-Baz et Launder (1.42) donne la contribution suivante:

$$\frac{\overline{p'u''_{k,k}}}{\bar{\rho}k} \theta = F_{El-Baz} \left[\frac{12}{3} \tilde{u}_{k,k} + 4 b_{lk} s_{lk} \right] \theta \quad , \quad (C.24)$$

qui est évidemment en accord avec la condition de positivité.

En utilisant le modèle de Zeman (1.48), ce terme s'écrit:

$$\frac{\overline{p'u''_{k,k}}}{\bar{\rho}k} \theta = \frac{1}{2 f_2(M_t)} \left[\frac{\overline{p'p'}}{\bar{\rho}k} - f_1(M_t) \right] \quad , \quad (C.25)$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions positives. Cette proposition peut détruire la positivité de l'échelle de temps θ .

Le modèle de Sarkar *et al.* (1.51) produit la contribution suivante:

$$\frac{\overline{p'u''_{k,k}}}{\bar{\rho}k} \theta = \alpha_2 2 \tilde{u}_{i,j} b_{ij} M_t \theta + \alpha_3 M_t^2 \quad , \quad (C.26)$$

qui n'empêche pas la positivité de θ car α_3 est une constante positive.

- Les modèles pour le flux de masse présentés dans le paragraphe 1.4.6.1 ont tous la forme $\overline{u''_i} = \theta \cdot f(u''_i u''_j, \bar{\rho}, \tilde{S}_{kl}, M_t)$, ce qui n'affecte pas la positivité de θ .

C.3.2.2 La positivité de l'inverse de l'échelle de temps

L'inverse de l'échelle de temps θ^{-1} est obtenu par l'identité $d_t(\theta^{-1}) = -\theta^2 \cdot d_t(\theta)$, ce qui donne l'équation suivante:

$$\begin{aligned} d_t(\theta^{-1}) &= -\tilde{u}_{i,j} \widetilde{u''_i u''_j} \frac{1}{[\theta^{-1}]^3} \frac{1}{k} (1 - C_{\varepsilon 1}) + (C_{\varepsilon 2} - 1) \frac{1}{[\theta^{-1}]^2} \\ &\quad - S_\varepsilon \frac{1}{[\theta^{-1}]^3} \frac{1}{\bar{\rho} \varepsilon} + \frac{\overline{p'u''_{k,k}}}{\bar{\rho}k} \frac{1}{[\theta^{-1}]^3} - \frac{\overline{u''_k} \bar{p}_{,k}}{[\theta^{-1}]^3} \frac{1}{\bar{\rho}k} \quad . \end{aligned} \quad (C.27)$$

La positivité de la grandeur θ^{-1} est donc assurée dans tous les cas discutés dans le paragraphe précédente.

C.3.2.3 Implications pour la tension de Reynolds

Les modèles pour la dissipation dilatationnelle proposés par Sarkar *et al.* (1.65) et Zeman (1.66) sont de la forme $\varepsilon_d = k/\theta \cdot f(M_t)$, où la fonction f est positive et bornée. Les implications de ce type de modèle ne portent donc pas sur l'échelle de temps θ , mais sur l'équation de la tension de Reynolds. Les termes liés à la dissipation qui apparaissent dans cette équation s'écrivent:

$$\bar{\rho} \varepsilon \mathcal{A}_{ij} (b_{kl}, Re_l) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\rho} \varepsilon \quad . \quad (C.28)$$

Afin de préserver les propriétés de réalisabilité d'un modèle pour le tenseur $\mathcal{A}_{ij}$, la dissipation du premier terme et celle du deuxième doivent être les mêmes, c'est-à-dire que la dissipation totale $\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_d$ doit être utilisée dans le modèle de pression-déformation si elle est utilisée pour calculer la trace $2/3 \delta_{ij} \bar{\rho} \varepsilon$. Ceci n'est pas toujours vérifié dans la littérature (à comparer les références [67] et [53]).

C.3.3 Le flux de masse

A part des contraintes de la caractérisation entropique (annexe C.1), les implications pour l'équation de la dissipation (annexe C.3.2) et la réalisabilité jointe (suite à l'équation (1.106)) déjà discutées ailleurs, le flux de masse est également contraint par la réalisabilité de la tension de Reynolds. Il intervient dans l'équation de la tension de Reynolds par le terme suivant:

$$- \left[\overline{u''_i} \overline{p}_{,j} + \overline{u''_j} \overline{p}_{,i} \right] \quad . \quad (\text{C.29})$$

Afin de respecter la réalisabilité faible, cette contribution doit être positive lorsqu'une des déterminants du tenseur s'annule. En axes principales du tenseur on obtient la condition:

$$\lambda_{(\alpha)} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \overline{u''_{(\alpha)}} \overline{p}_{,(\alpha)} \geq 0 \quad . \quad (\text{C.30})$$

Les résultats concernant les différents modèles du paragraphe 1.4.6.1 sont les suivants:

- L'expression algébrique de Ristorcelli (1.94) ne s'annule pas quand la valeur propre $\lambda_{(\alpha)}$ s'annule puisque la forme tensorielle fait intervenir la déformation moyenne d'une manière non-linéaire. La positivité de la contribution $-2 \overline{u''_{(\alpha)}} \overline{p}_{,(\alpha)}$ n'est pas garantit et le modèle n'est donc pas réalisable.
- Les expression de transport par gradient isotropes (1.96) et (1.98) créent également une fermeture non-réalisable, puisque le coefficient de transport est invariant et il s'annule pas au même temps que la valeur propre $\lambda_{(\alpha)}$.
- Les expressions généralisées de transport par gradient (1.95) et (1.100) donnent un flux de masse de la forme suivante:

$$\overline{u''_i} = f(M_t, \theta) \cdot \widetilde{u''_i u''_j} \frac{\phi}{\phi}, \quad \phi = \{\bar{\rho}, \tilde{T}\} \quad . \quad (\text{C.31})$$

Quand on réécrit cette définition en axes principales de la tension de Reynolds, la seule contribution qui reste est la suivante:

$$\overline{u''_{(\alpha)}} = f(M_t, \theta) \cdot \widetilde{u''_{(\alpha)} u''_{(\alpha)}} \frac{\phi_{,(\alpha)}}{\phi} \quad , \quad (\text{C.32})$$

qui vérifie $\overline{u''_{(\alpha)}} = 0$ si $\lambda_{(\alpha)} = 0$. La dérivée temporelle de l'expression (C.32) s'écrit:

$$d_t(\overline{u''_{(\alpha)}}) = d_t \left[f(M_t, \theta) \frac{\phi_{,(\alpha)}}{\phi} \right] \cdot \widetilde{u''_{(\alpha)} u''_{(\alpha)}} + \left[f(M_t, \theta) \frac{\phi_{,(\alpha)}}{\phi} \right] \cdot 2 \overline{\rho u''_{(\alpha)}} d_t(u''_{(\alpha)}) / \bar{\rho} \quad , \quad (\text{C.33})$$

ce qui vérifie $d_t(\overline{u''_{(\alpha)}}) = 0$ si $\lambda_{(\alpha)} = 0$. On peut alors conclure que ce type de modèle pour le flux de masse turbulent conserve la réalisabilité forte d'une fermeture.

Annexe D

Analyse du système convectif

D.1 Les matrices du système convectif sous forme non-conservative

La matrice jacobienne des flux convectifs sous forme conservative s'écrit:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{Q}} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 0 & n_x & n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_x \Phi - u \vec{v} \vec{n} & -u n_x \Gamma_2 & u n_y - v n_x \Gamma_1 & n_x \Gamma_1 & n_x & 0 & n_y & -\Gamma_1 n_x \\ n_y \Phi - v \vec{v} \vec{n} & v n_x - u n_y \Gamma_1 & -v n_y \Gamma_2 & n_y \Gamma_1 & 0 & n_y & n_x & -\Gamma_1 n_y \\ \vec{v} \vec{n} \Phi - \vec{v} \vec{n} H_t & n_x H_t - \vec{v} \vec{n} \Gamma_1 u & n_y H_t - \vec{v} \vec{n} \Gamma_1 v & \gamma \vec{v} \vec{n} & u n_x & v n_y & v n_x + u n_y & -\Gamma_1 \vec{v} \vec{n} \\ -n_x (R_{11} u + R_{12} v) & +R_{11} n_x + R_{12} n_y & +R_{12} n_x + R_{22} n_y & & & & & \\ -n_y (R_{12} u + R_{22} v) & & & & & & & \\ -R_{11} \vec{v} \vec{n} & R_{11} n_x & R_{11} n_y & 0 & \vec{v} \vec{n} & 0 & 0 & 0 \\ -R_{22} \vec{v} \vec{n} & R_{22} n_x & R_{22} n_y & 0 & 0 & \vec{v} \vec{n} & 0 & 0 \\ -R_{12} \vec{v} \vec{n} & R_{12} n_x & R_{12} n_y & 0 & 0 & 0 & \vec{v} \vec{n} & 0 \\ -k \vec{v} \vec{n} & k n_x & k n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & \vec{v} \vec{n} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.1})$$

On a utilisé les définition suivantes:

$$H_t \equiv e_T + \frac{p}{\rho}, \quad p \equiv \Gamma_1 \left\{ \rho e_T - \frac{1}{2\rho} (\rho u_i)^2 - \rho k \right\}, \quad \Phi \equiv \frac{\Gamma_1}{2} u_i^2, \quad (\text{D.2})$$

pour l'enthalpie totale, la pression thermodynamique et une fonction de l'énergie cinétique moyen-ne; on note d'ailleurs $\Gamma_1 \equiv \gamma - 1$ et $\Gamma_2 \equiv \gamma - 2$. La contribution issue du terme de production s'écrit:

$$G \vec{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2(n_x R_{11} u + n_y R_{12} u) & 2n_x R_{11} + 2R_{12} n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2(n_x R_{12} v + n_y R_{22} v) & 0 & 2R_{12} n_x + 2n_y R_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_{11} v n_x - R_{12} u n_x & R_{12} n_x + n_y R_{22} & n_x R_{11} + R_{12} n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_{12} v n_y - R_{22} u n_y & & & & & & & \\ -R_{11} u n_x - R_{12} v n_x & R_{11} n_x + n_y R_{12} & n_x R_{12} + R_{22} n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_{12} u n_y - R_{22} v n_y & & & & & & & \end{bmatrix}. \quad (\text{D.3})$$

D.2 Positivité du déterminant de la tension de Reynolds

On considère le cas où les six premières valeurs propres de l'équation (2.9) sont identiques, donc le cas où l'expression R_{nn} est nulle. Dans cette situation la matrice du système (2.7) n'est plus diagonalisable, car il n'existe que quatre vecteurs propres associés qui sont linéairement indépendants.

Si le tenseur des tensions turbulentes est réalisable, on peut réécrire la définition de R_{nn} (2.10) dans les axes principaux de celui-ci avec un nouveau vecteur unitaire $\vec{n}'$ et des valeurs propres $\lambda_{(\alpha)}$ non-négatives:

$$R_{nn} = \vec{n}'^T \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{bmatrix} \vec{n}' = \lambda_{(1)} n_x'^2 + \lambda_{(2)} n_y'^2 \quad . \quad (\text{D.4})$$

Les composantes n_x' et n_y' ne peuvent pas être nulles simultanément. Pour retrouver une valeur de R_{nn} nulle il faudrait donc qu'au moins une des valeurs propres $\lambda_{(\alpha)}$ soit nulle. Dans ce cas, le déterminant δ_2^3 du tenseur des corrélations doubles serait également nul, car $\delta_2^3 = \lambda_{(1)} \lambda_{(2)}$.

Il faut donc montrer que le déterminant du tenseur des tensions ne peut pas être nul. Pour cela, on écrit l'équation de transport des corrélations doubles dans notre système de convection (2.4), en utilisant la conservation de la masse:

$$(R_{ij})_{,t} + u_k (R_{ij})_{,k} + R_{ik} (u_j)_{,k} + R_{jk} (u_i)_{,k} = 0 \quad . \quad (\text{D.5})$$

L'équation d'évolution pour le déterminant s'écrit:

$$(\delta_2^3)_{,t} + \tilde{u}_k (\delta_2^3)_{,k} = 2\delta_2^3 \tilde{u}_{k,k} \quad . \quad (\text{D.6})$$

Par intégration de l'équation (D.6) on obtient:

$$\delta_2^3(x, t) = \delta_2^3(x_0, t_0) \cdot \exp \left(2 \int_{t_0}^t u_{k,k} dt \right) \quad . \quad (\text{D.7})$$

Le résultat (D.7) signifie que la valeur du déterminant δ_2^3 le long d'une ligne de courant ne peut pas devenir nulle dans des intervalles finis si sa valeur initiale n'est pas nulle; ceci sous la condition que l'intégration peut être effectuée. En conclusion, on a donc établi que la diagonalisabilité de la matrice du système est assurée par des valeurs initiales des corrélations doubles de vitesse qui sont *over-realisable* et qui ont un déterminant non-nul.

D.3 Diagonalisation du système de convection

Afin de faciliter des manipulations matricielles, on peut transformer le système en un système qui régit des variables "primitives":

$$\vec{P} = [\rho, u, v, p, R_{11}, R_{22}, R_{12}, k]^T \quad . \quad (\text{D.8})$$

La transformation par les matrices de passages

$$M = \frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u^2+v^2}{2} + k & \rho u & \rho v & \frac{1}{\Gamma_1} & 0 & 0 & 0 & \rho \\ R_{11} & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ R_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ R_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}, \quad (\text{D.9})$$

et

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \rho^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(u^2+v^2)\Gamma_1}{2} & -u\Gamma_1 & -v\Gamma_1 & \Gamma_1 & 0 & 0 & 0 & -\Gamma \\ -\frac{R_{11}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{R_{22}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 \\ -\frac{R_{12}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 \\ -\frac{k}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.10})$$

nous mène au nouveau système suivant:

$$\partial_t \vec{P} + \tilde{A} \nabla \vec{P} = 0, \quad \tilde{A} \equiv M \cdot A \vec{n} \cdot M^{-1}. \quad (\text{D.11})$$

On se place ensuite dans un repère locale $[n, t]$ qui est aligné avec le vecteur $\vec{n}$, c'est-à-dire que l'axe $\vec{n}$ est normal à l'interface de la cellule d'intégration, l'axe $\vec{t}$ est tangentiel. Par cette rotation du repère,

$$\tilde{\tilde{A}} = T \tilde{A} \cdot T^{-1}, \quad \vec{\tilde{P}} = T \cdot \vec{P}, \quad (\text{D.12})$$

utilisant les matrices géométriques:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n_y & n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_x^2 & n_y^2 & 2 n_x n_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_y^2 & n_x^2 & -2 n_x n_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.13})$$

et

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & -n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_y & n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_x^2 & n_y^2 & -2 n_x n_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_y^2 & n_x^2 & 2 n_x n_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_x n_y & -n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.14})$$

on obtient le système suivant:

$$\partial_t \vec{P} + \tilde{A} \nabla \vec{P} = 0, \quad \vec{P} = [\rho, u_n, u_t, p, R_{nn}, R_{tt}, R_{nt}, k]^T. \quad (\text{D.15})$$

La matrice du système quasi-linéaire écrite en variables primitives dans ce repère local est maintenant dans une forme considérablement simplifiée, à savoir:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} u_n & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R_{nn}}{\rho} & u_n & 0 & \frac{1}{\rho} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R_{nt}}{\rho} & 0 & u_n & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \rho \tilde{c}^2 & 0 & u_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2R_{nn} & 0 & 0 & u_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2R_{nt} & 0 & 0 & u_n & 0 & 0 \\ 0 & R_{nt} & R_{nn} & 0 & 0 & 0 & u_n & 0 \\ 0 & R_{nn} & R_{nt} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_n \end{bmatrix}. \quad (\text{D.16})$$

On obtient la diagonalisation $\hat{A} = L \Lambda L^{-1}$ par les matrices de passages qui sont liées aux vecteurs propres $\vec{r}$ et $\vec{l}$ par les relations suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \left[\hat{A} - \bar{\bar{I}} \lambda_i \right] \cdot \vec{r}^i &= 0 \Rightarrow L_{ki} = r_k^i \\ \vec{l}^i \cdot \left[\hat{A} - \bar{\bar{I}} \lambda_i \right] &= 0 \Rightarrow L_{ik}^{-1} = l_k^i \end{aligned} \right\} / L \cdot L^{-1} = \bar{\bar{I}}. \quad (D.17)$$

Ces matrices de passage s'écrivent

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2 R_{nn}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{nn} & -\frac{\rho c^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_{nn}^2 + R_{nt}^2 & 0 & -2 R_{nt} R_{nn} & 2 R_{nn}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{nt}^2 & R_{nn}^2 & -2 R_{nt} R_{nn} & 0 \\ -\frac{R_{nt} c^2}{2} & \sqrt{R_{nn}} R_{nt} \rho & -\frac{\sqrt{R_{nn}} \rho (c_2^2 - R_{nn})}{2} & R_{nt} & \rho R_{nt} & 0 & -\frac{\rho (c_2^2 - R_{nn})}{2} & 0 \\ -\frac{R_{nt} c^2}{2} & -\sqrt{R_{nn}} R_{nt} \rho & \frac{\sqrt{R_{nn}} \rho (c_2^2 - R_{nn})}{2} & R_{nt} & \rho R_{nt} & 0 & -\frac{\rho (c_2^2 - R_{nn})}{2} & 0 \\ R_{nn} & c_2 \rho & 0 & 1 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ R_{nn} & -c_2 \rho & 0 & 1 & \rho & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (D.18)$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\rho (c_2^2 - R_{nn})}{2 R_{nn} c_2^2} & -\frac{1}{R_{nn} c_2^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{R_{nn}} \rho (c_2^2 - R_{nn})} & \frac{1}{\sqrt{R_{nn}} \rho (2 R_{nn} + c^2)} \\ -\frac{\rho c^2}{2 c_2^2} & \frac{3}{c_2^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{R_{nn}}{c_2^2 \rho} & -\frac{2}{c_2^2 \rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(c^2 + R_{nn}) R_{nt}^2}{R_{nn}^2 \rho c_2^2} & \frac{4 R_{nt}^2}{R_{nn}^2 \rho c_2^2} & 0 & R_{nn}^{-2} & -\frac{2 R_{nt}}{\rho R_{nn} (c_2^2 - R_{nn})} & -\frac{2 R_{nt}}{\rho R_{nn} (c_2^2 - R_{nn})} \\ -\frac{(c_2^2 - R_{nn}) R_{nt}}{2 R_{nn} c_2^2} & \frac{R_{nt}}{\rho R_{nn} c_2^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho (c_2^2 - R_{nn})} & -\frac{1}{\rho (c_2^2 - R_{nn})} \\ -\frac{R_{nt}^2 c^2 + R_{nn}^3 + R_{nt}^2 R_{nn}}{2 R_{nn}^2 c_2^2} & -\frac{R_{nn}^2 - 2 R_{nt}^2}{R_{nn}^2 \rho c_2^2} & \frac{1}{2 R_{nn}^2} & 0 & -\frac{R_{nt}}{\rho R_{nn} (c_2^2 - R_{nn})} & -\frac{R_{nt}}{\rho R_{nn} (c_2^2 - R_{nn})} \end{bmatrix}, \quad (D.19)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2 c_2^2} & \frac{1}{2 c_2^2} \\ \frac{1}{2 \rho c_2} & -\frac{1}{2 \rho c_2} \\ \frac{R_{nt}}{\rho (c_2^2 - R_{nn}) c_2} & -\frac{R_{nt}}{\rho (c_2^2 - R_{nn}) c_2} \\ \frac{c^2}{2 c_2^2} & \frac{c^2}{2 c_2^2} \\ \frac{R_{nn}}{c_2^2 \rho} & \frac{R_{nn}}{c_2^2 \rho} \\ \frac{2 R_{nt}^2}{\rho c_2^2 (c_2^2 - R_{nn})} & \frac{2 R_{nt}^2}{\rho c_2^2 (c_2^2 - R_{nn})} \\ \frac{(c_2^2 + R_{nn}) R_{nt}}{2 \rho c_2^2 (c_2^2 - R_{nn})} & \frac{(c_2^2 + R_{nn}) R_{nt}}{2 \rho c_2^2 (c_2^2 - R_{nn})} \\ \frac{R_{nn} c^2 + 2 R_{nn}^2 + 2 R_{nt}^2}{2 \rho c_2^2 (c_2^2 - R_{nn})} & \frac{R_{nn} c^2 + 2 R_{nn}^2 + 2 R_{nt}^2}{2 \rho c_2^2 (c_2^2 - R_{nn})} \end{bmatrix},$$

où on a utilisé l'abréviation $c_2 = \sqrt{3 R_{nn} + c^2}$. Afin d'effectuer la diagonalisation du système de

départ (2.7) par la formule $A\vec{n} = \mathcal{R} \cdot \Lambda \cdot \mathcal{R}^{-1}$, on obtient finalement les expressions suivantes:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= M^{-1} \cdot T^{-1} \cdot L, \\ \mathcal{R}^{-1} &= L^{-1} \cdot T \cdot M.\end{aligned}\tag{D.20}$$

D.4 La condition de saut approchée associée au chemin linéaire

Pour un système non-conservatif sous forme quasi-linéaire,

$$\partial_t \vec{V} + C \partial_x \vec{V} = 0 \quad , \tag{D.21}$$

les relations de Rankine-Hugoniot généralisées s'écrivent d'après Le Floch [130]:

$$\int_0^1 \left\{ -\sigma \cdot \bar{I} + C(\phi) \right\} \partial_\xi \phi \, d\xi = 0 \quad , \tag{D.22}$$

où $\phi = \phi(\xi, \vec{V}_l, \vec{V}_r)$ représente le chemin qui connecte les deux états à gauche et à droite d'une discontinuité (voir la figure D.1). En choisissant un chemin linéaire, $\phi = [\vec{V}] \cdot \xi + \vec{V}_l$, la relation (D.22) devient:

$$-\sigma [\vec{V}] + [\vec{V}] \int_0^1 C(\phi) \, d\xi = 0 \quad . \tag{D.23}$$

Il reste à définir les variables sur lesquelles on applique le chemin linéaire, c'est-à-dire à déterminer les composantes du vecteur $\vec{V}$. Nous suivons le choix de Hérard *et al.* [96] qui se traduit à notre cas par:

$$\vec{V} = \left[\frac{1}{\rho}, u_n, u_t, p, \rho R_{nn}, \rho R_{tt}, \rho R_{nt}, \rho k \right]^T . \tag{D.24}$$

La matrice C est calculée par la transformation $C = B^{-1} \hat{A} B$, où la matrice de passage est définie par la relation $B = \partial \vec{Q} / \partial \vec{V}$. On obtient donc:

$$C = \begin{bmatrix} u_n & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_n & 0 & \frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_n & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\rho R_{nn} & 0 & 0 & u_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho R_{tt} & 2\rho R_{nt} & 0 & 0 & u_n & 0 & 0 \\ 0 & 2\rho R_{nt} & \rho R_{nn} & 0 & 0 & 0 & u_n & 0 \\ 0 & \rho k + \rho R_{nn} & \rho R_{nt} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_n \end{bmatrix} . \tag{D.25}$$

Puisque les composantes C_{ij} sont des fonctions linéaires des composantes du vecteur $\vec{V}$, l'intégration dans la relation (D.23) donne une moyenne arithmétique pour chaque composante C_{ij} , à savoir:

$$-\sigma [\vec{V}] + [\vec{V}] \cdot C(\bar{\vec{V}}) = 0 \quad . \tag{D.26}$$

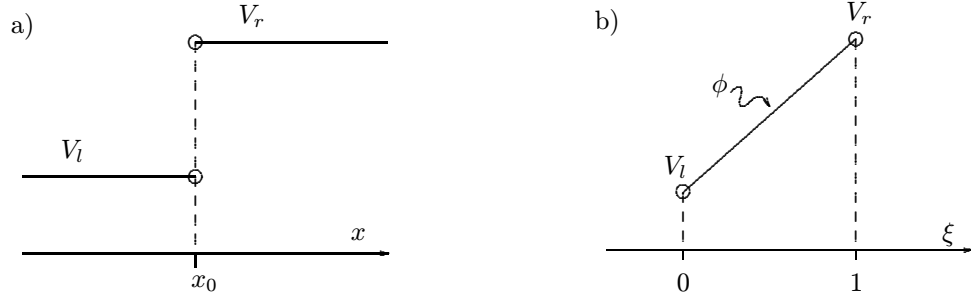


Fig. D.1: a) Une discontinuité de la variable V dans le plan (x, V) . b) La connexion des états par un chemin linéaire ϕ dans le plan (ξ, V) .

La retransformation en variables $\vec{Q}$ donne ensuite:

$$-\sigma [\vec{Q}] + [\vec{F}] + \overline{G} [\vec{Q}] = 0 \quad , \quad (\text{D.27})$$

avec la matrice $\overline{G}$ qui s'écrit:

$$\overline{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2\overline{u}_n \overline{\rho R_{nn}}}{\overline{\rho}} & 2\frac{\overline{\rho R_{nn}}}{\overline{\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\frac{\overline{u}_t \overline{\rho R_{nt}}}{\overline{\rho}} & 0 & 2\frac{\overline{\rho R_{nt}}}{\overline{\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\overline{u}_t \overline{\rho R_{nn}}}{\overline{\rho}} & \frac{\overline{\rho R_{nt}}}{\overline{\rho}} & \frac{\overline{\rho R_{nn}}}{\overline{\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\overline{u}_n \overline{\rho R_{nt}}}{\overline{\rho}} & \frac{\overline{\rho R_{nn}}}{\overline{\rho}} & \frac{\overline{\rho R_{nt}}}{\overline{\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\overline{u}_n \overline{\rho R_{nn}}}{\overline{\rho}} & \frac{\overline{\rho R_{nn}}}{\overline{\rho}} & \frac{\overline{\rho R_{nt}}}{\overline{\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\overline{u}_t \overline{\rho R_{nt}}}{\overline{\rho}} & \frac{\overline{\rho R_{nn}}}{\overline{\rho}} & \frac{\overline{\rho R_{nt}}}{\overline{\rho}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.28})$$

On rappelle que la barre ici correspond à la moyenne arithmétique.

La relation (D.27) montre que la théorie du chemin linéaire est consistante avec les relations de saut de Rankine-Hugoniot classiques pour les équations de masse, quantité de mouvement et énergie. Uniquement les relations pour les composantes du tenseur de Reynolds représentent des approximations.

D.5 Solution des relations de saut

La solution des relations de saut (D.27) outre que pour les variables traitées dans le paragraphe 2.2.1.2 s'écrit:

$$[u_t] = \frac{R_{nt_l} \rho_l [u_n] \frac{2}{\gamma-1} (z - \beta)}{\rho_l R_{nn_l} \frac{2}{\gamma-1} (z - \beta) + p_l \gamma (z - 3)}, \quad (\text{D.29})$$

$$[R_{tt}] = \frac{4(\gamma-1)(z-\beta)R_{nt_i}^2\rho_l}{z(\rho_l R_{nn_i} 2(\gamma-1)(z-\beta) + p_l \gamma(z-3))^2} \cdot \left\{ p_l (\gamma(1-z^2) + 4z(\gamma-1)) \right. \\ \left. + \rho_l R_{nn_i} 2(\gamma-1)(z-\beta)(z-1) \left(1 + \frac{3(z-1)}{z(2-z)} \right) \right\}, \quad (D.30)$$

$$[R_{nt}] = -R_{nt_i} \frac{\rho_l R_{nn_i} 2(\gamma-1)(z-\beta) \left(\frac{(z-1)(2-z)-3}{z(2-z)} \right) + p_l \gamma(z-1)(z+1)}{z(\rho_l R_{nn_i} 2(\gamma-1)(z-\beta) + p_l \gamma(z-3))}, \quad (D.31)$$

$$[k] = \frac{1}{2} ([R_{nn}] + [R_{tt}]) \quad . \quad (D.32)$$

Pour le flux d'entropie, ces résultats impliquent:

$$-\sigma [\rho s] + [u_n \rho s] = -[u_n] \frac{\rho_l}{z-1} [s] \geq 0 \quad , \quad (D.33)$$

puisque

- $[u_n] \leq 0$ (voir la relation (2.29)),
- $[s] = \log \left(\frac{p_r}{p_l} \left(\frac{\rho_l}{\rho_r} \right)^\gamma \right) \quad \begin{cases} > 0 & \text{si } z > 1 \\ < 0 & \text{si } z < 1 \end{cases} \quad .$

D.6 Les coefficients de la projection de la différence des variables sur les vecteurs propres à droite

La résolution du système algébrique, linéaire (2.50) donne pour les coefficients β_k :

$$\beta_1 = (-R_{nn} [\rho] c^2 + [\rho R_{nn}] c^2 - 2R_{nn} [\rho k] + 2[\rho k] \gamma R_{nn} + [\rho] u_t^2 R_{nn} \\ - [\rho] u_n^2 \gamma R_{nn} + [\rho] u_n^2 R_{nn} + 2[\rho e_T] R_{nn} + 2[\rho u_t] \gamma u_t R_{nn} - 2[\rho u_t] u_t R_{nn} \\ - 2[\rho e_T] \gamma R_{nn} + 2[\rho u_n] \gamma u_n R_{nn} - 2[\rho u_n] u_n R_{nn} - 3R_{nn} R_{nn} [\rho] \\ - [\rho] u_t^2 \gamma R_{nn} + [\rho R_{nn}] R_{nn}) / \rho / c_2^2 \quad (D.34)$$

$$\beta_2 = -1/\rho (2c^2 R_{nt} [\rho R_{nt}] - c^2 [\rho R_{tt}] R_{nn} + c^2 R_{tt} [\rho] R_{nn} + 2R_{nt}^2 [\rho] u_t^2 \\ - 4R_{nt}^2 [\rho u_t] u_t - 4R_{nt}^2 [\rho u_n] u_n + 4R_{nt}^2 [\rho u_t] \gamma u_t - 2R_{nt}^2 [\rho] u_t^2 \gamma \\ - 3[\rho R_{tt}] R_{nn} R_{nn} + 6R_{nt} [\rho R_{nt}] R_{nn} + 3R_{tt} [\rho] R_{nn} R_{nn} + 4R_{nt}^2 [\rho u_n] \gamma u_n \\ - 4R_{nt}^2 [\rho k] + 2R_{nt}^2 [\rho] u_n^2 + 4R_{nt}^2 [\rho k] \gamma - 4R_{nt}^2 [\rho R_{nn}] + 4R_{nt}^2 [\rho e_T] \\ - 2R_{nt}^2 [\rho] u_n^2 \gamma - 4R_{nt}^2 [\rho e_T] \gamma) / c_2^2 / R_{nn} \quad (D.35)$$

$$\beta_3 = 1/2 (2[\rho] c^2 - [\rho] u_n^2 \gamma + [\rho] u_n^2 - 2[\rho e_T] \gamma - [\rho] u_t^2 \gamma \\ - 2[\rho k] + 6R_{nn} [\rho] - 2[\rho R_{nn}] + 2[\rho u_n] \gamma u_n \\ - 2[\rho u_n] u_n + 2[\rho k] \gamma + 2[\rho u_t] \gamma u_t + 2[\rho e_T] + [\rho] u_t^2 - 2[\rho u_t] u_t) / c_2^2 \quad (D.36)$$

$$\beta_4 = -1/2 (-2R_{nn} R_{nn} [\rho u_t] \gamma u_t - 2R_{nn} R_{nn} [\rho u_n] \gamma u_n + 4R_{nt}^2 [\rho u_t] \gamma u_t \\ + R_{nn} R_{nn} [\rho] u_n^2 \gamma - 4R_{nn} R_{nn} [\rho k] - 2R_{nt}^2 [\rho] u_n^2 \gamma - 2R_{nt}^2 [\rho] u_t^2 \gamma \\ - R_{nn} R_{nn} [\rho] u_n^2 + 2R_{nt}^2 [\rho] u_n^2 + 2R_{nn} R_{nn} [\rho u_n] u_n + 4R_{nt}^2 [\rho k] \gamma \\ + 2c^2 R_{nn} k [\rho] - 4R_{nt}^2 [\rho k] - 2R_{nn} R_{nn} [\rho e_T] + 4R_{nt}^2 [\rho u_n] \gamma u_n + 4R_{nt}^2 [\rho e_T] \\ + 2R_{nn} R_{nn} [\rho R_{nn}] - 4R_{nt}^2 [\rho R_{nn}] + R_{nn} R_{nn} [\rho] u_t^2 \gamma + 2R_{nt}^2 [\rho] u_t^2$$

$$\begin{aligned}
& +2R_{nn}R_{nn}[\rho u_t]u_t - 4R_{nt}^2[\rho u_t]u_t - 4R_{nt}^2[\rho u_n]u_n - R_{nn}R_{nn}[\rho]u_t^2 \\
& -2R_{nn}R_{nn}[\rho k]\gamma + 6R_{nn}R_{nn}k[\rho] + 2c^2R_{nt}[\rho R_{nt}] - 2c^2R_{nn}[\rho k] \\
& -4R_{nt}^2[\rho e_T]\gamma + 2R_{nn}R_{nn}[\rho e_T]\gamma + 6R_{nt}[\rho R_{nt}]R_{nn})/\rho/c_2^2/R_{nn}
\end{aligned} \tag{D.37}$$

$$\begin{aligned}
\beta_5 = & 1/2 \left([\rho u_t] \sqrt{R_{nn}}c^2 + [\rho R_{nt}]c^2 - u_t[\rho] \sqrt{R_{nn}}c^2 - 2R_{nt}[\rho u_t]u_t \right. \\
& + 2R_{nt}[\rho u_n]\gamma u_n + R_{nt}[\rho]u_t^2 + 2\sqrt{R_{nn}}[\rho]uR_{nt} - R_{nt}[\rho]u_n^2\gamma \\
& - 2R_{nt}[\rho u_n]u_n + 2R_{nt}[\rho k]\gamma + 2R_{nn}^{3/2}[\rho u_t] - R_{nt}[\rho]u_t^2\gamma + 2R_{nt}[\rho e_T] \\
& + R_{nt}[\rho]u_n^2 - 2R_{nt}[\rho e_T]\gamma + 2[\rho R_{nt}]R_{nn} - 2R_{nt}[\rho R_{nn}] - 2R_{nn}^{3/2}u_t[\rho] \\
& \left. - 2R_{nt}[\rho k] - 2\sqrt{R_{nn}}[\rho u_n]R_{nt} + 2R_{nt}[\rho u_t]\gamma u_t \right) / (2\rho R_{nn} + \rho c^2) / R_{nn}
\end{aligned} \tag{D.38}$$

$$\begin{aligned}
\beta_6 = & -1/2 \left([\rho R_{nt}]c^2 - [\rho u_t] \sqrt{R_{nn}}c^2 + u_t[\rho] \sqrt{R_{nn}}c^2 + 2[\rho R_{nt}]R_{nn} \right. \\
& + R_{nt}[\rho]u_n^2 - R_{nt}[\rho]u_t^2\gamma + 2R_{nt}[\rho k]\gamma - 2R_{nt}[\rho u_n]u_n - R_{nt}[\rho]u_n^2\gamma \\
& - 2R_{nt}[\rho e_T]\gamma + 2R_{nt}[\rho u_t]\gamma u_t - 2R_{nt}[\rho u_t]u_t + R_{nt}[\rho]u_t^2 - 2R_{nt}[\rho k] \\
& - 2R_{nt}[\rho R_{nn}] + 2R_{nn}^{3/2}u_t[\rho] + 2R_{nt}[\rho e_T] - 2\sqrt{R_{nn}}[\rho]u_nR_{nt} \\
& \left. + 2R_{nt}[\rho u_n]\gamma u_n + 2\sqrt{R_{nn}}[\rho u_n]R_{nt} - 2R_{nn}^{3/2}[\rho u_t] \right) / \rho / R_{nn} / (2R_{nn} + c^2)
\end{aligned} \tag{D.39}$$

$$\begin{aligned}
\beta_7 = & - \left(2[\rho u_n]\gamma u_n - 2[\rho u_n]u_n - 2c_2[\rho u_n] + 2[\rho u_t]\gamma u_t - 2[\rho u_t]u_t \right. \\
& - 2[\rho e_T]\gamma + 2[\rho e_T] - [\rho]u_n^2\gamma + [\rho]u_n^2 + 2c_2u_n[\rho] - [\rho]u_t^2\gamma + [\rho]u_t^2 \\
& \left. + 2[\rho k]\gamma - 2[\rho k] - 2[\rho R_{nn}] \right) / (\rho c_2^2(c_2^2 - R_{nn}))
\end{aligned} \tag{D.40}$$

$$\begin{aligned}
\beta_8 = & - \left(-[\rho]u_t^2\gamma + 2[\rho u_t]\gamma u_t + 2[\rho u_n]\gamma u_n - 2c_2u_n[\rho] - 2[\rho k] + 2[\rho e_T] \right. \\
& - 2[\rho R_{nn}] + 2c_2[\rho u_n] + [\rho]u_n^2 - 2[\rho u_n]u_n + 2[\rho k]\gamma - 2[\rho e_T]\gamma \\
& \left. + [\rho]u_t^2 - 2[\rho u_t]u_t - [\rho]u_n^2\gamma \right) / (\rho c_2^2(c_2^2 - R_{nn}))
\end{aligned} \tag{D.41}$$

On rappelle que les crochets signifient la différence des variables, à savoir: $[\phi] = \phi_j - \phi_i$. De plus, toutes les variables autre qu'entre crochets sont calculées en fonction de la moyenne arithmétique des composantes du vecteur $\vec{Y}$; par exemple $\rho u_n = (\rho_i + \rho_j)/2 \cdot (u_{n_i} + u_{n_j})/2$.

D.7 La diagonalisation du pseudo-système de convection

La diagonalisation de la jacobienne $J = \partial \vec{F}_c^1 / \partial \vec{Q}^1$ du pseudo-système de convection (2.55) s'écrit:

$$J = \mathcal{R}_c \cdot \Lambda^c \cdot \mathcal{R}_c^{-1} \quad , \tag{D.42}$$

où Λ^c est donné par la relation (2.59). Les matrices de passages s'écrivent:

$$\mathcal{R}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c^2} & 0 \\ u & n_y & \frac{u+n_x c}{c^2} & \frac{u-n_x c}{c^2} & 0 \\ v & -n_x & \frac{v+n_y c}{c^2} & \frac{v-n_y c}{c^2} & 0 \\ q^2 + k & (un_y - vn_x) & \frac{H_t}{c^2} + \frac{\vec{v}\vec{n}}{c} & \frac{H_t}{c^2} - \frac{\vec{v}\vec{n}}{c} & 1 \\ k & 0 & \frac{k}{c^2} & \frac{k}{c^2} & 1 \end{bmatrix} \quad , \tag{D.43}$$

et

$$\mathcal{R}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - q^2 \frac{\Gamma_1}{c^2} & u \frac{\Gamma_1}{c^2} & v \frac{\Gamma_1}{c^2} & -\frac{\Gamma_1}{c^2} & \frac{\Gamma_1}{c^2} \\ vn_x - un_y & n_y & -n_x & 0 & 0 \\ \frac{q^2 \Gamma_1}{2} - \frac{c \bar{v} \bar{n}}{2} & \frac{n_x c}{2} - \frac{u \Gamma_1}{2} & \frac{n_y c}{2} - \frac{v \Gamma_1}{2} & \frac{\Gamma_1}{2} & -\frac{\Gamma_1}{2} \\ \frac{q^2 \Gamma_1}{2} + \frac{c \bar{v} \bar{n}}{2} & -\frac{n_x c}{2} - \frac{u \Gamma_1}{2} & -\frac{n_y c}{2} - \frac{v \Gamma_1}{2} & \frac{\Gamma_1}{2} & -\frac{\Gamma_1}{2} \\ -k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.44})$$

en notant $q^2 = (u^2 + v^2)/2$.

D.8 La moyenne de Roe pour le pseudo-système de convection

On montre ici la construction de la matrice de décentrement qui vérifie les trois propriétés de Roe pour un cas monodimensionnel. L'extension en plusieurs dimensions ne change pas le résultat.

On définit d'abord un vecteur paramétrique (en notant $H_t \equiv e_t + p/\rho$)

$$\vec{z} = \sqrt{\rho} [1, u, H_t, k]^T, \quad (\text{D.45})$$

qui permet d'exprimer les variables $\vec{Q}^1$ et les flux $\vec{F}_c^1$ (donnés par (2.58)) par des fonctions quadratiques de $\vec{z}$:

$$\vec{Q}^1 = \begin{bmatrix} z_1^2 \\ z_1 z_2 \\ \frac{z_1 z_3}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma} [z_2^2/2 + z_1 z_4] \\ z_1 z_4 \end{bmatrix}, \quad \vec{F}_c^1 = \begin{bmatrix} z_1 z_2 \\ z_2^2 \frac{\gamma+1}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma} (z_1 z_3 - z_1 z_4) \\ z_3 z_2 \\ z_4 z_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.46})$$

En utilisant le théorème de valeurs moyennes, à savoir:

$$[a \cdot b] = \bar{a} [b] + \bar{b} [a], \quad (\text{D.47})$$

on peut exprimer le saut des variables par la relation suivante:

$$[\vec{Q}^1] = \bar{\bar{B}} (\vec{z}_j - \vec{z}_i), \quad (\text{D.48})$$

où la matrice $\bar{\bar{B}}$ est définie par

$$\bar{\bar{B}} = \begin{bmatrix} 2\bar{z}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_1 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{z}_3}{\gamma} + \bar{z}_4 \frac{\gamma-1}{\gamma} & \bar{z}_2 \frac{\gamma-1}{\gamma} & \frac{\bar{z}_1}{\gamma} & \bar{z}_1 \frac{\gamma-1}{\gamma} \\ \bar{z}_4 & 0 & 0 & \bar{z}_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.49})$$

De même pour les flux:

$$[\vec{F}_c^1] = \bar{\bar{C}} (\vec{z}_j - \vec{z}_i), \quad (\text{D.50})$$

avec

$$\overline{\overline{C}} = \begin{bmatrix} \overline{z}_2 & \overline{z}_1 & 0 & 0 \\ (\overline{z}_3 - \overline{z}_4) \frac{\gamma-1}{\gamma} & \overline{z}_2 \frac{\gamma+1}{\gamma} & \overline{z}_1 \frac{\gamma-1}{\gamma} & -\overline{z}_1 \frac{\gamma-1}{\gamma} \\ \overline{z}_1 \frac{\gamma-1}{\gamma} & & & \\ 0 & \overline{z}_4 & 0 & \overline{z}_2 \end{bmatrix} . \quad (\text{D.51})$$

En substituant ces relations dans la définitions de la propriété III de Roe qui s'écrit $\mathcal{A} \cdot [\vec{Q}^1] = [\vec{F}_c^1]$, on obtient:

$$\mathcal{A} = \overline{\overline{C}} \cdot \overline{\overline{B}}^{-1} . \quad (\text{D.52})$$

La matrice $\mathcal{A}$ qui est donnée par l'expression (D.52) correspond à la matrice jacobienne J du système si on calcule les variables $\vec{Y}^c$ par une moyenne pondérée par la masse volumique:

$$\hat{Y}^c = \frac{\sqrt{\rho_i} Y_i^c + \sqrt{\rho_j} Y_j^c}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}} , \quad \vec{Y}^c = [u, H_t, k]^T . \quad (\text{D.53})$$

On remarque que la forme de la moyenne de Roe est ici identique à celle de la dynamique de gaz.

Annexe E

Quelques détails numériques

E.1 Construction de la matrice implicite pour un scalaire passif

Le calcul de la matrice implicite pour les variables principales est assez standard. On montre ici les expressions pour les variables qui sont considérées comme scalaires passifs vis-à-vis la convection. Selon le schéma (2.88) on doit dériver le flux convectif $\mathcal{F}^{\rho S}$ pour chaque scalaire ρS . On rappelle d'abord les fonctions de flux du paragraphe 2.2.3:

$$\mathcal{F}_{ij}^{\rho S} = \mathcal{F}_{ij}^{\rho}(\vec{Q}_i, \vec{Q}_j) \cdot \frac{(\rho S)_m}{\rho_m} \quad \left\{ \begin{array}{ll} m = i & \text{si } \mathcal{F}_{ij}^{\rho} \cdot \vec{n}_{ij} > 0 \\ m = j & \text{si } \mathcal{F}_{ij}^{\rho} \cdot \vec{n}_{ij} < 0 \end{array} \right. , \quad (\text{E.1})$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ij}^{\rho} &= \left\{ F(\vec{Q}_j^1) - J^+(\vec{Q}^1(\hat{Y}_c)) \cdot (\vec{Q}_j^1 - \vec{Q}_i^1) \right\}_{\text{composante1}} \\ &= \left\{ J(\vec{Q}_j^1) \cdot \vec{Q}_j^1 - J^+(\vec{Q}^1(\hat{Y}_c)) \cdot (\vec{Q}_j^1 - \vec{Q}_i^1) \right\}_{\text{composante1}} , \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

où la formulation équivalente du flux de Roe en fonction de la matrice jacobienne J^+ :

$$J^+(\vec{Q}^1(\hat{Y}_c)) = R_c(\vec{Q}^1(\hat{Y}_c)) \cdot \Lambda^{c+} \cdot R_c^{-1}(\vec{Q}^1(\hat{Y}_c)), \quad \Lambda_{ij}^{c+} = \delta_{ij} \cdot \max(0, \lambda_i^c) , \quad (\text{E.3})$$

a été utilisé.

La linéarisation s'écrit maintenant:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{ij}^{\rho S}}{\partial \vec{Q}^{tot}} \cdot \delta \vec{Q}^{tot} = \frac{\partial \mathcal{F}_{ij}^{\rho}}{\partial \vec{Q}^{tot}} \cdot \delta \vec{Q}^{tot} \cdot \frac{(\rho S)_m}{\rho_m} + \mathcal{F}_{ij}^{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{Q}^{tot}} \left(\frac{(\rho S)_m}{\rho_m} \right) \cdot \delta \vec{Q}^{tot} , \quad (\text{E.4})$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}_{ij}^{\rho}}{\partial \vec{Q}^{tot}} \cdot \delta \vec{Q}^{tot} &= \left[J_{11}(\vec{Q}_j) - \hat{J}_{11}^+ \right] \delta \rho_j + \hat{J}_{11}^+ \delta \rho_i \\ &+ \sum_{k=1}^2 \left\{ \left[J_{1(k+1)}(\vec{Q}_j) - \hat{J}_{1(k+1)}^+ \right] \delta (\rho u_k)_j + \hat{J}_{1(k+1)}^+ \delta (\rho u_k)_i \right\} \\ &+ \left[J_{14}(\vec{Q}_j) - \hat{J}_{14}^+ \right] \delta (\rho e_T)_j + \hat{J}_{14}^+ \delta (\rho e_T)_i \\ &+ \left[J_{15}(\vec{Q}_j) - \hat{J}_{15}^+ \right] \delta (\rho k)_j + \hat{J}_{15}^+ \delta (\rho k)_i , \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \vec{Q}^{tot}} \left(\frac{\rho S}{\rho_m} \right) \cdot \delta \vec{Q} = - \left[\frac{\rho S}{\rho^2} \right]_m \cdot \delta \rho_m + \frac{1}{\rho_m} \cdot \delta (\rho S)_m \quad . \quad (E.6)$$

Nous avons utilisé l'abréviation $J_{ij}^+ = J_{ij}^+(\vec{Q}^1(\hat{Y}_c))$.

En pratique, on a donc la dépendance suivante:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{ij}^{\rho S}}{\partial \vec{Q}^{tot}} \cdot \delta \vec{Q}^{tot} = f \left\{ \rho_i, \rho_j, \rho S)_i, \rho S)_j, J_{1k}(\vec{Q}_i^1), J_{1k}(\vec{Q}_j^1), J_{1k}^+(\vec{Q}^1(\hat{Y}_c)) \right\} \cdot \delta \vec{Q}^{tot} \quad . \quad (E.7)$$

Les éléments de la matrice jacobienne des flux du système principal peuvent être calculés et stockés avant la résolution des systèmes associés aux scalaires ρS . L'assemblage des flux implicites de chaque scalaire peut être effectué de manière schématique, économique et indépendant de la grandeur dont il s'agit.

E.2 Les conditions numériques issues des relations de compatibilité

Entrée subsonique. Avec $\{\rho, u_n, u_t, k, R_{ij}, \varepsilon\}_e = \{\rho, u_n, u_t, k, R_{ij}, \varepsilon\}_{phys}$ imposé, la seule relation de compatibilité donne la condition numérique suivante pour la pression:

$$p_e = p_i + (c \cdot \rho)_i (u_n]_i - u_n]_e) \quad . \quad (E.8)$$

Entrée supersonique. Aucune condition numérique doit être utilisée.

Sortie subsonique. Avec la condition physique pour la pression, $p_e = p_{phys}$, les conditions numériques s'écrivent:

$$\rho_e = \rho_i + \frac{1}{c_i^2} (p_e - p_i) \quad , \quad (E.9)$$

$$u_n]_e = u_n]_i - \frac{1}{(c \rho)_i} (p_e - p_i) \quad , \quad (E.10)$$

$$\{u_t, k, R_{ij}, \varepsilon\}_e = \{u_t, k, R_{ij}, \varepsilon\}_i \quad . \quad (E.11)$$

Sortie supersonique. La résolution du système des relations de compatibilité donne pour ce cas:

$$\{\rho, u_n, u_t, p, k, R_{ij}, \varepsilon\}_e = \{\rho, u_n, u_t, p, k, R_{ij}, \varepsilon\}_i \quad . \quad (E.12)$$

Glissement. En imposant $u_n]_e = 0$, on obtient pour les autres variables:

$$\rho_e = \rho_i - \frac{\rho_i}{c_i} u_n]_i \quad , \quad (E.13)$$

$$p_e = p_i - \rho_i c_i u_n]_i \quad , \quad (E.14)$$

$$\{u_t, k, R_{ij}, \varepsilon\}_e = \{u_t, k, R_{ij}, \varepsilon\}_i \quad . \quad (E.15)$$

E.3 Les flux issus du traitement des parois solides par la loi de paroi

Les variables $\{\rho, \rho\vec{v}, \rho e_T\}$ sont traitées de manière faible aux frontières de paroi solide. Ici, il s'agit de construire les flux numériques à partir des résultats analytiques de la loi de paroi du paragraphe 2.5.3.2.

Flux convectifs. Puisque l'approche de la loi de paroi implique une vitesse parallèle qui est nulle à la frontière ($\vec{v} \cdot \vec{n}_\Gamma = 0$), le seul flux convectif qui agit sur le segment $\delta\Gamma_{C_{ie}}$ est la projection de la pression, à savoir:

$$\vec{F}_c \cdot \vec{n}_\Gamma \Big|_\rho = 0, \quad \vec{F}_c \cdot \vec{n}_\Gamma \Big|_{\rho\vec{v}} = p_i \cdot \vec{n}_\Gamma, \quad \vec{F}_c \cdot \vec{n}_\Gamma \Big|_{\rho e_T} = 0 \quad . \quad (\text{E.16})$$

Ce flux est calculé en utilisant la pression au nœud P_i de la frontière.

Flux visqueux. Le vecteur des flux visqueux associé aux variables $\{\rho, \rho\vec{v}, \rho e_T\}$ s'écrit dans la zone logarithmique:

$$\vec{R} \cdot \vec{n}_\Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ (-\rho R) \cdot \vec{n}_\Gamma \\ \left(\vec{v}(-\rho R) + \vec{q} + \frac{\mu_t}{\sigma_R} \nabla k \right) \cdot \vec{n}_\Gamma \end{bmatrix}, \quad (\text{E.17})$$

où $\vec{q}$ est la somme des flux de chaleur; le flux de masse turbulent a été négligé. Le flux des équations de la quantité de mouvement se calcule alors simplement par la projection des valeurs du tenseur R_{ij} obtenues dans le repère local (équations (2.105) et (2.106)) sur le repère global (x, y) .

Le flux de l'énergie totale contient trois termes. Dans le cas d'une paroi adiabatique, le flux de chaleur $\vec{q} \cdot \vec{n}_\Gamma$ compense la dissipation turbulente $\vec{v}(-\rho R) \cdot \vec{n}_\Gamma$. Le gradient normal de k , qui constitue la troisième contribution, est nul dans un écoulement incompressible; en général il est proportionnel au gradient de la densité, à savoir:

$$\frac{\mu_t}{\sigma_R} \nabla k \cdot \vec{n}_\Gamma = \frac{\mu_t}{\sigma_R} \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \partial_{n_\Gamma} \left(\frac{\rho_w}{\rho(n_w)} \right) = \frac{\mu_t}{\sigma_R} \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \partial_{n_\Gamma} \left(\frac{T(n_w)}{T_w} \right) \quad . \quad (\text{E.18})$$

L'analyse de van Driest est basée sur une analogie de Reynolds qui se traduit par la relation:

$$\frac{\partial T}{\partial n_w} \cdot \frac{c_p}{Pr_t} = - \frac{\partial u_t}{\partial n_w} \quad , \quad (\text{E.19})$$

et donc

$$\frac{\partial T}{\partial n_\Gamma} = \frac{Pr_t u_t(d) u_\tau}{c_p \kappa d} \sqrt{\frac{\rho(d)}{\rho_w}} \quad (\text{E.20})$$

au nœud de la frontière situé à la distance d de la paroi. Le flux visqueux de l'énergie totale s'écrit finalement:

$$\vec{R} \cdot \vec{n}_\Gamma \Big|_{\rho e_T} = \frac{\mu_t}{\sigma_R} \cdot \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \cdot \frac{Pr_t u_t}{c_p \kappa d} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{T} \quad , \quad (\text{E.21})$$

où la relation (2.104) peut être utilisée afin d'éliminer le rapport des densités.

Les flux sont ensuite assemblés par les formules générales du paragraphe 2.5.1. La linéarisation de ces flux pour la phase implicite ne constitue pas une difficulté. Les expressions correspondantes sont données dans la référence [115].

E.4 Vérification numérique de la réalisabilité de la tension de Reynolds

Quelleque soit la forme des modèles différentiels utilisés, la représentation discrète peut éventuellement admettre une solution non-réalisable. Ceci peut être un défaut de la méthode numérique ou simplement une conséquence du maillage et du pas de temps choisi. Il est donc nécessaire d'adopter une procédure de vérification de la réalisabilité faible en cours d'un calcul numérique.

La négativité des variables thermodynamiques est une situation grave; elle mène dans notre cas toujours à l'arrêt du calcul. Par contre, la négativité d'une composante diagonale de la tension de Reynolds ou la violation de l'inégalité de Schwarz dans une phase transitoire peuvent être tolérées si la solution finale est conforme à la réalisabilité. A cause d'une mauvaise initialisation des champs, une telle situation a été parfois rencontrée en pratique. Nous imposons la réalisabilité faible à chaque pas temporelle après l'actualisation des valeurs. Il s'agit d'une technique de "clipping" [233]. Si une des composantes diagonales du tenseur de Reynolds est négative, nous remplaçons sa valeur par une moyenne des valeurs aux nœuds voisins. De même pour le taux de dissipation ε . Si l'inégalité de Schwarz n'est pas vérifiée à un certain point du domaine, on impose la valeur donnée par l'égalité.

Annexe F

Passage d'un tourbillon au travers de la frontière

Ce cas test a été publié par Poinso et Lele [234] qui l'ont considéré afin de valider une méthode d'intégration des équations de Navier-Stokes instantanées dans le cadre d'une simulation directe. Nous effectuons ce cas en ajoutant une turbulence faible, isotrope aux conditions initiales.

F.1 Champ initial

Nous définissons une fonction de courant Ψ qui est solution des équations décrivant un fluide incompressible, non-visqueux:

$$\Psi(r) = C \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2r_c^2}\right) \quad , \quad (\text{F.1})$$

où r est la coordonnée radiale avec comme origine le centre du tourbillon, C est une constante qui donne l'intensité du tourbillon et r_c est un rayon caractéristique (figure F.1 pour la définition du repère). Ce tourbillon est superposé à un écoulement de base qui est uniforme et qui suit la

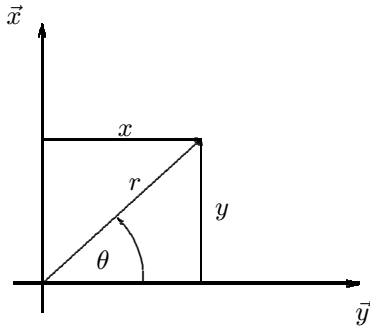


Fig. F.1: Définition du repère cylindrique.

direction x . On obtient pour le champ de vitesse:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u_0 - \frac{y}{r_c^2} \Psi \\ v &= 0 - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{x}{r_c^2} \Psi \end{aligned} \quad . \quad (\text{F.2})$$

r_c	C	$\text{Re}_0 \equiv u_0 l / \nu$	L	N	$\text{M}_0 \equiv u_0 / c$
$0.15 l$	$-5 \cdot 10^{-4} c l$	10000	$2 l$	81×81	1.1; 0.8

Tab. F.1: Les paramètres du calcul

$u_0 \left[\frac{m}{s} \right]$	$\rho \left[\frac{kg}{m^3} \right]$	$p_\infty [Pa]$	$k \left[\frac{m^2}{s^2} \right]$	$\varepsilon \left[\frac{m^2}{s^3} \right]$	$b_{\alpha\alpha}$	b_{12}
277; 380	1.0	84091	$2 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	$\frac{1}{3}$	0

Tab. F.2: L'état à l'infini

Le champ de pression associé à cette fonction de courant est obtenu par intégration de l'équation de quantité de mouvement selon la direction radiale

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad , \quad (\text{F.3})$$

où

$$u_r = 0, \quad u_\theta = \frac{r}{r_c^2} \Psi \quad . \quad (\text{F.4})$$

Avec $\lim_{r \rightarrow \infty} p = p_\infty$ on obtient

$$p - p_\infty = -\frac{1}{2} \rho \frac{1}{r_c^2} \Psi^2 \quad . \quad (\text{F.5})$$

La vorticité perpendiculaire au plan (x, y) induite par ce champ s'écrit

$$\omega_z \equiv \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2\Psi}{r_c^2} \left[1 - \frac{r^2}{2r_c^2} \right] \quad , \quad (\text{F.6})$$

ce qui conduit à un maximum de $\max(\omega_z) = 2C/r_c^2$. Le maximum pour la vitesse circonférentielle induite par ce tourbillon est:

$$\max(u_\theta) = |C| \frac{1}{r_c} e^{-1/2} \quad . \quad (\text{F.7})$$

F.2 Paramètres du calcul

Les paramètres utilisés pour ce cas test correspondent à ceux choisis par Poin ot et Lele [234] en ce qui concerne le nombre de Reynolds Re_0 , l'intensité C et le rayon r_c du tourbillon, les dimensions du domaine carré de coté L et le nombre de points de maillage N (voir tableau F.1). Les valeurs sont données en fonction d'une longueur de référence l . Nous utilisons deux valeurs différentes pour le nombre de Mach M_0 afin de tester les cas supersonique ainsi que subsonique. Le champ porteur est défini dans le tableau F.2.

F.3 Résultats

Le paramètre qui permet de juger la représentation du tourbillon est la vorticité ω_z . Sur les figures F.2 et F.3 nous montrons la distribution de la vorticité du champ initial. Puisque le champ porteur

est uniforme, les valeurs de la vorticité sont initialement identiques entre le cas subsonique et le cas supersonique.

L'évolution de la vorticité maximale ω_{max}^* et minimale ω_{min}^* ainsi que celle de l'intégrale de la valeur absolue de la vorticité sur tout le domaine $\int |\omega^*| dv$ est montrée sur les figures F.4 à F.6. On a normalisé la vorticité et le temps par une échelle de temps bâtie sur la vitesse du son: $\omega^* = \omega_z \cdot l/c$, $t^* = t \cdot c/l$. On constate que la norme de la vorticité, représentée par l'intégrale, décroît de manière monotone en temps dans les deux cas. Les valeurs maximales et minimales se comportent correctement quand le tourbillon passe la frontière pour $0.5 < t^* < 2.0$ environ ($0.5 < t^* < 1.5$ pour le cas supersonique). Cependant, on note que les valeurs absolues de ω_{max}^* et ω_{min}^* croissent avant l'arrivée du tourbillon à la frontière, ce qui montre que le maximum et minimum du gradient radiale de la vitesse circonférentielle u_θ augmentent au début du calcul. Cela signifie que la solution initiale ne satisfait pas entièrement les équations compressibles moyennes et que, dans une phase transitoire, le champ s'adapte par une légère contraction ainsi qu'une accélération de la vitesse circonférentielle du tourbillon.

Sur les figures F.7 et F.8, on a tracé des lignes d'isovaleurs de la vorticité ω_z à différents instants pour les cas subsonique et supersonique respectivement. Visiblement, le tourbillon sort du domaine sans créer des perturbations, et sans être perturbé par le passage. Il est légèrement déformé en cours de convection car notre méthode de résolution est formellement d'une précision spatiale d'ordre deux.

F.4 Conclusions du calcul

Le cas d'un tourbillon à faible intensité (le maximum de la vitesse circonférentielle induite par le tourbillon est de $u_\theta = 2 \cdot 10^{-3} c$) qui passe la frontière montre que notre traitement basé sur les relations de compatibilité ne produit pas d'ondes non-physiques d'intensité importante. Cela a été montré pour une sortie subsonique ainsi qu'une sortie supersonique.

Des calculs supplémentaires (non montrés ici) des tourbillons jusqu'à $u_{\theta_{max}} = 0.1 c$ mènent à des conclusions identiques.

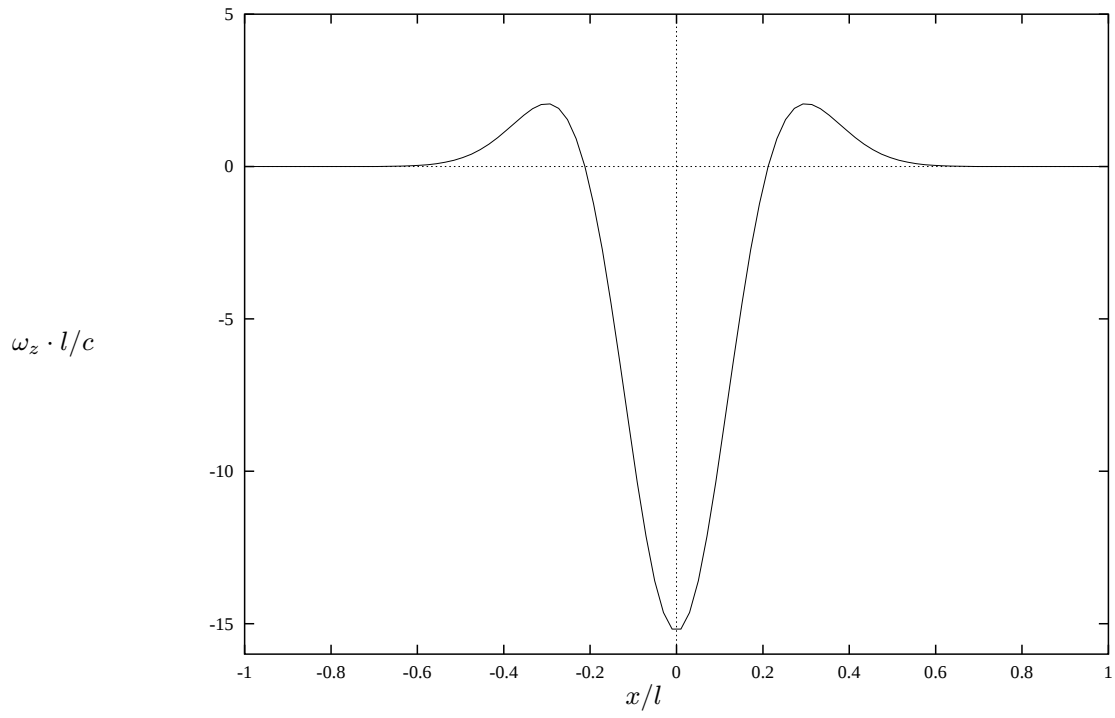


Fig. F.2: Calcul du passage d'un tourbillon par la frontière de sortie: Variation de la vorticité initiale en fonction du rayon r .

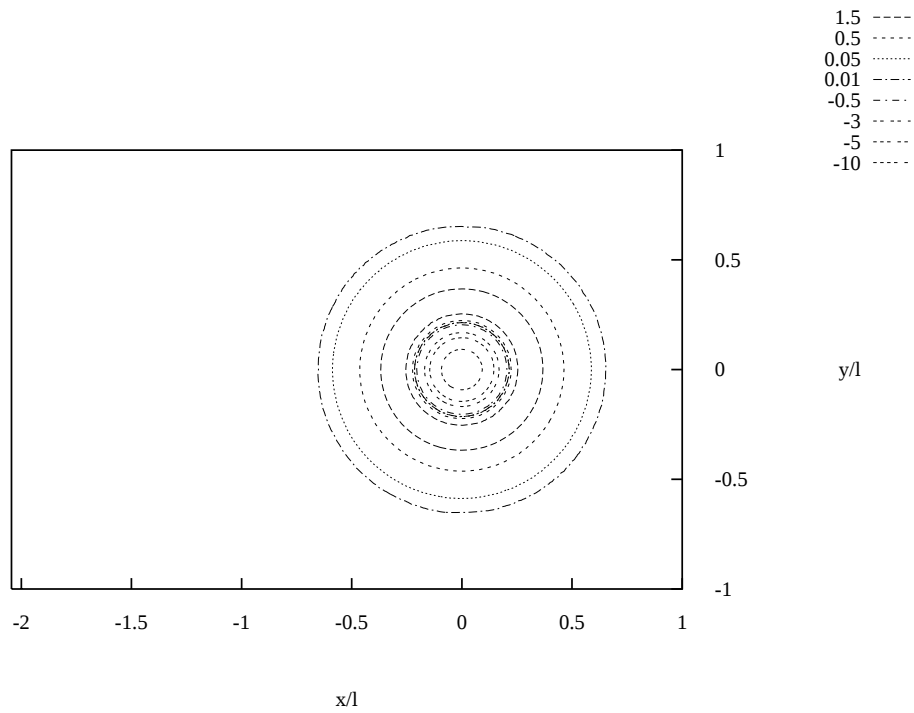


Fig. F.3: Lignes d'isovorticité du champ initial.

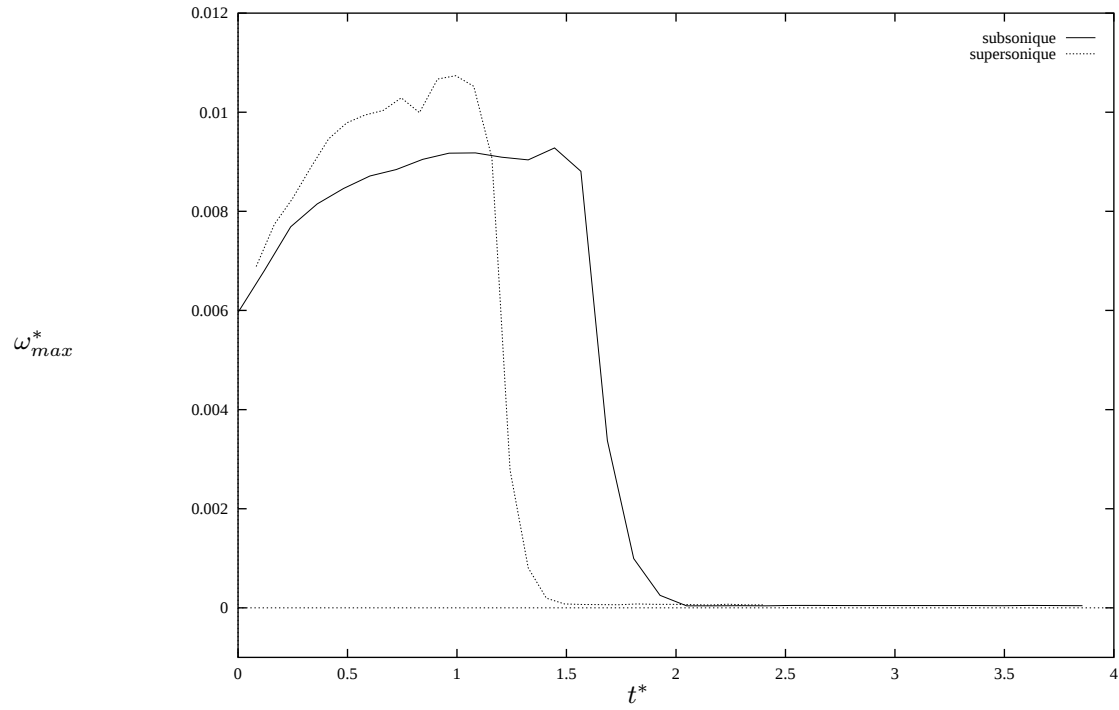


Fig. F.4: Calcul du passage d'un tourbillon par la frontière de sortie: Evolution de la vorticité maximale en cours du calcul.

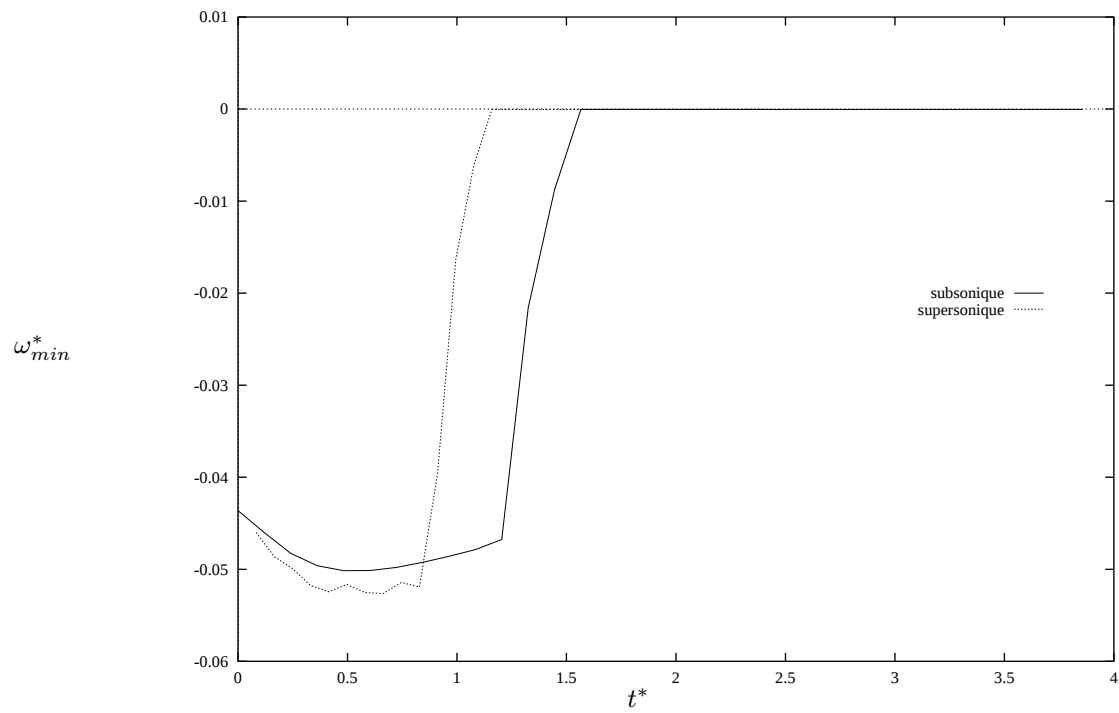


Fig. F.5: Evolution de la vorticité minimale en cours du calcul.

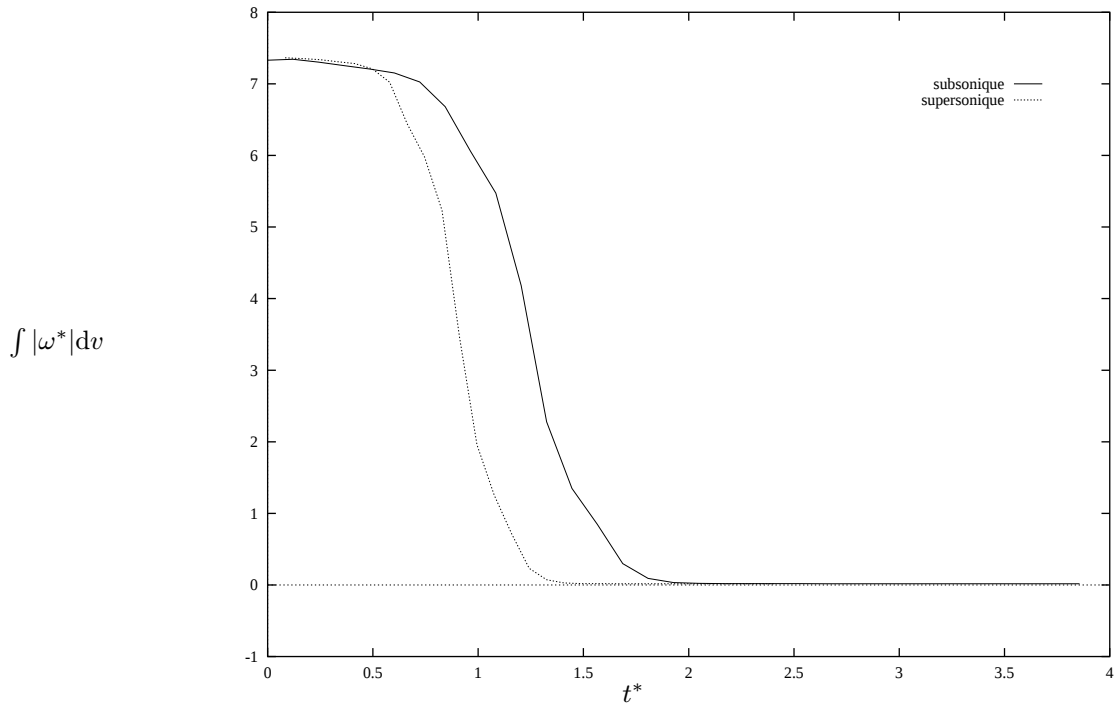


Fig. F.6: Calcul du passage d'un tourbillon par la frontière de sortie: Evolution de la norme de la vorticité en cours du calcul.

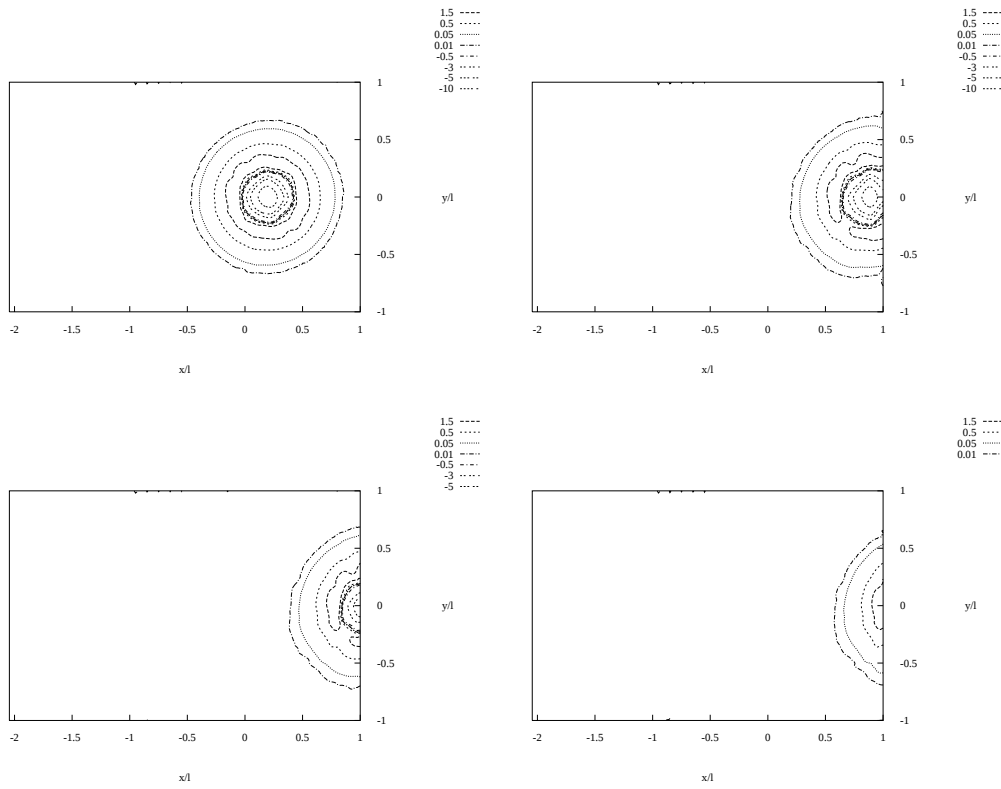


Fig. F.7: Convection subsonique: Isovorticité à $t^* = \{0.24, 1.08, 1.32, 1.57\}$.

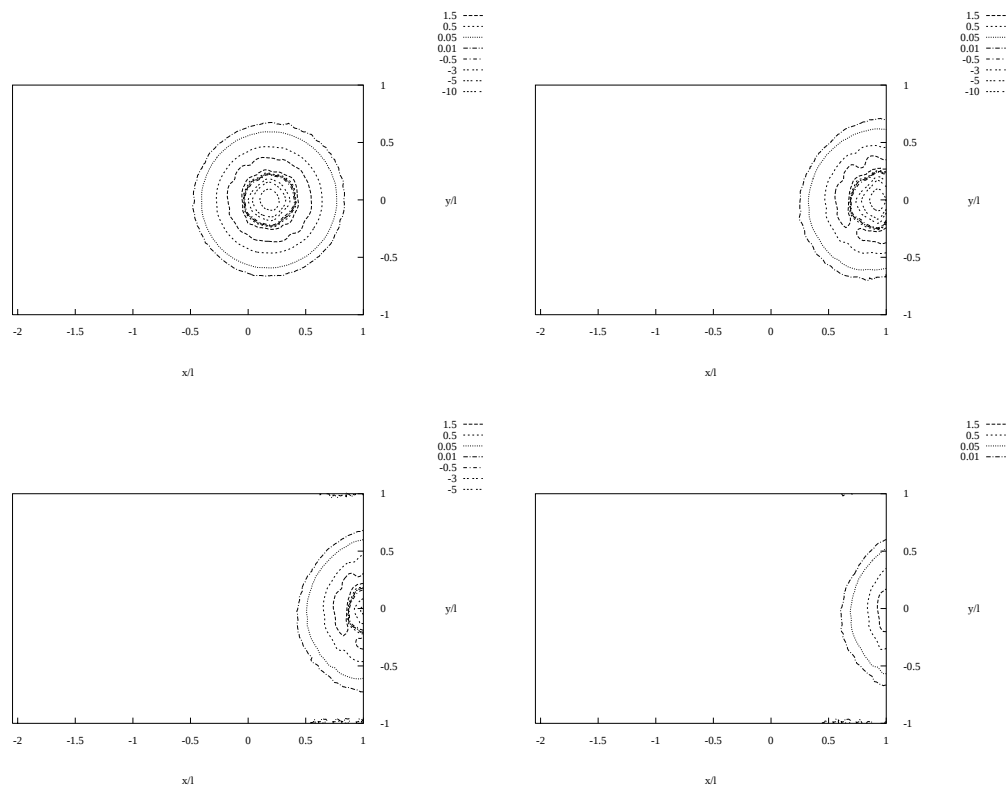


Fig. F.8: Convection supersonique: Isovorticité à $t^* = \{0.17, 0.83, 1.00, 1.16\}$.

Annexe G

La condition d'entrée pour le taux de dissipation

Nous avons estimé l'influence de la condition d'entrée de la variable de dissipation ε dans le cas de la couche de mélange en régime incompressible étudiée dans le chapitre 4.

La reconstruction du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente à partir des données pour la vitesse axiale et les tensions turbulentes peut être écrite de la manière suivante:

$$\varepsilon = \max \left(-C_\mu k^2 \partial_y(u)/R_{12}, \varepsilon_e \right) \quad , \quad (\text{G.1})$$

où l'hypothèse de Boussinesq est utilisée dans la zone de mélange et une valeur résiduelle ε_e est imposée dans l'écoulement sain. La valeur pour ε_e dépend évidemment de l'histoire de l'écoulement sain, puisqu'il s'agit essentiellement d'un processus de décroissance de turbulence en absence des gradients de vitesse moyenne. Nous avons choisi la valeur $\varepsilon_e = 10^{-5} m^2/s^3$ pour les calculs montrés dans le paragraphe 4.3.5.

Nous avons ensuite testé deux modes de reconstruction de ε alternatifs.

Réduction de la dissipation d'entrée dans la zone de mélange. Dans un premier essai, nous avons réduit la valeur du taux de dissipation dans la zone de mélange par un facteur arbitraire de 4,

$$\varepsilon = \max \left(-\frac{1}{4} C_\mu k^2 \partial_y(u)/R_{12}, \varepsilon_e \right) \quad , \quad \varepsilon_e = 10^{-5} m^2/s^3. \quad (\text{G.2})$$

Cette condition modifie l'évolution de l'écoulement initialement, mais l'état asymptotique des champs moyen et turbulent est inchangé (voir la référence [184]).

Adaptation de la dissipation à l'extérieur de la zone de mélange. Nous avons ensuite constaté que notre valeur pour ε_e implique une très grande valeur de la viscosité turbulente dans l'écoulement sain, de l'ordre de 10^6 fois la valeur de la viscosité moléculaire. La deuxième condition alternative a donc consisté à ajuster la valeur de ε_e de telle manière que la viscosité turbulente soit 10 fois supérieure à la viscosité moléculaire,

$$\varepsilon = \max \left(-C_\mu k^2 \partial_y(u)/R_{12}, \varepsilon_e \right) \quad , \quad \varepsilon_e = \frac{C_\mu k_e^2}{10 \cdot \nu} \quad , \quad (\text{G.3})$$

avec k_e donné par le niveau de turbulence à l'extérieur de la zone de mélange. Cette deuxième condition agit donc explicitement dans une région où les bilans des grandeurs turbulentes sont dominés par la convection. Contrairement à la modification précédente (G.2), l'effet de la condition limite persiste assez loin dans la direction axiale. La figure G.1 montre que

la viscosité turbulente semble approcher une valeur de l'ordre de $10^4 \nu$ dans l'écoulement sain, mais que l'influence de la condition d'entrée est encore visible à la sortie du domaine de calcul. La modification de la condition d'entrée selon (G.3) n'a aucune influence visible sur la forme des profils de la vitesse moyenne et l'épanouissement de la couche de mélange n'est pas affecté (voir la figure G.2). Par contre, le niveau maximale de l'énergie cinétique turbulente dans la région de mélange augmente d'environ 20% dans un calcul effectué avec le modèle SSG (figure G.3). De la même manière, le maximum de la contrainte $R_{12_{max}}$ est plus élevé quand on utilise la condition (G.3) (figure G.4). Une proportionnalité directe entre $R_{12_{max}}$ et δ' – comme elle a été obtenue analytiquement par Townsend – n'est donc plus constatée pour ces deux cas de comparaison. Il faut néanmoins remarquer que la relation approximative de Townsend ne tient pas compte du niveau d'intensité de la turbulence extérieure.

Nous concluons donc de ces tests que la condition d'entrée de la dissipation dans l'écoulement sain a une influence qui persiste assez loin en aval et qui peut même affecter le niveau de la turbulence dans la zone de mélange. Une baisse de la viscosité turbulente externe conduit à une hausse de l'énergie cinétique turbulente à l'intérieur de la région de mélange.

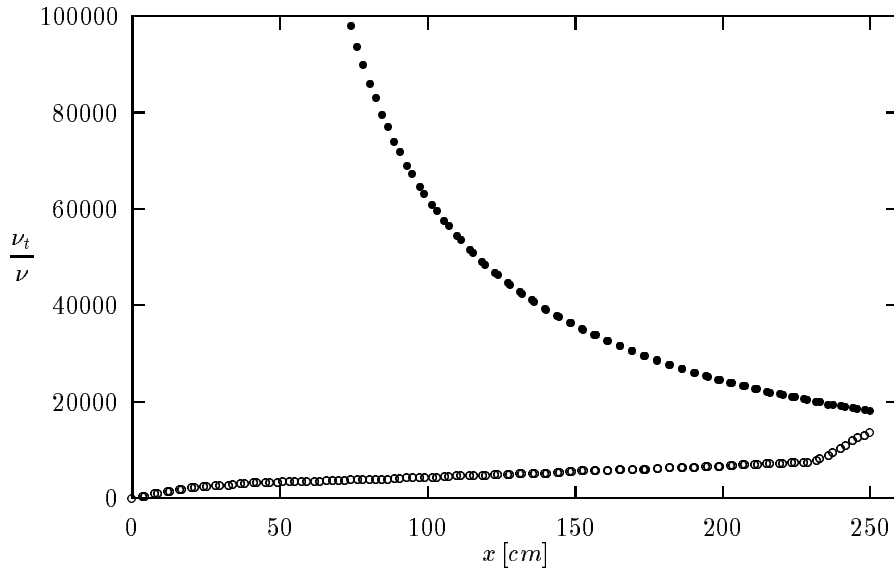


Fig. G.1: L'évolution axiale de la viscosité turbulente dans l'écoulement extérieure ($y = 0.2m$) selon la condition d'entrée pour la dissipation utilisée: $\circ$ condition (G.1); $\bullet$ condition (G.3). Calcul avec le modèle SSG.

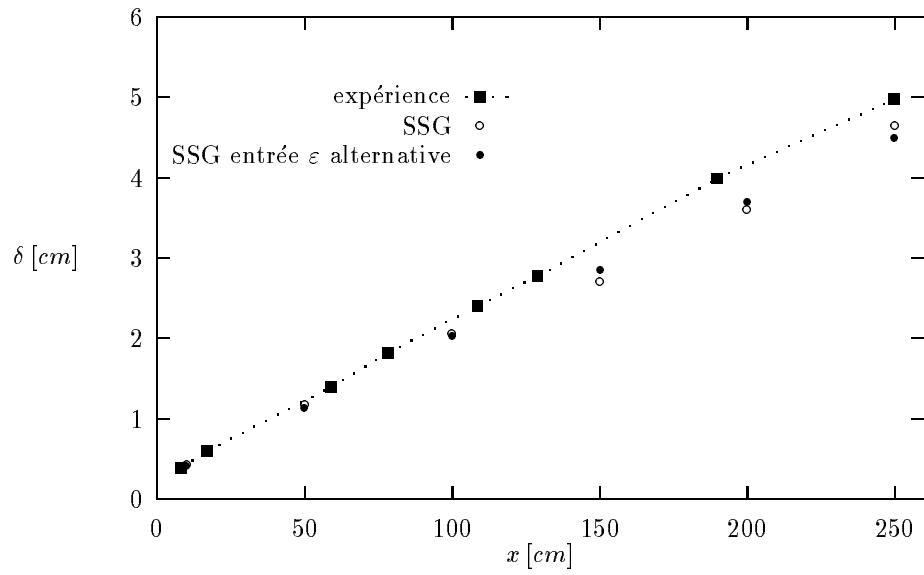


Fig. G.2: L'évolution de l'échelle de longueur latérale δ de la couche de mélange incompressible selon la condition d'entrée pour la dissipation utilisée: $\circ$ condition (G.1); $\bullet$ condition (G.3). Calcul avec le modèle SSG.

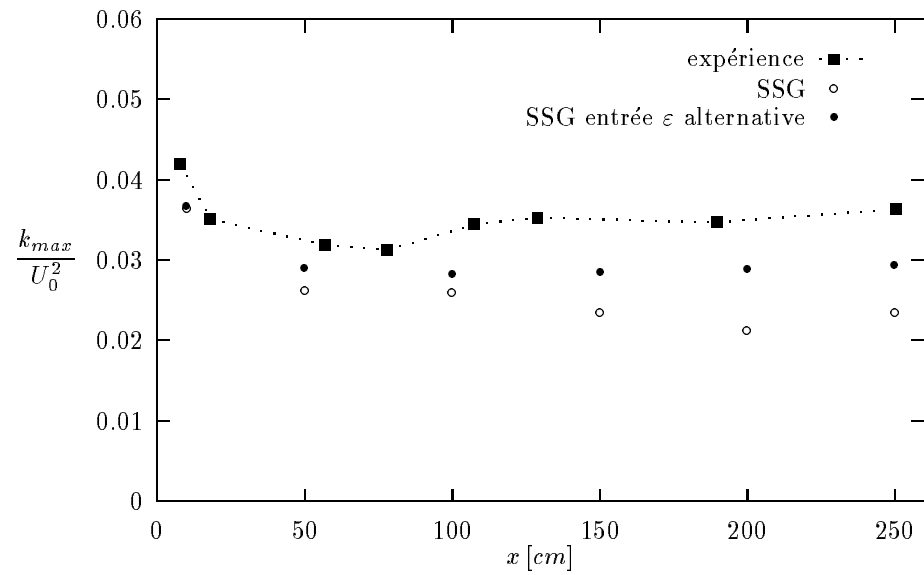


Fig. G.3: L'évolution axiale des maxima de l'énergie cinétique turbulente selon la condition d'entrée pour la dissipation utilisée: $\circ$ condition (G.1); $\bullet$ condition (G.3). Calcul avec le modèle SSG.

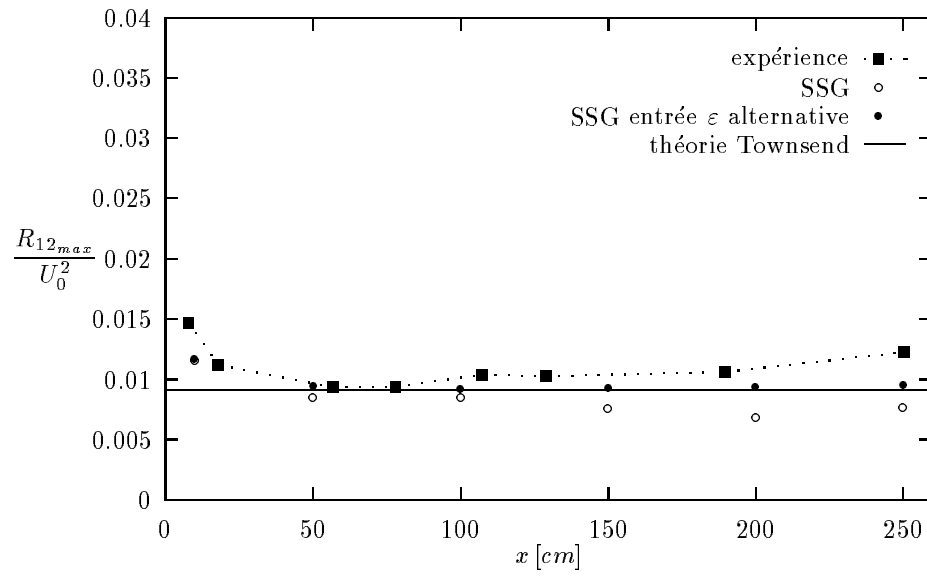


Fig. G.4: L'évolution axiale des maxima de la contrainte turbulente selon la condition d'entrée pour la dissipation utilisée: $\circ$ condition (G.1); $\bullet$ condition (G.3). Calcul avec le modèle SSG. Le trait solide donne la valeur prédite par la relation de Townsend $R_{12_{max}}/U_0^2 = \delta'(.282 U_2/U_0 + .0826)$ en fonction de la valeur de δ' du calcul.

Annexe H

Le flux de masse turbulent dans une couche de mélange

H.1 Estimation de l'importance des expressions dans les équations moyennes

Nous allons par la suite comparer les termes qui font intervenir le flux de masse turbulent avec les termes principaux des équations respectives.

Les composantes du terme source de l'équation pour le tenseur de Reynolds $-(\overline{u''_i \bar{p}_{,j}} + \overline{u''_j \bar{p}_{,i}})$ sont les suivants:

composante	terme lié au flux de masse	expression de référence
11 :	$-(2 \overline{u'' \bar{p}_{,x}}) \approx 0$	
22 :	$-(2 \overline{v'' \bar{p}_{,y}})$	$-\bar{\rho} \varepsilon_{22} \approx -2/3 \bar{\rho} \varepsilon$
12 :	$-(\overline{u'' \bar{p}_{,y}} + \overline{v'' \bar{p}_{,x}}) \approx -\overline{u'' \bar{p}_{,y}}$	$P_{12} \approx -\bar{\rho} \widetilde{uv}_{,y}$

Dans l'équation de l'énergie totale nous avons:

terme lié au flux de masse	expression de référence
$-(\overline{\bar{p} u''_j})_{,j} \approx \bar{p}_{,y} \overline{v''} + \overline{\bar{p} v''}_{,y}$	$(\bar{\rho} \widetilde{uv})_{,y}$

(H.2)

Afin d'évaluer les différentes expressions, nous utilisons des profils transversaux de similitude suivants:

$$\begin{aligned}
 \phi &= C_\phi \cdot U_0^2 \cdot e^{-\eta^2}, & \phi &= \{k, \widetilde{uv}, \widetilde{vv}\} \\
 \bar{\rho} &= \rho_2 + \frac{\rho_0}{2} (1 + \text{erf}(\eta)) \\
 \tilde{u} &= U_2 + \frac{U_0}{2} (1 + \text{erf}(\eta)) \\
 \overline{u''_i} &= C_{ui} \cdot \tilde{u} \cdot e^{-\eta^2}, & &
 \end{aligned}$$
(H.3)

où les niveaux des tensions C_ϕ sont relevés du cas 2 de l'expérience de Goebel et Dutton ($M_c = 0.46$) et ceux du flux de masse C_{ui} sont donnée par l'expérience de Bowersox et Schetz (voir le

C_k	C_{uv}	C_{vv}	C_u	C_v	$p_\infty/(\rho_o U_0^2)$	ρ_2/ρ_0	U_2/U_0
0.03	0.008	0.01	-0.005	0.003	1.219	0.727	2.7

Tab. H.1: Valeurs des paramètres utilisés pour l'estimation des termes de flux de masse dans les équations de transport.

tableau H.1). La dissipation est donnée par l'hypothèse de Boussinesq, par l'approximation de couche limite la formule suivante pour la pression est obtenue:

$$\bar{p}(\eta) = p_\infty - \bar{\rho} \widetilde{vv}(\eta) \quad . \quad (\text{H.4})$$

Les termes correspondant à chaque équation ($\widetilde{p}vv$, $\widetilde{p}u\widetilde{v}$ et $\widetilde{p}e_t$) sont représentés sous forme normalisée par le facteur $U_0^3 \rho_0 / (\delta \sqrt{\pi})$ sur les figures 4.24 à 4.26. Les courbes sont discutées dans le paragraphe 4.3.1.4.

H.2 Test des modèles

Dans ce paragraphe nous déduisons les expressions correspondant aux modèles présentés dans le paragraphe 1.4.6.1. Les résultats sont discutés dans la paragraphe 4.3.1.4.

H.2.1 Le modèle algébrique isotrope

Le modèle isotrope de transport par le gradient de densité (1.96) donne l'expression suivante pour le flux de masse (en utilisant l'hypothèse de Boussinesq):

$$\overline{v''}(\eta) = \frac{\bar{\rho}_{,i}}{\bar{\rho}} \cdot \frac{-\widetilde{uv}}{\widetilde{u}_{,y}} \cdot \frac{1}{\sigma_\rho} \quad . \quad (\text{H.5})$$

Avec les profils de similitude du paragraphe précédent (H.3) et en notant

$$\bar{\rho}_{,y} = \frac{\rho_0}{\sqrt{\pi} \delta} \cdot e^{-\eta^2}, \quad \bar{\rho}_{,x} = -\eta \delta' \bar{\rho}_{,y} \quad , \quad (\text{H.6})$$

nous obtenons:

$$\frac{\overline{v''}}{\widetilde{u}} = \frac{C_{uv}}{\sigma_\rho} \cdot \underbrace{\frac{e^{-\eta^2}}{\bar{\rho}(\eta) \widetilde{u}(\eta)}}_{g(\eta)} \quad \frac{\overline{u''}}{\widetilde{u}} = -\eta \delta' \frac{\overline{v''}}{\widetilde{u}} \quad . \quad (\text{H.7})$$

H.2.2 Le modèle algébrique non-isotrope

Le modèle généralisé de transport par gradient (1.95) conduit à une expression de la forme suivante:

$$\overline{u''}_i = f(M_t) \cdot (b_{il} + \frac{1}{3} \delta_{il}) \frac{-\widetilde{uv}}{\widetilde{u}_{,y}} \frac{\bar{\rho}_{,l}}{\bar{\rho}} \quad , \quad (\text{H.8})$$

où le coefficient de transport est maintenant une fonction du nombre de Mach turbulent. Avec les profils de similitude précédents (H.3), nous obtenons pour les composantes du terme de flux de masse:

$$\frac{\overline{u''}}{\widetilde{u}} = f(M_t) g(\eta) \left\{ (-\eta \delta') (b_{11} + \frac{1}{3}) + b_{12} \right\}, \quad \frac{\overline{v''}}{\widetilde{u}} = f(M_t) g(\eta) \left\{ (-\eta \delta') b_{12} + (b_{22} + \frac{1}{3}) \right\} \quad . \quad (\text{H.9})$$

Annexe I

Interaction entre une onde de choc et un écoulement turbulent

I.1 Introduction

Afin de comprendre certains des phénomènes observés lors de l'interaction entre une onde de choc et une couche limite, il est utile de considérer d'abord la situation d'une interaction idéalisée, celle entre un champ turbulent homogène et un choc normal à la direction de l'écoulement moyen.

Des mesures de l'interaction entre une onde de choc et une turbulence de grille décroissante ont été effectuées par différents auteurs [235, 236, 237, 238], des simulations numériques directes bidimensionnelles [239, 240] et tridimensionnelles [48, 241] de cette situation ont également été conduites. Parmi les divers aspects du problème, les phénomènes principaux sont les suivants:

- l'amplification des fluctuations de vitesse à travers le choc,
- la modification des différentes échelles de longueur,
- l'instationnarité et la déformation du front de choc dues à la turbulence et à la compressibilité de l'écoulement en amont.

Un résumé des résultats de la littérature est donné par Smits et Dussauge [223], qui discutent également l'adéquation des approches analytiques linéaires (i.e. la théorie de l'interaction linéaire LIA et la théorie de la distorsion rapide RDT) à ce type d'écoulement.

Notre objectif dans ce paragraphe est de déterminer si notre fermeture au second ordre est capable de représenter correctement l'influence de l'onde de choc sur le champ turbulent. Nous nous intéressons plus particulièrement à un choc représentatif de l'écoulement complexe étudié dans le paragraphe 5.4. A cet effet, nous avons choisi le cas particulier de l'étude numérique par simulation directe de Lee *et al.* [48]. Nous présentons par la suite une comparaison de résultats des calculs effectués avec différents modèles de fermeture en s'appuyant sur les données de la simulation numérique directe.

I.2 Le cas simulé numériquement

Lee *et al.* ont étudié un champ isotrope, quasi-incompressible à faible nombre de Reynolds passant par une onde de choc faible (voir la figure I.1 pour le schéma de l'écoulement et les paramètres de l'étude). Dans cette gamme de nombres de Mach (M , M_t), la variation des grandeurs moyennes à travers le choc est proche du cas laminaire, la turbulence n'affectant que très peu le champ

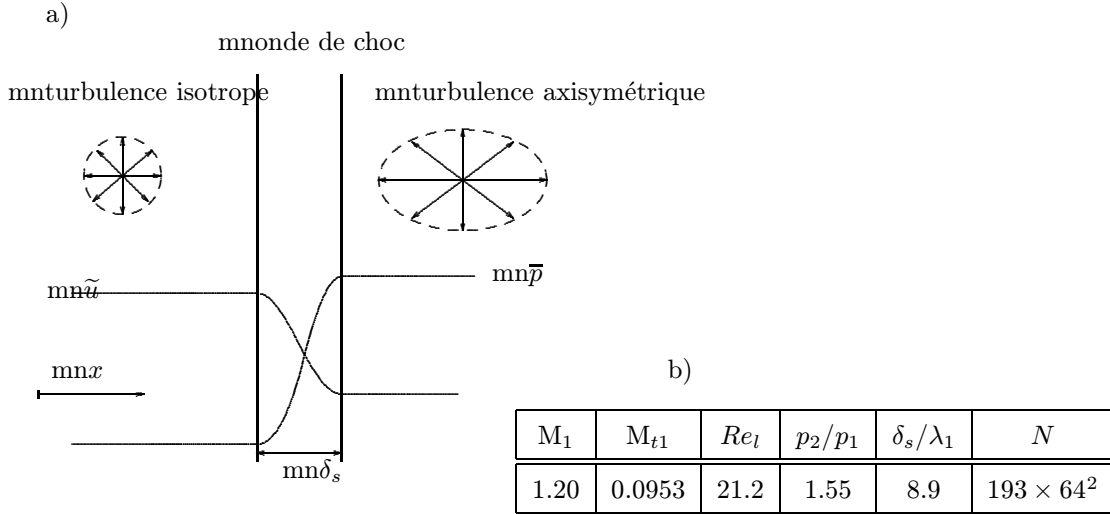


Fig. I.1: L'interaction entre un champ turbulent isotrope et une onde de choc normale: a) Schéma de l'écoulement. b) Les paramètres caractéristiques de la DNS de Lee *et al.* [48] (cas C).

moyen. Afin de simplifier notre calcul nous avons imposé le champ des grandeurs moyennes ($\bar{p}$, $\bar{\rho} \tilde{u}_i$, $\bar{\rho} \tilde{e}_t$) correspondant à celui calculée par la DNS. Dans notre calcul, les équations de transport des grandeurs turbulentes ($\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j$, $\bar{\rho} \tilde{\varepsilon}$) sont résolues sur la base de ces profils moyens constants en temps. Le couplage entre le champ moyen et la turbulence est alors unidirectionnel. En ce qui concerne les équations statistiques, le problème est monodimensionnel dû à l'homogénéité dans les directions transversale (y) et le long l'envergure (z).

Quant à l'intensité du choc, la situation est comparable à l'onde incidente créée dans l'expérience de Delery discutée dans le paragraphe 5.4, où le rapport de pression est de $p_2/p_1 = 1.97$ malgré un nombre de Mach amont beaucoup plus élevé (et ceci du fait de l'inclinaison du choc).

I.3 Comparaison des résultats: calcul statistique – simulation directe

Nous notons d'abord que, du fait d'une légère oscillation de la position de l'onde de choc dans la simulation directe de Lee *et al.*, un effet d'intermittence affecte les corrélations statistiques dans cette région (signalée par des lignes verticales dans les figures suivantes). De plus, vers la sortie du domaine d'intégration, les résultats de la DNS sont perturbés par le traitement de la frontière.

L'énergie cinétique de la turbulence est amplifiée par l'interaction avec le choc et elle continue à décroître plus loin en aval (voir la figure I.2). Le facteur d'amplification de l'énergie cinétique de turbulence prédit par la fermeture au second ordre correspond au résultat de la DNS. Les modèles de premier ordre, par contre, surestiment l'amplification de l'intensité turbulente. Nous observons deux différences entre l'évolution de k en aval du choc donnée par la DNS et celle donnée par la fermeture au second ordre: dans la simulation directe, le maximum de l'énergie cinétique est atteint en dehors du choc et sa décroissance est plus rapide.

Concernant le deuxième point, nous avons tracé l'évolution de la dissipation turbulente obtenue par le calcul avec la fermeture au second ordre (figure I.3). Nous avons également représenté sur cette figure l'évolution de la somme des termes visqueux (dissipation plus transport) $\tau_{ik,k} u_i''$ obtenue dans la DNS, parmi lesquels la dissipation visqueuse est le terme dominant en dehors du choc [48]. Nous notons un niveau de dissipation trop faible prédit par notre fermeture. Nous avons ensuite effectué un calcul supplémentaire en utilisant le modèle de Reynolds (1.59) pour prendre

en compte l'influence de la dilatation moyenne sur la production/destruction dans l'équation de la dissipation $(1 - C_{\varepsilon 3}) \bar{\rho} \varepsilon \tilde{u}_{i,i}$. Cette correction conduit en effet à une augmentation de la valeur du taux de dissipation (voir figure I.3), mais il est visible que la décroissance prédite par notre calcul est trop importante dans les deux cas. Il faut noter qu'à des nombres de Reynolds aussi faibles, le processus de décroissance ne peut probablement pas être décrit de manière adéquate avec une constante $C_{\varepsilon 2}$ calibrée à haut nombre de Reynolds (voir Lumley [15]).

Lee *et al.* ont montré que le terme de transport par la corrélation pression-vitesse $-(\overline{p' u''})_{,x}$ était important dans la région située en aval du choc ($20 < x \cdot \hat{k}_o < 23$). En redistribuant de l'énergie dans la direction de l'inhomogénéité, ce terme est principalement responsable de la variation de k immédiatement en aval du choc [48]. Dans notre fermeture, nous avons "absorbé" le transport par la corrélation pression-vitesse dans un modèle simple pour l'ensemble des termes de diffusion (1.81). On note finalement que les calculs ne donnent pas la position du maximum de k après le passage du choc obtenue par la DNS.

L'anisotropie en aval du choc est axisymétrique avec $b_{22} = b_{33}$, la composante axiale b_{11} étant directement augmentée par le terme de production. La figure I.4 montre que le processus est correctement représenté par la fermeture au second ordre. Les modèles classiques (LRR, SSG, FLT) sous-estiment légèrement le niveau de l'anisotropie, la correction LRR-CCM permet une amélioration de la prédiction des composantes de l'anisotropie. En aval du choc, nous notons l'absence du processus de retour à l'isotropie dans la DNS sur les distances simulées. Le modèle SL90 – tenant compte de l'influence du faible nombre de Reynolds – est en meilleur accord avec la DNS sur l'évolution de l'anisotropie du tenseur de Reynolds.

Finalement nous voyons sur la figure I.5 que les modèles de fermeture au premier ordre donnent un maximum très marqué de la tension $\widetilde{uu}$ au centre du choc à cause du caractère local de la relation constitutive. L'évolution obtenue par le modèle de second ordre, par contre, est quasiment monotone. On retrouve cette différence fondamentale entre les modèles lors de l'étude de l'interaction choc-couche limite dans le paragraphe 5.4.

Conclusion. Le calcul du passage d'un champ turbulent isotrope par une onde de choc faible (à champ moyen imposé) montre la capacité de la fermeture au second ordre de prédire l'anisotropie de la turbulence axisymétrique en aval du choc. Les modèles de fermeture au premier ordre surestiment largement l'amplification de l'énergie cinétique de la turbulence.

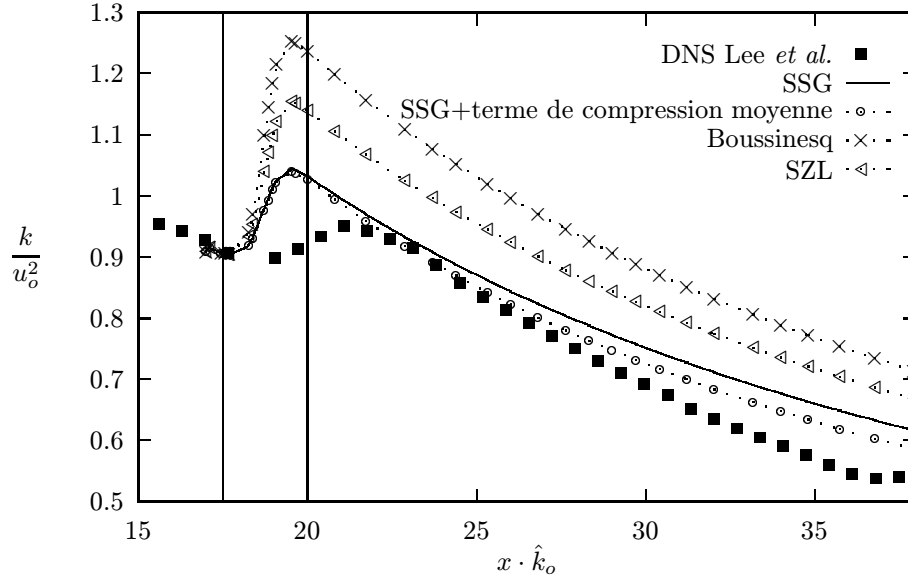


Fig. I.2: Evolution de l'énergie cinétique de la turbulence dans la direction normale au choc. La distance est normalisée par un nombre d'onde de référence $\hat{k}_o$; la position du choc est indiquée par les lignes verticales.

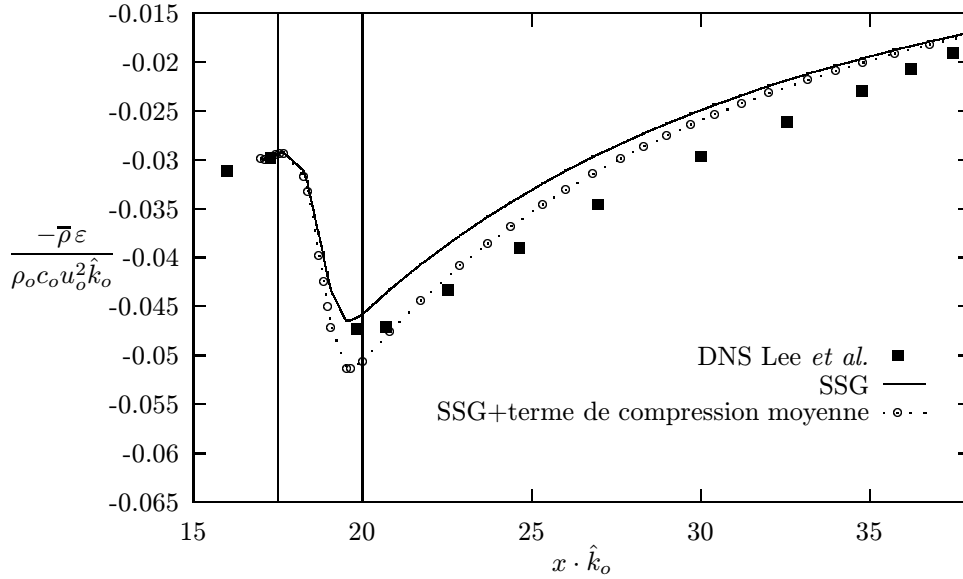


Fig. I.3: Evolution du taux de dissipation obtenu par le calcul avec la fermeture au second ordre. La courbe de la DNS correspond à la somme des termes visqueux (dissipation plus transport) $\overline{\tau_{ik,k} u_i''}$.

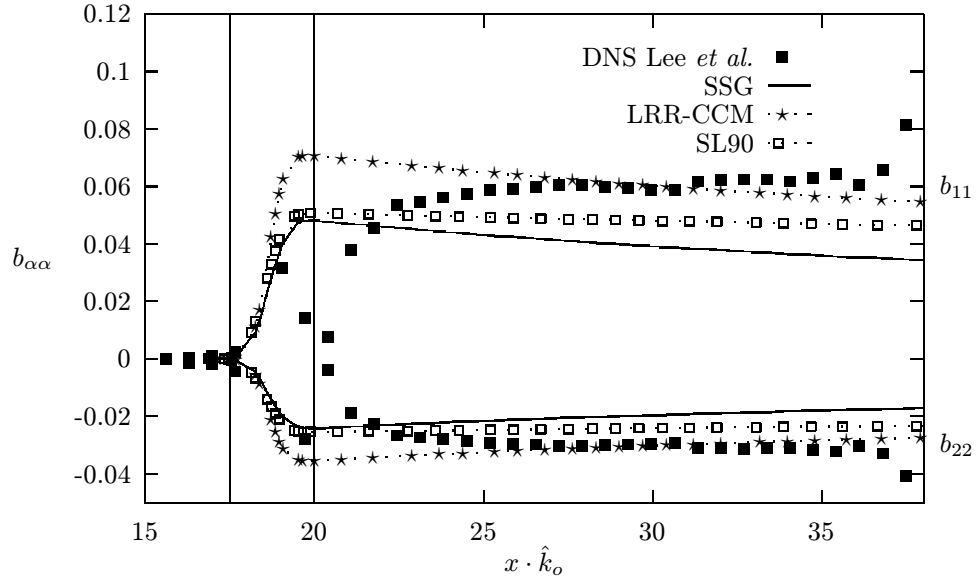
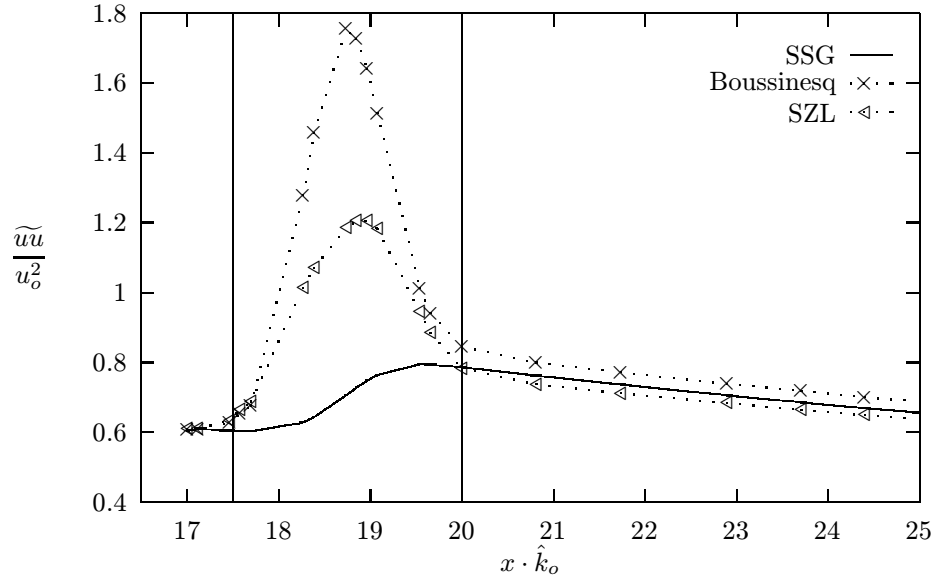


Fig. I.4: Evolution des composantes de l'anisotropie.

Fig. I.5: Prédiction de la tension normale $\widetilde{uu}$ à l'intérieur de l'onde de choc selon la fermeture utilisée.