RAPPORT INTERNE

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, Ecole Centrale de Lyon

Choix du modèle, discrétisation et validation d'une fermeture du second ordre pour des écoulements turbulents compressibles — configuration de base

Markus Uhlmann

Septembre 1995 – Mai 1996

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Ce travail a comme objectif la construction d'un outil de calcul pour des écoulements turbulents, compressibles basé sur les équations de transport des tensions de Reynolds. Le point de départ étant un solveur à deux équations pour les échelles caractéristiques de la turbulence (k-ε), la transformation en une fermeture de second ordre est effectuée en plusieurs étapes. Tout d'abord, une recherche bibliographique a permis de mettre en evidence les multiples problèmes de fermeture dans le cas compressible et les propositions qui ont été publiées à ce propos [1].

Une deuxième phase de l'étude portait sur le traitement numérique de la convection d'un écoulement compressible. Notamment, on a abordé la question du couplage entre les équations de conservation des grandeurs moyennes et celles pour les corrélations de vitesse. Il a été montré pour le cas du modèle à deux équations (k-ε) que l'on peut effectuer une décomposition complète des flux convectifs et en même temps garder le découplage des matrices implicites (un bloc Navier-Stokes et un bloc pour la turbulence). Cette méthode est validée pour des calculs stationnaires dans le rapport [2].

La préparation d'un solveur basé sur l'hypothèse de Boussinesq pour l'implémentation d'un modèle de second ordre nécessite notamment l'adaptation de la partie visqueuse. La modélisation des flux turbulents (flux de chaleur, corrélation triple de vitesse) est à généraliser et on doit creer une variable indépendante pour les composantes de la tension turbulente. Cette dernière modification crée une interface entre les équations de base et un module de calcul des corrélations, permettant différentes façons d'obtenir les moments statistiques. Afin de valider la discrétisation, des calculs sur des cas de reférence (marche descendante, rampe de compression) ont été effectués d'abord avec le modèle k-ε standard et ensuite avec une version non–linéaire, réalisable (Shih et al. [3]). La potentialité du modèle non-linéaire comme alternative à l'hypothèse de Boussinesq mais aussi des limitations par rapport à un modèle complet ont été mises en évidence dans le rapport [4].

La suite du travail, qui est exposée dans ce document, concerne la mise en place et la validation d'une première version du solveur de second ordre. La modélisation, dit “modèle de base”, est présentée dans le chapitre 3. Il s'agit d'une fermeture basée sur l'incompressibilité du champ fluctuant mais à masse volumique variable. Le traitement des parois est également rudimentaire en ce qui concerne les termes d'écho qui sont negligés. Les détails de la discrétisation des équations modélisées sont donnés dans le chapitre 4 où l'on s'intéresse notamment à la partie convective du système Navier-Stokes/$\widetilde{u_i u_j}/\varepsilon$. Finalement, des résultats pour des cas tests sont discutés en vue de valider l'approche et aussi pour identifier certaines sources d'erreurs.

Chapitre 2

Les équations statistiques

On traite ici l'écoulement d'un gaz parfait sans force volumique. Le fluide est supposé newtonien et la viscosité suit une loi de Sutherland [5]. Toutes les variables sont décomposées en une grandeur moyenne et une grandeur fluctuante en utilisant une pondération par la masse volumique, sauf pour la pression et la masse volumique où l'on applique un opérateur centré [6]. En effectuant une moyenne temporelle aux équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie totale et des corrélations doubles de la vitesse, on obtient les équations suivantes (on a négligé les fluctuations des grandeurs "moléculaires": $\left\{c'_p, c'_v, \mu', \lambda'\right\} \approx 0$):

$$\partial_t(\overline{\rho}) + (\overline{\rho}\widetilde{u_j})_{,j} = 0 \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\partial_t(\overline{\rho}\widetilde{u_i}) + (\overline{\rho}\widetilde{u_i}\widetilde{u_j})_{,j} &= (-\overline{p}\delta_{ij} + \overline{\mu}\widetilde{S_{ij}} - \overline{\rho}\widetilde{u''_i u''_j})_{,j} \\ &\quad +(\overline{\mu}\,\overline{S''_{ij}})_{,j}\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\partial_t(\overline{\rho}\widetilde{e_T}) + (\overline{\rho}\widetilde{e_T}\widetilde{u_j})_{,j} &= (-\overline{p}\widetilde{u_j} + \overline{\mu}\widetilde{u_i}\widetilde{S_{ij}} - \overline{\rho}\widetilde{u''_i u''_j}\widetilde{u_i} + \overline{\lambda}\widetilde{T}_{,j})_{,j} \\ &\quad +(\overline{\mu}\,\overline{u''_i\widetilde{S_{ij}}})_{,j} + (\overline{\mu}\widetilde{u_i}\overline{S''_{ij}})_{,j} + (\overline{\mu}\,\overline{u''_i S''_{ij}})_{,j} \\ &\quad -(\overline{\rho}\tfrac{1}{2}\widetilde{u''_i u''_i u''_j})_{,j} \\ &\quad -(\gamma\overline{\rho}\widetilde{e'' u''_j})_{,j}\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$
\begin{aligned}
\partial_t(\overline{\rho}\widetilde{u''_i u''_j}) + \left(\overline{\rho}\widetilde{u''_i u''_j}\widetilde{u_k}\right)_{,k} \quad = \quad & -\overline{\rho}\left(\widetilde{u''_i u''_k}\frac{\partial\widetilde{u_j}}{\partial x_k} + \widetilde{u''_j u''_k}\frac{\partial\widetilde{u_i}}{\partial x_k}\right) \\
- \left(\overline{\rho}u''_i\widetilde{u''_j}u''_k + \delta_{ik}\overline{u''_j p'} + \delta_{jk}\overline{u''_i p'} - (\overline{\mu S_{ik}u''_j} + \overline{\mu S_{jk}u''_i})\right)_{,k} & \\
& +\overline{p'\left(\frac{\partial u''_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u''_j}{\partial x_i}\right)} \qquad , \qquad (2.4) \\
& -\left(\overline{\mu S_{ik}\frac{\partial u''_j}{\partial x_k}} + \overline{\mu S_{jk}\frac{\partial u''_i}{\partial x_k}}\right) \\
& -\overline{u''_i}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_j} - \overline{u''_j}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i}
\end{aligned}
$$

où $\widetilde{u}_i$ désigne la vitesse dans la direction de la coordonnée cartésienne x_i, $\overline{\mu}$ est la viscosité dynamique et $\widetilde{e}_T$ l'énergie totale,

$$\widetilde{e_T} \;=\; \overline{c}_v\,\widetilde{T} + \frac{\widetilde{u_i}\widetilde{u_i}}{2} + k \;=\; \widetilde{e} + \frac{\widetilde{u_i}\widetilde{u_i}}{2} + k \qquad . \qquad (2.5)$$

$\overline{c}_v$ est la capacité calorifique du fluide à volume constant, $\overline{\lambda}$ le coefficient de conductivité de chaleur, $\widetilde{T}$ la température, γ le rapport entre les capacités calorifiques, k l'énergie turbulente. On utilise la convention de sommation sur des indices répétés ($\Phi_i\Phi_i \equiv \sum_{i=1}^{3}\Phi_i\Phi_i$). Par δ_{ij} on note la fonction de Kronecker ($\delta_{ii} = 1$, $\delta_{i\neq j} = 0$). Le tenseur des déformations est défini par:

$$\widetilde{S}_{ij} = (\widetilde{u}_{i,j} + \widetilde{u}_{j,i}) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\widetilde{u}_{k,k} \qquad . \qquad (2.6)$$

Dans le système (2.1) à (2.4) seule la première ligne de chaque équation est fermée. On identifie de nombreuses corrélations inconnues, qui peuvent être regroupées en sept categories:

- flux de masse turbulent
- corrélation triple de vitesse
- flux de chaleur turbulent
- diffusion par fluctuation de pression
- pression–déformation
- dissipation des composantes de la tension turbulente
- corrélation dissipative dans l'équation d'énergie.

Chapitre 3

Fermeture du second ordre: le modèle de base

La fermeture de base consiste en une hypothèse d'incompressibilité du champ fluctuant. Cela permet de supprimer les termes supplémentaires par rapport au cas incompressible et de traduire le progrès dans la fermeture incompressible par une extension à masse volumique variable. Cette hypothèse faite dans un premier temps, sera remise en question et réevaluée dans la prochaine étape de ce travail. On peut déjà remarquer que les situations où les éffets compressibles sont importants (caractérisés par le nombre de Mach turbulent) posent des problèmes particuliers pour les modélisations au second ordre basées sur l'incompressibilité du champ (cf. [7]). Dans cet esprit, la modélisation suivante n'est pas adaptée au calcul des écoulements extrémément compressibles mais elle est néanmoins utile en considérant le fait que les effets solénoidaux sont prédominants dans la plupart des applications.

3.1 Modélisation de la pression-déformation

Des simulations directes [8, 9] pour la turbulence homogène cisaillée montrent que la compressibilité du champ fluctuant, caractérisée par un nombre de Mach turbulent élevé, influence la structure du tenseur d'anisotropie. Les mécanismes redistributifs sont modifiés par l'action d'une forte compressibilité. Néanmoins, à présent il n'existe aucun modèle de pression-déformation développé rigoureusement en tenant compte de la compressibilité du champ fluctuant. En l'absence de nouvelles approches, on est obligé d'utiliser des modèles construits pour des fluides incompressibles.

Dans le cas strictement incompressible, la divergence de la vitesse étant nulle, la pression-déformation est une expression purement redistributive, donc avec une trace nulle. Pour obtenir un terme de cette forme, on peut extraire la trace, qui est la pression-dilatation [10, 11]:

$$\overline{p'\left(u''_{i,j}+u''_{j,i}\right)}=\underbrace{\overline{p'\left(u''_{i,j}+u''_{j,i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}u''_{k,k}\right)}}_{\Pi_{dev}}+\frac{2}{3}\delta_{ij}\overline{u''_{k,k}p'} \quad . \tag{3.1}$$

On suppose ensuite, que le déviateur, Π_{dev}, peut être représentée par une extension à masse volumique variable d'un modèle classique dérivé du cas incompressible. Pour cela, on projète toute l'influence de la compressibilité sur la pression-dilatation.

La modélisation classique du terme Π_{dev} est fait par référence à l'équation de Poisson pour les fluctuations de pression (Chou [12], Rotta [13], Launder [14]). Avec le théorème de Green, on obtient un intégrale des corrélations de vitesses et leurs gradients en deux points qui contient trois termes distincts: un intégrale de surface, Π_w, qui prend en compte l'influence des parois sur la pression-déformation; un terme qui représente l'interaction entre le champ moyen et le champ fluctuant, Π_2, dit "terme rapide"; un expression qui ne dépend que de la turbulence elle-même, Π_1, dit "terme lent".

La plupart de modélisations de la pression-déformation sont de la forme suivante ([15]):

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \varepsilon\cdot A_{ij}\left(\mathbf{b}\right) && (3.2)\\ \Pi_2 &= \frac{\partial\widetilde{u}_k}{\partial x_l}\cdot k\cdot M_{ijkl}\left(\mathbf{b}\right) \quad , && (3.3)\end{aligned}$$

où A_{ij} et M_{ijkl} sont des fonctions tensorielles isotropes de l'argument $\mathbf{b}$, qui est le tenseur d'anisotropie de composantes

$$b_{ij} = \frac{\widetilde{u_i u_j}}{2k}-\delta_{ij}\frac{1}{3} \quad . \tag{3.4}$$

Le fait que les déformations moyennes, $\widetilde{u}_{k,l}$ aient été sorties de la fonction reflète l'hypothèse d'homogénéité faite au cours de la modélisation. De plus, on a negligé tous les effets de mémoire sur les relations en choisissant des fonctions au lieu des fonctionelles.

Par des considérations basées sur la théorie des invariants tensoriels, Lumley [16] montre qu'il existe une forme générale des modèles de la forme (3.2) à (3.3) qui est invariant par un changement de repère (ici on montre l'écriture de Speziale [15]):

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 + \Pi_2 = \; & a_0 \varepsilon b_{ij} + a_1 \varepsilon \left(b_{ik} b_{kj} - \tfrac{1}{3} II \delta_{ij} \right) + a_2 k \overline{S}_{ij} \\
& + \left(a_3 \mathrm{trace} \left(\mathbf{b} \cdot \overline{\mathbf{S}} \right) + a_4 \mathrm{trace} \left(\mathbf{b}^2 \cdot \overline{\mathbf{S}} \right) \right) k b_{ij} + \left(a_5 \mathrm{trace} \left(\mathbf{b} \cdot \overline{\mathbf{S}} \right) \right. \\
& \left. + a_6 \mathrm{trace} \left(\mathbf{b}^2 \cdot \overline{\mathbf{S}} \right) \right) k \left(b_{ik} b_{kj} - \tfrac{1}{3} II \delta_{ij} \right) + a_7 k \left(b_{ik} \overline{S}_{jk} \right. \\
& \left. + b_{jk} \overline{S}_{ik} - \tfrac{2}{3} \mathrm{trace} \left(\mathbf{b}^2 \cdot \overline{\mathbf{S}} \right) \delta_{ij} \right) + a_8 k \left(b_{ik} b_{kl} \overline{S}_{jl} \right. \\
& \left. + b_{jk} b_{ki} \overline{S}_{il} - \tfrac{2}{3} \mathrm{trace} \left(\mathbf{b}^2 \cdot \overline{\mathbf{S}} \right) \delta_{ij} \right) + a_9 k \left(b_{ik} \overline{\omega}_{jk} \right. \\
& \left. + b_{jk} \overline{\omega}_{ik} \right) + a_{10} k \left(b_{ik} b_{kl} \overline{\omega}_{jl} + b_{jk} b_{kl} \overline{\omega}_{il} \right)
\end{aligned}
,
$$

où

$$
II = b_{ij} b_{ji}, \qquad III = b_{ik} b_{kl} b_{li},
$$

$$
\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad \overline{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right), \tag{3.5}
$$

et les coefficients a_i qui sont des fonctions des invariants II et III.

Dans le cadre de cette étude, on a retenu trois modèles de complexités différentes pour l'implementation dans le solveur NATURng:

- Le modèle de Launder *et al.* (LRR) [14] peut être considéré comme la troncature à l'ordre un en b_{ij} de l'expression (3.5). Le modèle LRR n'est pas réalisable d'aprés Schumann [17], mais à cause de sa simplicité, on l'utilise beaucoup.

- Le modèle de Speziale *et al.* (SSG) [18] a une forme assez proche du modèle LRR, mais avec des coefficients non-constants. Il est dérivé en accord de résultats de la théorie de distorsion rapide (RDT) pour des écoulements cisaillés et des écoulements en rotation. La réalisabilité faible est respectée par le modèle SSG.

- Fu *et al.* [19] ont proposé un modèle (FLT) de la pression-déformation qui est une fonction cubique des anisotropies b_{ij}. Il s'agit d'un expression réalisable.

Ces trois modéles sont détaillés dans l'annexe A. Puisqu'on modélise un terme purement rédistributif, il faut notamment s'assurer que la trace des expressions est nulle dans une situation où la divergence de la vitesse moyenne n'est pas nulle.

L'influence des parois solides, présente dans le terme Π_w, est pour l'instant exclue de la modélisation. Par conséquent, la redistribution d'énergie entre les composantes n'est pas modifiée par la présence des parois. Cette modélisation peut être appellé modélisation a haut Reynolds, car l'équilibre des tensions est modifié par la diminution de ce nombre caractéristique à proximité de paroi.

3.2 Mécanismes dissipatifs

Le terme dissipatif des équations pour les tensions de Reynolds (2.4),

$$-\left(\overline{\mu S_{ik}\frac{\partial u''_j}{\partial x_k}} + \overline{\mu S_{jk}\frac{\partial u''_i}{\partial x_k}}\right) \equiv -\overline{\rho}\,\varepsilon_{ij} \quad , \tag{3.6}$$

prend en général une valeur distincte pour chaque composante. La structure de ce tenseur ε_{ij} s'approche d'une forme isotrope pour des nombres de Reynolds élevés (cf. [20]). Dans cette étude, on exprime la dissipation par sa valeur isotrope

$$\varepsilon_{ij} \approx \frac{2}{3}\,\delta_{ij}\,\varepsilon \quad , \tag{3.7}$$

en négligeant la partie anisotrope de l'expression exacte. On peut voir cette approche d'une autre manière: la dissipation est décomposée en un déviateur et la trace. Cette première contribution est inclue dans le modèle pour la pression-déformation, ce qui fait de celle-ci un modèle pour la somme des mécanismes redistributifs. En particulier, on peut argumenter que la calibration de la modélisation pour Π_{dev} par réference à l'expérience tient compte de la redistribution par le terme dissipatif.

La dissipation de l'énergie cinétique turbulente ε est également obtenue par une équation de transport. On peut déduire l'équation exacte, mais elle est très complexe dans le cas d'un fluide compressible (El Thary [21]), puisqu'elle contient environ 60 termes inconnus. Au lieu d'essayer de modéliser les expressions une à une, la modélisation est en général faite globalement en établissant une équation artificielle qui suit l'équation de k [22]. La forme standard, qui est utilisée ici, s'écrit:

$$\begin{aligned}\partial_t(\overline{\rho}\varepsilon) + (\overline{\rho}\varepsilon\widetilde{u_j})_{,j} \quad &= \quad -C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}\overline{\rho}\widetilde{u''_i u''_j}\tilde{u}_{i,j} - C_{\varepsilon 2}\overline{\rho}\frac{\varepsilon^2}{k} \quad , \\ &\quad\; + D^{\nu}_{\varepsilon} + D^{t}_{\varepsilon}\end{aligned} \tag{3.8}$$

où D_ε^ν et D_ε^t désignent respectivement la diffusion visqueuse et turbulente qui sont modélisées dans le paragraphe 3.3. Les constantes prennent les valeurs standard $C_{\varepsilon 1} = 1.44$ et $C_{\varepsilon 2} = 1.92$ (cf. [23]).

L'équation (3.8) correspond à la forme incompressible sauf pour la masse volumique qui est variable. Différentes études sur l'influence de la compressibilité sur la dissipation ont été publiées (Sarkar et al. [24], Sarkar [25], Sarkar et al. [26], Fujiwara et Arakawa [27], Zeman [28], Zhang et al. [29], Coleman et Mansour [30]) en proposant des modifications de la dissipation en fonction du nombre de Mach turbulent, de la variation temporelle de la viscosité et de la dilatation moyenne. Une analyse de ces hypothèses fera l'objet d'une prochaine étude. Dans la configuration de base, on garde la forme standard de l'équation (3.8).

3.3 Les termes diffusifs

Dans les équations des tensions turbulentes, trois termes de nature diffusive apparaissent: la diffusion par les fluctuations de pression, la corrélation triple de vitesses et la diffusion visqueuse.

La diffusion provoquée par les fluctuations de pression est aussi difficile à mesurer expérimentalement que la pression-déformation. Dans un écoulement incompressible, il semble que ce terme soit faible devant les autres termes diffusifs [31]. Il est donc rarement pris en compte (voir l'étude de Shao [32] pour une analyse de modèles). Dans une situation à compressibilité importante, cette conclusion pourrait être mise en doute, car on s'attend à ce que les fluctuations de pression jouent un rôle plus important. Yoshizawa [33] utilise la loi d'état thermodynamique pour déduire une hypothèse en fonction du flux de chaleur. Néanmoins, ici on néglige ce terme.

La diffusion visqueuse n'est important que pour des Reynolds bas, car à nombre de Reynolds élevé, elle est négligeable devant la diffusion turbulente. Ici on simplifie le traitement de ce terme en introduisant la viscosité moléculaire dans le coefficient pour le modèle de la diffusion turbulente.

Pour exprimer la corrélation triple de vitesses, il existe des modèles algébriques de différentes compléxités. Dans un ordre croissante de difficulté: modèle isotrope, modèle de tranport de gradient de Daly et Harlow [34], modèle de Mellor et Herring [35], modèle de Hanjalic et Launder [36]. Puisqu'il ne semble pas qu'un de ces modèles soit plus précis qu'un autre, on utilise ici l'expression le plus simple: un modèle isotrope (qui ne conserve pas la symmétrie initiale de la corrélation triple). Le transport diffusif dans une direction donnée s'effectue uniquement par le dérivée seconde dans cette direction de la corrélation double. Le modèle pour la somme des mécanismes diffusifs s'écrit alors:

$$-\left[\overline{\rho}\widetilde{u''_i u''_j u''_k} + \delta_{ik}\overline{u''_j p'} + \delta_{jk}\overline{u''_i p'} - \left(\overline{\mu S_{ik} u''_j} + \overline{\mu S_{jk} u''_i}\right)\right]_{,k} \approx \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{ij}}\right)\left(\widetilde{u''_i u''_j}\right)_{,k}\right]_{,k} \quad . \tag{3.9}$$

Le terme (3.9) apparaît avec une contraction des indices i et j dans l'équation de l'énergie, on utilise donc dans cette équation le même modèle, soit:

$$-\left[\frac{1}{2}\overline{\rho}\widetilde{u''_i u''_i u''_k} - \overline{\mu S_{ik} u''_i}\right]_{,j} \approx \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{ij}}\right) k_{,j}\right]_{,j} \quad . \tag{3.10}$$

Les termess diffusifs qui agissent sur la dissipation d'énergie turbulente sont modélisés de façon analogue:

$$D^{\nu}_{\varepsilon} + D^{t}_{\varepsilon} \approx \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon}}\right)\varepsilon_{,j}\right]_{,j} \quad . \tag{3.11}$$

Les valeurs des constantes de la diffusion ne peuvent pas être choisies indépendamment (voir annexe B). On utilise dans cette étude $\sigma_{ij} = 0.941$ et $\sigma_{\varepsilon} = 1.225$.

Le flux de chaleur turbulent est de la forme d'un transport turbulent d'un scalaire. On applique donc une hypothèse de transport par gradient, prise sous forme isotrope,

$$-\left(\gamma\overline{\rho}\widetilde{e''u''_j}\right)_{,j} \approx \left[\gamma\frac{\mu_t}{\mathrm{Pr}_t}\widetilde{e}_{,j}\right]_{,j} \quad , \tag{3.12}$$

avec $\mathrm{Pr}_t = 0.72$ pour le nombre de Prandtl turbulent.

3.4 Les équations modélisées

Avec les modélisations brièvement exposées dans les paragraphes précédents, le système des équations (2.1) à (2.4) est fermé. On remarque, de plus, que tous les termes liés à la compressibilité du champ fluctuant ont été négligés, notamment les expressions qui contiennent le flux de masse turbulent (termes proportionels à $\overline{u''}_i$).

$$\partial_t(\overline{\rho}) + (\overline{\rho}\widetilde{u}_j)_{,j} = 0 \tag{3.13}$$

$$\partial_t(\overline{\rho}\widetilde{u}_i) + (\overline{\rho}\widetilde{u}_i\widetilde{u}_j)_{,j} = \left(-\overline{p}\delta_{ij} + \overline{\mu}\widetilde{S}_{ij} - \overline{\rho}\widetilde{u''_i u''_j}\right)_{,j} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\partial_t(\overline{\rho}\widetilde{e_T})+(\overline{\rho}\widetilde{e_T}\widetilde{u_j})_{,j} &= (-\overline{p}\widetilde{u_j}+\overline{\mu}\widetilde{u_iS_{ij}}-\overline{\rho}\widetilde{u_i''u_j''}\widetilde{u_i}+\frac{\gamma\overline{\mu}}{\mathrm{Pr}}\widetilde{e_{,j}})_{,j}\\ &\quad+\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_{ij}}\right)k_{,j}\right]_{,j}+\left[\gamma\frac{\mu_t}{\mathrm{Pr}_t}\tilde{e}_{,j}\right]_{,j}\end{aligned}\tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}\partial_t(\overline{\rho}\widetilde{u_i''u_j''})+\left(\overline{\rho}\widetilde{u_i''u_j''}\widetilde{u_k}\right)_{,k} &= -\overline{\rho}\left(\widetilde{u_i''u_k''}\frac{\partial\widetilde{u_j}}{\partial x_k}+\widetilde{u_j''u_k''}\frac{\partial\widetilde{u_i}}{\partial x_k}\right)\\ &\quad+\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_{ij}}\right)\left(\widetilde{u_i''u_j''}\right)_{,k}\right]_{,k}\\ &\quad+\Pi_1+\Pi_2-\frac{2}{3}\,\delta_{ij}\,\overline{\rho}\,\varepsilon\end{aligned}\tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\partial_t(\overline{\rho}\varepsilon)+(\overline{\rho}\varepsilon\widetilde{u_j})_{,j} &= -C_{\varepsilon1}\frac{\varepsilon}{k}\overline{\rho}\widetilde{u_i''u_j''}\tilde{u}_{i,j}-C_{\varepsilon2}\overline{\rho}\frac{\varepsilon^2}{k}\\ &\quad+\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\varepsilon_{,j}\right]_{,j}\end{aligned}\quad ,\tag{3.17}$$

où les expressions pour la pression-déformation Π_1 et Π_2 sont donnés dans l'annexe A. La définition du nombre de Prandtl

$$Pr=\frac{c_p\,\overline{\mu}}{\overline{\lambda}}\tag{3.18}$$

est utilisée pour exprimer le gradient de température (3.15) en fonction d'un gradient d'énergie interne $\tilde{e}$. Trois lois d'état ferment le système:

$$\overline{p} = (\gamma-1)\left[\overline{\rho}\widetilde{e}_T-\frac{1}{2\overline{\rho}}\left(\overline{\rho}\widetilde{u_i}\right)^2-\frac{1}{2}\overline{\rho}\widetilde{u_i''u_i''}\right]\tag{3.19}$$

$$\mu_t = c_\mu\frac{\overline{\rho}\,k^2}{\varepsilon}\tag{3.20}$$

$$\frac{\mu}{\mu_{ref}} = \left(\frac{T}{T_{ref}}\right)^{3/2}\frac{T_{ref}+110\mathrm{K}}{T+110\,\mathrm{K}}\quad .\tag{3.21}$$

Les constantes utilisées sont résumées ci-dessus:

C_μ	σ_ε	σ_{ij}	Pr	Pr_t	$C_{\varepsilon1}$	$C_{\varepsilon2}$
0.09	1.225	0.941	0.72	0.72	1.44	1.92

.

3.5 Réalisabilité

Le système des équations modélisées (3.13) à (3.16) représente une approximation qui décrit certaines propriétés statistiques d'un écoulement turbulent compressible à haut nombre de Reynolds. On s'attend à ce que ce modèle reflète en quelque sorte la réalité telle qu'elle est par exemple mesurée par l'expérience. D'autre part, la modélisation est basée sur les équations de Navier-Stokes qui constituent une description exacte du processus. Le modèle doit également être conforme aux propriétés des équations fondamentales. Il est donc possible de déduire un nombre de contraintes à partir de considérations mathématiques (tensorielles), physiques et phénoménologiques s'appliquant aux variables du problème. La conformité avec l'ensemble de ces contraintes peut être appellée la *réalisabilité* du modèle.

Schumann [17], Lumley [16] et Du Vachat [37] ont reconnu parallèllement le besoin de formuler des modèles pour les corrélations du deuxième ordre (ou d'ordre plus élevé) qui vérifient les conséquences tensorielles de la positivité de l'énergie des composantes et de l'inégalité de Schwarz. Concernant le tenseur des tensions de Reynolds, on n déduit le concept de *over-realisability* [38]:

- Le tenseur des tensions de Reynolds est dit *over-realisable* si

$$f \geq 0\,, \quad f = \widetilde{u_\alpha u_\alpha},\ \delta_2^i,\ \det(\widetilde{u_\alpha u_\beta}) \quad , \qquad (3.22)$$

  où

$$\delta_2^i = \widetilde{u_\alpha u_\alpha}\,\widetilde{u_\beta u_\beta} - \widetilde{u_\alpha u_\beta}^2 \quad , \alpha \neq \beta,\ \alpha \neq i,\ \beta \neq i \quad .$$

Pour que la réalisabilité du tenseur de Reynolds soit toujours possible, Schumann [17] et Lumley [16] (voir également Shih *et al.* [39] et Hérard [38]) imposent un comportement "préventif" au modèle près d'un état limite, dit *réalisabilité forte*:

- Un modèle est dit *fortement réalisable* si

$$f \geq 0 \quad \cup \quad f = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \cup \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right) \geq 0\right) \quad , \qquad (3.23)$$

$$f = \widetilde{u_\alpha u_\alpha},\ \delta_2^i,\ \det(\widetilde{u_\alpha u_\beta})\,,$$

  où $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ est l'opérateur convectif $\mathrm{d}/\mathrm{d}t \equiv \partial_t() + \widetilde{u}_k()_{,k}$.

Une forme moins contraignante de ce dernier point a été proposée par Pope (cf. [40]):

- Un modèle est dit *faiblement réalisable* si:

  $$f \geq 0 \quad \cup \quad f = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} > 0\,, \quad f = \widetilde{u_\alpha u_\alpha},\ \delta_2^i,\ \det(\widetilde{u_\alpha u_\beta}) \quad . \tag{3.24}$$

  La différence vient du fait que le modèle *faiblement réalisable* ne permet pas d'obtenir une turbulence bidimensionelle (dans la limite d'une très forte rotation par exemple).

Speziale [41, 18] insiste sur l'objectivité d'une modélisation:

- Un modèle est dit *objectif* si avec un changement de référence temporelle et spatiale:

  $$x^* = Q(t) \cdot x + b(t)\,, \quad t^* = t + c \quad , \tag{3.25}$$

  un champ vectoriel V se transforme selon:

  $$V^* = Q \cdot V \quad , \tag{3.26}$$

  et un tenseur selon:

  $$R^* = Q\,R\,Q^T \quad , \tag{3.27}$$

  où c est une constante, b un champ vectoriel quelconque et Q un tenseur orthogonal.

Cette dernière contrainte est controversée et rarement appliquée. Speziale [41] a montré que la corrélation double de vitesse obtenue par un moyenne d'ensemble de réalisations vérifie bien l'objectivité, mais que ce n'est pas le cas pour les équations exactes qui sont déduites des équations Navier-Stokes. Speziale pense que l'équation de transport des tensions de Reynolds n'ait pas le bon moyen d'obtenir cette corrélation.

On ajoute à la liste des conditions àvérifier la positivité de l'échelle de temps turbulente $\theta \equiv k/\varepsilon > 0$, qui implique la positivité de la dissipation (ou d'une variable équivalente).

Dans le cadre des écoulements compressibles (notamment à haute vitesse), la positivité des variables thermodynamiques (densité, température, pression) doit être assurée. En présence de discontinuités, ces propriétés de positivité peuvent disparaître avec un mauvais choix du système de convection (voir Hérard [42] pour une discussion concernant le modèle k-ε). La réalisabilité "thermodynamique" est particulièrement importante pour la construction de solveurs numériques (chapitre 4.1).

Considérant la complexité du système des équations modélisées (3.13) à (3.16), il semble impossible de démontrer des propriétés générales concernant la réalisabilité. A cause de cette difficulté, la plupart des études sont basées sur une analyse de termes individuels [16] ou d'écoulements idéalisés (homogènes) [40, 39, 43].

Hérard [38, 44, 45] donne un nombre de résultats portant sur des systèmes d'équations complètes dans le cas incompressible. Il définit une classe de modèles du second ordre du type gaussien (à diffusion nulle): le système qui comprend les équations pour les tensions de Reynolds ainsi que celles pour le champ moyen vérifient, dans ce casla réalisabilité forte. Cette classe contient le modèle de pression-déformation lent Π_1 de Lumley [16]. Elle permet également de retrouver la partie rapide Π_2 du modèle FLT [19]. Dans ce dernier cas, les gradients de vitesse moyenne doivent rester bornés pour assurer la réalisabilité forte. Les modèles LRR et SSG ne font pas partie de cette classe fortement réalisable.

Concernant l'introduction d'un terme non-gaussien (par exemple en utilisant notre modèle isotrope pour la diffusion), Hérard [38] montre que la réalisabilité forte ne peut être assurée que pour des valeurs de δ_2^i et de $\det(\widetilde{u_\alpha u_\beta})$ bornées.

L'échelle de temps turbulente θ reste positive et bornée dans le cas gaussien (sans diffusion) pour des valeurs de $C_{\varepsilon 2} \geq 1$ [38]. Par contre, pour une fermeture générale avec un terme diffusif dans les équations de k et ε, on ne peut pas analyser les propriétés de l'échelle de temps θ.

Cette discussion montre que la réalisabilité entière, par rapport à l'ensemble des contraintes et en considérant le système complet des équations, ne peut pas être vérifiée a priori dans le cas présent. Si on considère une analogie des équations modélisées avec le cas d'un système dynamique, on peut constater que, dans notre cas, la réalisabilité des données d'entrée n'est pas suffisante. Il est, de plus, nécessaire d'assurer numériquement la réalisabilité en cours de solution. On discutera de l'implémentation numérique dans le paragraphe 4.3.

Chapitre 4

Résolution numérique des équations

Le système des équations de Navier–Stokes est du type mixte elliptique–hyperbolique. Cela est également vrai pour le système des équations moyennes. Cette propriété caractérise aussi le système qui inclut les équations pour les tensions $\overline{\rho}\widetilde{u_i''u_j''}$. Celui-ci se présente sous la forme matricielle–vectorielle

$$\partial_t \vec{Q} + \nabla \vec{F} = \nabla \vec{R} + \vec{S} \quad , \tag{4.1}$$

où $\vec{Q}$ représente le vecteur des variables conservatives, $\vec{F}$ les flux convectifs, $\vec{R}$ les flux visqueux et $\vec{S}$ les termes sources. Selon la nature des termes, on utilise une méthode d'éléments-finis ou de volumes finis. Cette formulation mixte repose sur les études de Stoufflet [46] en non-visqueux et Rostand [47] pour les équations de Navier–Stokes.

On pose alors pour la formulation intégrale des équations de transport sur le domaine $\mathcal{D}$:

$$\int_{\mathcal{D}} \partial_t \vec{Q}\, \psi_i \,\mathrm{d}v + \int_{\mathcal{D}} \nabla \vec{F}\, \psi_i \mathrm{d}v = \int_{\mathcal{D}} \nabla \vec{R}\, \phi_i \,\mathrm{d}v + \int_{\mathcal{D}} \vec{S}\, \phi_i \mathrm{d}v \quad , \tag{4.2}$$

où ψ_i désigne la fonction caractéristique de la cellule qui constitue un volume fini ($\psi_i = 1$ à l'intérieur de la cellule C_i, et $\psi_i = 0$ ailleurs) et ϕ_i représente la fonction de base de l'élément fini linéaire (P1).

On obtient le maillage non-structuré de la façon suivante:

- définition de la position des noeuds
- construction d'éléments finis triangulaires en bi-dimensionnel, tétraédriques en tridimensionnel
- construction des cellules volumes finis par connexion des barycentres et des arêtes des éléments finis.

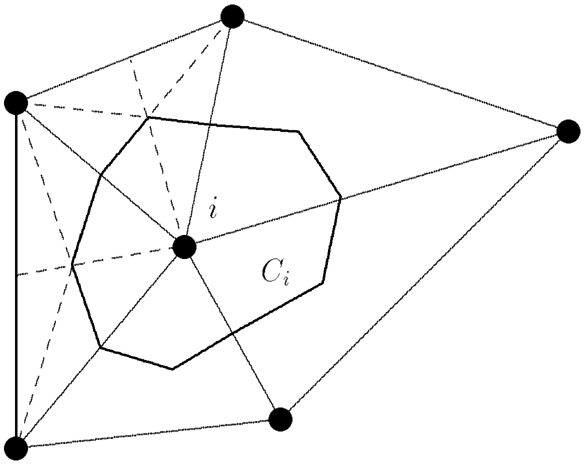


Figure 4.1: Construction des volumes de contrôle sur maillage non-structuré

La figure 4.1 montre la situation dans le cas bi-dimensionnel.

Le système (4.2) est transformé par le théorème de Gauss appliqué à l'intégrale des flux convectifs sur la cellule C_i, et par une intégration par partie des termes visqueux [47], soit:

$$\int_{C_i} \partial_t \vec{Q}\, \mathrm{d}v + \oint_{\Gamma_{C_i}} \vec{F}\,\vec{n}\, \mathrm{d}\sigma = \oint_{\Gamma} \vec{R}\,\vec{n}\,\phi_i\, \mathrm{d}\sigma - \int_{\mathcal{D}} \vec{R}\,\nabla\, \phi_i \mathrm{d}v + \int_{\mathcal{D}} \vec{S}\,\phi_i \mathrm{d}v \quad , \quad (4.3)$$

où Γ_{C_i} dénote la frontière de la cellule C_i, Γ la frontière du domaine $\mathcal{D}$ et $\vec{n}$ est le vecteur unitaire qui est normale à la frontière Γ avec une oriéntation vers l'extérieure.

L'avantage de traiter les termes visqueux par la méthode de Galerkin en élément fini vient de la facilité à évaluer les gradients sur un maillage non-structuré, ceux-ci sont directement controlés par la fonction de forme ϕ_i. D'autre part, on est obligé d'utiliser une méthode de volume fini pour capter les phénomènes convectifs. Seule la propriété de conservation permet une bonne résolution des discontinuités.

4.1 La partie non-visqueuse

Nous allons tout d'abord définir les termes qui constituent la partie convective du système (4.1). On rappelle que ce système est composé de termes elliptiques et hyperboliques. L'objet de notre solveur compressible est un sous-système convectif qui ne comprend que des termes hyperboliques. Dans la littérature, tous les termes non-conservatifs sont souvent considérés comme des termes visqueux [48] (pour les raisons precisés ci-dessous) tout comme les tensions turbulentes [49, 11] qui sont également integrées dans les tensions moléculaires (par reférence à l'analogie de Boussinesq).

Pourtant, le raisonnement le plus simple consiste à regarder l'origine des termes dans les équations instantanées. On s'attend à ce que les termes des équations moyennes qui proviennent de la partie hyperbolique des équations instantanées seront également du type hyperbolique. En suivant le processus de dérivation du système des équations statistiques (e.g. [50, 31]), on arrive à une répartition de la forme suivante:

$$\partial_t \vec{Q} + \nabla \widetilde{\vec{F}}_c + \widetilde{\vec{H}} = \nabla \widetilde{\vec{R}} + \widetilde{\vec{S}} \quad , \tag{4.4}$$

où le second membre comprend les termes visqueux et les termes sources non-hyperboliques:

$$\begin{aligned} \widetilde{\vec{R}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{\mu}\,\overline{S_{ij}} \\ \overline{\mu}\,\overline{u_i S_{ij}} + \overline{\lambda}\widetilde{T}_{,j} - \gamma\overline{\rho}\widetilde{e'' u''_j} \\ \overline{\mu S_{ik} u''_j} + \overline{\mu S_{jk} u''_i} \end{bmatrix} \\ \widetilde{\vec{S}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{ij} \end{bmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{4.5}$$

et le membre de gauche contient les termes restants:

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= \left[\overline{\rho}, \overline{\rho}\vec{v}, \overline{\rho}\widetilde{e}_T, \overline{\rho}\widetilde{u''_i u''_j}\right]^T \\ \widetilde{\vec{F}}_c &= \begin{bmatrix} \overline{\rho}\vec{v} \\ \vec{v}\left(\overline{\rho}\vec{v} + \overline{p}\overline{\overline{I}}\right) + \overline{\overline{\tau}} \\ \vec{v}\left(\overline{\rho}\widetilde{e}_T + \overline{p} + \overline{\overline{\tau}}\right) + \frac{1}{2}\overline{\rho}\widetilde{u''_i u''_i u''_j} \\ \vec{v}\,\overline{\overline{\tau}} + \overline{\rho}\widetilde{u''_i u''_j u''_k} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\widetilde{\vec{H}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \overline{\rho}\widetilde{u''_i u''_k}\widetilde{u}_{j,k} + \overline{\rho}\widetilde{u''_j u''_k}\widetilde{u}_{i,k} - \overline{u''_i p_{,j}} - \overline{u''_j p_{,i}} \end{bmatrix} \quad .$$

Pour simplifier, les termes de pression et ceux de viscosité ont été regroupés.

Néanmoins, on ne peut pas montrer l'hyperbolicité, car le système (4.4) à (4.6) n'est pas fermé. On met alors au second membre les termes inconnus, c'est-à-dire la corrélation triple $\overline{\rho}\widetilde{u''_i u''_j u''_k}$ et les termes de pression de la forme $\overline{u''_\alpha p_{,\beta}}$. En négligeant "l'inhomogénéité", notre système convectif s'écrit:

$$\partial_t \vec{Q} + \nabla \vec{F}_c + \vec{H} = 0 \quad ,$$

$$\vec{F}_c = \begin{bmatrix} \overline{\rho}\vec{v} \\ \vec{v}\left(\overline{\rho}\vec{v} + \overline{p}\overline{\overline{I}}\right) + \overline{\overline{\tau}} \\ \vec{v}\left(\overline{\rho}\widetilde{e}_T + \overline{p} + \overline{\overline{\tau}}\right) \\ \vec{v}\,\overline{\overline{\tau}} \end{bmatrix}$$

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \overline{\rho}\widetilde{u''_i u''_k}\widetilde{u}_{j,k} + \overline{\rho}\widetilde{u''_j u''_k}\widetilde{u}_{i,k} \end{bmatrix} \quad . \tag{4.7}$$

On remarque qu'il s'agit d'un système non-conservatif, car la production ne peut pas être mise sous forme d'une divergence. On adopte donc une écriture quasi–linéaire

$$\partial_t \vec{Q} + \overline{\overline{A}} \cdot \nabla \vec{Q} = 0 \quad , \tag{4.8}$$

en prenant

$$\overline{\overline{A}} = \frac{\partial \vec{F}_c}{\partial \vec{Q}} + \overline{\overline{P}}, \qquad \overline{\overline{P}} \cdot \nabla \vec{Q} = \vec{H} \quad , \tag{4.9}$$

où $\overline{\overline{A}}$ est une représentation symbolique d'une combinaison linéaire des matrices de flux dans les directions n_x, n_y et n_z où l'on définit: $\vec{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$. On a donc :

$$\overline{\overline{A}} = A_x n_x + A_y n_y + A_z n_z \quad . \tag{4.10}$$

Les matrices $\overline{\overline{J}} \equiv \partial(\vec{F}_c)/\partial(\vec{Q})$ et $\overline{\overline{P}}$ sont données dans l'annexe C.

L'écriture (4.8) permet d'analyser le type du système en calculant les valeurs propres de $\overline{\overline{A}}$, solutions de la relation

$$\left|\overline{\overline{A}} - \overline{\overline{I}}\lambda_i\right| = 0 \quad . \tag{4.11}$$

On trouve dans le cas bi-dimensionel:

$$\begin{aligned} \lambda_{1\ldots4} &= \vec{v}\vec{n} \\ \lambda_{5,6} &= \vec{v}\vec{n} \pm \sqrt{\Phi} \\ \lambda_{7,8} &= \vec{v}\vec{n} \pm \sqrt{3\,\Phi + \widetilde{c}^2} \\ \Phi &= n_x^2 \widetilde{u''u''} + 2 n_x n_y \widetilde{u''v''} + n_y^2 \widetilde{v''v''} \quad . \end{aligned} \tag{4.12}$$

Les valeurs propres λ_i sont identiques à celles du système des équations d'Euler dans la limite d'un turbulence nulle. Pour que le système soit hyperbolique, l'expression Φ doit être positive ou nulle. Ceci est assuré par

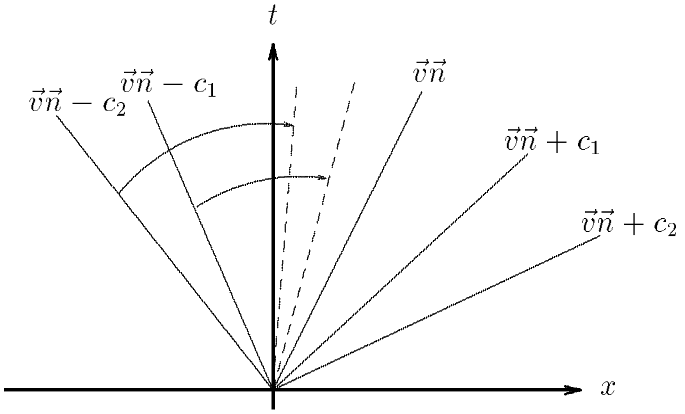


Figure 4.2: Définition du nombre de Mach

la réalisabilité dans le sens de Schumann [17], c'est-à-dire par le fait que les composantes normales sont positives et par l'inégalité de Schwarz. Cette dernière contrainte impose une valeur limite inférieure pour la corrélation $\widetilde{u''v''}$:

$$\left.\widetilde{u''v''}\right]_{lim} = -\sqrt{\widetilde{u''u''}\cdot\widetilde{v''v''}} \quad . \tag{4.13}$$

Dans ce cas, il vient

$$\begin{aligned} \Phi &= n_x^2\widetilde{u''u''} - 2n_x n_y\sqrt{\widetilde{u''u''}\widetilde{v''v''}} + n_y^2\,\widetilde{v''v''} \\ &= \left(n_x\sqrt{\widetilde{u''u''}} - n_y\sqrt{\widetilde{v''v''}}\right)^2 \geq 0 \quad , \end{aligned} \tag{4.14}$$

ce qui assure que les valeurs propres sont du type réel.

La modification du système d'onde (4.12) par rapport à la dynamique des gaz est importante. On considère la définition du nombre de Mach associé à notre écoulement. Une interprétation graphique est donnée sur la figure 4.2. Dans la situation supersonique, toutes les ondes caractéristiques ont le même signe. Un point sonique est donc un point, où une onde $\vec{v}\vec{n} \pm c_i$ s'annulle. On voit que notre système permet la définition de deux nombres de Mach donnés par:

$$\mathrm{M}_1 \equiv \frac{\vec{v}\vec{n}}{\sqrt{\Phi}}, \qquad \mathrm{M}_2 \equiv \frac{\vec{v}\vec{n}}{\sqrt{3\Phi + c^2}} \quad . \tag{4.15}$$

On note: *un écoulement associé au système (4.7) est supersonique si* $M_2 > 0$.

Le rapport entre ces deux nombres de Mach donne la définition d'un nombre de Mach turbulent

$$\mathrm{M}_t \equiv \frac{\sqrt{\Phi}}{\sqrt{3\Phi + c^2}} \quad . \tag{4.16}$$

Par sa définition, ce nombre de Mach turbulent ne peut pas dépasser la valeur $1/\sqrt{3}$.

4.1.1 Solveur non-conservatif

Les méthodes de décomposition de flux, qui sont généralement utilisées pour le traitement des termes convectifs en compressible, ont été inventées pour des systèmes d'équations conservatives, par exemple les équations de la dynamique des gaz [51]. Récemment, Hérard [52] a montré pour une fermeture à deux équations (k–ε) d'un fluide compressible qu'il est possible de construire un solveur basé sur ces mêmes principes en tenant compte des termes non-conservatifs. En effet, il montre que si tous les termes non-conservatifs ne sont pas intégrés dans le solveur convectif, la positivité de la pression thermodynamique n'est pas assurée. Il semble possible d'adapter cette méthode pour traiter les équtions $\widetilde{u_i''u_j''}$ de notre étude. On va maintenant exposer les points principaux de la construction du schéma de Hérard.

On part du système convectif (4.7) que l'on intégre sur les cellules C_i, soit:

$$\int_{C_i} \left(\partial_t \vec{Q} + \nabla \vec{F}_c + \overline{\overline{P}} \nabla \vec{Q}\right) \mathrm{d}v = 0 \quad . \qquad (4.17)$$

- La dérivation temporelle est approchée par un schéma d'Euler explicite:

  $$\partial_t \vec{Q} \approx \left(\vec{Q}^{n+1} - \vec{Q}^{n}\right) \Delta t \quad .$$

- L'intégration des flux convectifs est exprimée par une fonction de flux basée sur le concept de décomposition des différences de flux (voir annexe D),

  $$\int_{C_i} \nabla \vec{F}_c \mathrm{d}v = \oint_{\Gamma_i} \vec{F}_c \vec{n} \mathrm{d}\sigma \approx \sum_{j=1}^{Nv} \phi_{ij}^{n} \, \delta\vec{\Gamma}_{C_{ij}} \vec{n} \quad ,$$

  avec la fonction ϕ_{ij} écrite sous la forme:

  $$\phi_{ij}^{n} \equiv \frac{1}{2} \left[\vec{F}\left(\vec{Q}_i\right) + \vec{F}\left(\vec{Q}_j\right) - \left|\overline{\overline{A}}\left(\hat{Q}\right)\right| \left(\vec{Q}_j - \vec{Q}_i\right)\right] \quad ,$$

  où l'on estime le flux à travers une partie de la surface de la cellule $\delta\vec{\Gamma}_{C_{ij}}$ avec les états $\vec{Q}_i$ et $\vec{Q}_j$. Ils sont définis comme étant les états des deux extrémités de la seule arête de l'élément fini associé qui coupe $\delta\vec{\Gamma}_{C_{ij}}$ (voir figure 4.3).

  Dans la méthode originale de Roe [51], la matrice $\overline{\overline{A}}\left(\hat{Q}\right)$ est choisie de telle façon que les conditions de saut pour un choc entre les deux

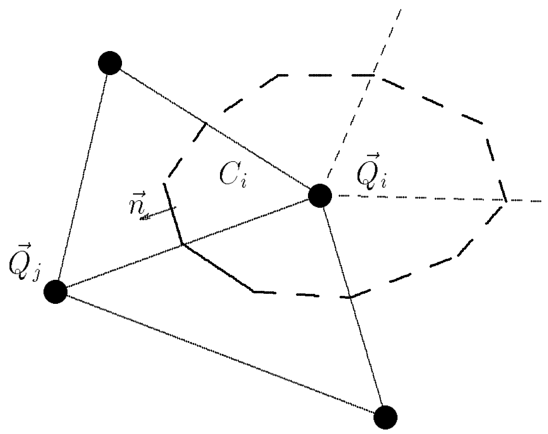


Figure 4.3: Schéma de l'interface de cellule

états soient respectées. Dans le cadre du solveur non-conservatif, on ne connaît pas toutes les conditions de saut. Hérard pose donc

$$\overline{\overline{A}}\left(\hat{Q}\right)\left[\vec{Q}\right] = \left[\vec{F}\right] + \hat{P}\left[\vec{Q}\right] \quad , \tag{4.18}$$

où $\hat{P}$ est une moyenne arithmétique de la matrice $\overline{\overline{P}}$ qui correspond au chemin linéaire entre les deux états. La relation (4.18) définit l'état $\hat{Q}$.

- Pour l'intégration des termes non-conservatifs, la matrice $\overline{\overline{P}}$ est approchée par une matrice "gélée" sur la cellule C_i à l'instant n:

$$\int_{C_i} \overline{\overline{P}}\,\nabla\vec{Q}\mathrm{d}v \approx \overline{\overline{P}}_i^n \int_{C_i} \nabla\vec{Q}\mathrm{d}v \quad .$$

Ce type de solveur pour les équations de $\widetilde{u_i''u_j''}$ est en cours de réalisation en collaboration avec EDF. Il fait l'objet d'un rapport [53]. Quelques points peuvent déja être évoqués.

Un problème fondamental est la sensibilité du solveur aux modélisations des termes du second membre. En effet, la réalisabilité est une condition nécessaire pour l'existence d'un système hyperbolique, un calcul s'arrétera à l'instant, où l'une des composantes deviendra non-réalisable. Les modèles de pression-déformation peuvent notamment provoquer de telles situations (voir chapitre 3.1). De plus, un système entièrement réalisable dans sa formulation différentielle peut très bien perdre cette propriété aprés la discrétisation.

Par toute la suite, on se contente d'un solveur convectif qui représente un système réduit, conservatif.

4.1.2 Solveur du système réduit

Pour éviter les problèmes rencontrés avec la forme non-conservative, on se libère de la matrice $\overline{\overline{P}}$ en mettant les flux $\vec{H}$ au second membre dans le système (4.7). On remarque que le système ainsi obtenu est du type mixte elliptique-hyperbolique. Pour le rendre hyperbolique, il faut également supprimer l'influence des tensions turbulentes dans les équations de quantité de mouvement et d'énergie. Par ce regroupement, on obtient des expressions qui sont assez proches du système des équations d'Euler,

$$\partial_t \vec{Q} + \nabla \vec{F}_c = 0 \quad ,$$

$$\vec{F}_c = \begin{bmatrix} \overline{\rho}\vec{v} \\ \vec{v}\overline{\rho}\vec{v} + \overline{p}\overline{\overline{I}} \\ \vec{v}\left(\overline{\rho}\widetilde{e}_T + \overline{p}\right) \\ \vec{v}\,\overline{\overline{\tau}} \end{bmatrix} \quad . \tag{4.19}$$

On constate que, dans ce système réduit, le couplage des équations des moments turbulents vers le champ moyen ne s'effectue que par l'intermédiaire de la pression thermodynamique, définie par:

$$\overline{p} = (\gamma - 1)\left[\overline{\rho}\widetilde{e}_T - \frac{1}{2\overline{\rho}}\left(\overline{\rho}\widetilde{u_i}\right)^2 - \frac{1}{2}\overline{\rho}\widetilde{u_i''u_i''}\right] \quad . \tag{4.20}$$

Donc, en choisissant un système équivalent avec les variables:

$$\vec{Q} = \left[\overline{\rho}, \overline{\rho}\vec{v}, \overline{\rho}\widetilde{e}_T, \overline{\rho}k, \overline{\rho}\widetilde{u''u''}, \overline{\rho}\widetilde{v''v''}, \overline{\rho}\widetilde{u''v''}\right]^T \quad , \tag{4.21}$$

on peut découpler les équations pour les tensions turbulentes, sauf pour $\overline{\rho}k$. L'énergie cinétique turbulente sert dans ce système à reconstruire la troisième composante diagonale $\widetilde{w''w''}$. Le système équivalent s'écrit alors

$$\partial_t \vec{Q}^1 + \nabla \vec{F}_c^1 = 0 \tag{4.22}$$

$$\partial_t Q^2 + \nabla F_c^2 = 0 \tag{4.23}$$

$$\vdots$$

$$\partial_t Q^5 + \nabla F_c^5 = 0 \quad , \tag{4.24}$$

avec

$$\vec{Q}^1 = \left[\overline{\rho}, \overline{\rho}\vec{v}, \overline{\rho}\widetilde{e}_T, \overline{\rho}k\right]^T$$

$$Q^2 = \overline{\rho}\widetilde{u''u''}, \quad Q^3 = \overline{\rho}\widetilde{v''v''}, \quad Q^4 = \overline{\rho}\widetilde{u''v''}, \quad Q^5 = \overline{\rho}\varepsilon \tag{4.25}$$

$$\vec{F}_c^1 = \begin{bmatrix} \overline{\rho}\vec{v} \\ \vec{v}\left(\overline{\rho}\vec{v} + \overline{p}\overline{\overline{I}}\right) \\ \vec{v}\left(\overline{\rho}\widetilde{e}_T + \overline{p}\right) \\ \vec{v}\overline{\rho}k \end{bmatrix}, \quad \left. F_c^k \right]_{k=2}^{5} = \vec{v}\,Q^k \quad .$$

Au niveau de la partie convective, les variables Q^k (où $k = 2 \ldots 5$) n'interviennent pas dans le système principal (4.22). Autrement dit, les tensions turbulentes et le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente sont convectés comme des scalaires passifs. Ce fait réduit la taille des matrices de passage de 8×8 à 5×5 dans le cas bi-dimensionnel (en 3D: 6×6 au lieu de 11×11).

On s'intéresse tout d'abord au système principal (4.22). La diagonalisation donne des valeurs propres égales à celles des équations d'Euler,

$$\Lambda = \mathrm{diag}\left(\vec{v}\vec{n}, \vec{v}\vec{n}, \vec{v}\vec{n} + \widetilde{c}, \vec{v}\vec{n} - \widetilde{c}, \vec{v}\vec{n}\right) \quad , \tag{4.26}$$

et les matrices de passages suivantes:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\widetilde{c}^2} & \frac{1}{\widetilde{c}^2} & 0 \\ \widetilde{u} & n_y & \frac{\widetilde{u}+n_x\,\widetilde{c}}{\widetilde{c}^2} & \frac{\widetilde{u}-n_x\,\widetilde{c}}{\widetilde{c}^2} & 0 \\ \widetilde{v} & -n_x & \frac{\widetilde{v}+n_y\,\widetilde{c}}{\widetilde{c}^2} & \frac{\widetilde{v}-n_y\,\widetilde{c}}{\widetilde{c}^2} & 0 \\ q^2+k & (\widetilde{u}n_y - \widetilde{v}n_x) & \frac{\widetilde{H}}{\widetilde{c}^2} + \frac{\vec{v}\vec{n}}{\widetilde{c}} & \frac{\widetilde{H}}{\widetilde{c}^2} - \frac{\vec{v}\vec{n}}{\widetilde{c}} & 1 \\ k & 0 & \frac{k}{\widetilde{c}^2} & \frac{k}{\widetilde{c}^2} & 1 \end{bmatrix} \quad , \tag{4.27}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - q^2\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2} & \widetilde{u}\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2} & \widetilde{v}\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2} & -\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2} & \frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2} \\ \widetilde{v}n_x - \widetilde{u}n_y & n_y & -n_x & 0 & 0 \\ \frac{q^2\Gamma}{2} - \frac{c\vec{v}\vec{n}}{2} & \frac{n_x c}{2} - \frac{\widetilde{u}\Gamma}{2} & \frac{n_y c}{2c} - \frac{\widetilde{v}\Gamma}{2} & \frac{\Gamma}{2} & \frac{-\Gamma}{2} \\ \frac{q^2\Gamma}{2} + \frac{c\vec{v}\vec{n}}{2} & \frac{-n_x c}{2} - \frac{\widetilde{u}\Gamma}{2} & \frac{-n_y c}{2c} - \frac{\widetilde{v}\Gamma}{2} & \frac{\Gamma}{2} & \frac{-\Gamma}{2} \\ -k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \tag{4.28}$$

avec pour simplifier, $\Gamma = \gamma - 1$ et $q^2 = \sum_i u_i^2/2$. Pour les résultats correspondants dans le cas d'un écoulement tridimensionnel, on pourra se reporter à l'annexe E.

Comme il est exposé dans l'annexe D, le flux convectif de Roe s'écrit:

$$\oint_{\Gamma_{C_i}} \vec{F}_c^1 \vec{n} \mathrm{d}\sigma \approx \sum_{j=1}^{Nv} \phi_{ij}\, \delta\vec{\Gamma}_{C_{ij}} \vec{n} \quad , \tag{4.29}$$

avec

$$\phi_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left[\vec{F}_c^1\left(\vec{Q}_i^1\right) + \vec{F}_c^1\left(\vec{Q}_j^1\right) - \left|J\left(\hat{Q}\right)\right|\left(\vec{Q}_j^1 - \vec{Q}_i^1\right)\right] \quad . \tag{4.30}$$

L'état moyen de Roe est défini par:

$$\hat{\varphi} \equiv \frac{\sqrt{\rho_i}\varphi_i + \sqrt{\rho_j}\varphi_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}, \qquad \varphi = \{\widetilde{u}_i, \widetilde{H}, k\} \quad , \tag{4.31}$$

avec l'enthalpie $\widetilde{H} \equiv \overline{\rho}\widetilde{e}_t + \overline{p}$. L'état moyen de la masse volumique n'est pas nécessaire pour la construction des flux; la célerité du son de l'état moyen est calculée par

$$\hat{c}^2 = (\gamma - 1)\left[\hat{H} - \frac{\hat{u}_i^2}{2} - \hat{k}\right] \quad . \tag{4.32}$$

Les flux convectifs des scalaires passifs Q^k ($k = 2 \ldots 5$) sont calculés en fonction du flux de la masse volumique. On suit une proposition de Larrouturou [54]:

$$\oint_{\Gamma_{C_i}} \vec{F}_c^k \vec{n} \mathrm{d}\sigma \approx \sum_{j=1}^{Nv} \phi_{ij_\rho} \overline{\left[\frac{\overline{\rho}Q^k}{\overline{\rho}}\right]} \delta\vec{\Gamma}_{C_{ij}}\vec{n}, \quad k = 2 \ldots 5 \quad , \tag{4.33}$$

où les scalaires sont décentrés par le signe du flux de la masse volumique,

$$\overline{\left[\frac{\overline{\rho}Q^k}{\overline{\rho}}\right]} = \begin{cases} \left.\frac{\overline{\rho}Q^k}{\overline{\rho}}\right]_j & \text{si} \quad \phi_{ij_\rho} > 0 \\ \\ \left.\frac{\overline{\rho}Q^k}{\overline{\rho}}\right]_i & \text{si} \quad \phi_{ij_\rho} \leq 0 \end{cases} \quad . \tag{4.34}$$

La formulation (4.33) et (4.34) est conservative par rapport à la masse pour un scalaire constant entre les deux états. Larrouturou montre que cette méthode est mieux adaptée pour preserver la positivité des scalaires (et dans le cas des fractions massiques, également l'inférieurité à 1) qu'une formulation décentrée simple. Il est intéressant de noter que Larouturou trouve un limite pour le pas temporelle, qui est divisé par deux dans le cas d'une extension à l'ordre deux en espace par rapport au schéma de base.

4.1.3 Extension à l'ordre supérieur

Jusqu'ici, la façon de construire un schéma adapté pour le traitement du système hyperbolique a été discutée. Pour cela, on a considéré trois points de discrétisation (en monodimensionnel), ce qui constitue une erreur de troncature $\mathcal{O}(\Delta x)$, donc une méthode trés dissipative. Pour augmenter la précision spatiale, on se sert de la méthode MUSCL de van Leer [55], qui est basée sur une interpolation à l'aide des polynômes de Legendre. L'idée consiste à remplacer dans les formules de flux précédentes (4.30) les états $\vec{Q}_i$, $\vec{Q}_j$ par des états $\vec{Q}_{ij}$ et $\vec{Q}_{ji}$ interpolés sur le bord de la cellule ($\vec{Q}_i \to \vec{Q}_{ij}, \vec{Q}_j \to \vec{Q}_{ji}$). La formulation pour cette interpolation sur notre maillage non-structuré s'écrit d'aprés l'étude de Steve [56]:

$$\begin{aligned} \vec{Q}_{ij} &= \vec{Q}_i + \frac{1}{2}\Psi\left(2\nabla\vec{Q}_i\vec{n}_{ij} - \left(\vec{Q}_j - \vec{Q}_i\right), \vec{Q}_j - \vec{Q}_i\right) \\ \vec{Q}_{ji} &= \vec{Q}_j - \frac{1}{2}\Psi\left(2\nabla\vec{Q}_j\vec{n}_{ij} - \left(\vec{Q}_j - \vec{Q}_i\right), \vec{Q}_j - \vec{Q}_i\right) \quad , \end{aligned} \tag{4.35}$$

avec les gradients sur les cellules, évalués par une approche éléments finis:

$$\nabla \vec{Q}_i = \frac{1}{V_{C_i}} \sum_{T \in C_i} \frac{V_T}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} \vec{Q}_{Tk} \nabla \mathrm{N}_{Tk} \quad , \qquad (4.36)$$

V_{C_i} étant le volume de la cellule C_i, V_T le volume de l'élément T, N_s le nombre de sommets d'un élément. Il s'agit d'une interpolation semi-décentrée avec une fonction Ψ s'écrivant d'après Roe ("minmod"),

$$\Psi(a, b) = \frac{1}{2} \max(|a|, |b|) [\mathrm{sign}(a) + \mathrm{sign}(b)] \quad , \qquad (4.37)$$

ce qui sert à limiter la pente de l'interpolation afin d'éviter la création d'extrémas entre les noeuds i et j. Autrement dit, la fonction Ψ – dit "limiteur" – assure une transition graduelle entre les schémas d'ordre deux (régions régulieres) et d'ordre un (en voisinage des gradients forts). Dans le cadre de cette étude, l'interpolation est effectuée sur les variables conservatives $\vec{Q}$. On remarque que d'autres choix sont possibles, par exemple des variables "physiques" ou les variables caractéristiques.

4.2 La partie visqueuse

Le traitement des termes visqueux et des termes sources est beaucoup moins complexe que la construction du solveur convectif. En effet, on suit de manière assez schématique la méthode d'éléments finis appliqué aux nouvelles équations pour $\overline{\rho}\widetilde{u_i''u_j''}$. On discrétise donc les flux visqueux $\vec{R}$ et les termes sources $\vec{S}$ d'une façon analogue à la discrétisation du système correspondant du code de base NATURng [57, 4].

4.2.1 Les flux visqueux

Les flux visqueux issus du système réduit (4.22) à (4.25) s'écrivent

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{\mu}\widetilde{S_{ij}} - \overline{\overline{\tau}} \\ \vec{v}\left(\overline{\mu}\widetilde{S_{ij}} - \overline{\overline{\tau}}\right) + \left(\frac{\overline{\mu}}{\mathrm{Pr}} + \frac{\overline{\mu}_t}{\mathrm{Pr}_t}\right)\gamma \widetilde{T}_{,j} + \left(\overline{\mu} + \frac{\overline{\mu}_t}{\sigma_{ij}}\right) k_{,j} \\ \left(\overline{\mu} + \frac{\overline{\mu}_t}{\sigma_{ij}}\right) k_{,j} \\ \left(\overline{\mu} + \frac{\overline{\mu}_t}{\sigma_{ij}}\right) \widetilde{u_i''u_j''}_{,k} \\ \left(\overline{\mu} + \frac{\overline{\mu}_t}{\sigma_\varepsilon}\right) \varepsilon_{,j} \end{bmatrix} \quad . \qquad (4.38)$$

L'intégrale de ces flux (4.3) est discrétisé de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathcal{D}} \vec{R}\,\nabla\,\phi_i \mathrm{d}v &\approx -\sum_{T\in C_i} \int_T \vec{R}\,\nabla\,\mathrm{N}_{T_i} \mathrm{d}v \\
&= -\sum_{T\in C_i} \left\{ \partial_x \mathrm{N}_{T_i} \int_T R_x \mathrm{d}v + \partial_y \mathrm{N}_{T_i} \int_T R_y \mathrm{d}v \right. \\
&= \left. +\partial_z \mathrm{N}_{T_i} \int_T R_z \mathrm{d}v \right\} , \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

où $\nabla \mathrm{N}_{T_i}$ est le gradient de la fonction test de l'élément T evalué au sommet i.

Dans le cadre de l'approche élément fini, la valeur d'une variable Φ sur l'élément est exprimée par

$$\Phi = \sum_{k=1}^{Ns} [\,\Phi \cdot N\,]_k \quad , \qquad (4.40)$$

et les gradients par

$$\partial_{x_i}\Phi = \sum_{k=1}^{Ns} [\,\Phi \cdot \partial_{x_i} N\,]_k \quad . \qquad (4.41)$$

La viscosité laminaire $\overline{\mu}$ la viscosité turbulente $\overline{\mu}_t$ et l'échelle diffusive $\frac{k}{\varepsilon}$ sont approchées par leur moyenne sur l'élément, par exemple:

$$\frac{k}{\varepsilon} \to \frac{\sum_{k=1}^{Ns} [k]_k / Ns}{\sum_{k=1}^{Ns} [\varepsilon]_k / Ns} \equiv \frac{\hat{k}}{\hat{\varepsilon}} \quad , \qquad (4.42)$$

et sont donc constantes quand un intégre sur un élément. Pour cette intégration, la formule suivante est utile:

$$\int_{T_j} N_i^{\alpha_i} N_j^{\alpha_j} \cdots N_k^{\alpha_k} \,\mathrm{d}v = \frac{\alpha_i!\alpha_j! \cdots \alpha_k!}{(\alpha_i + \alpha_j + \cdots + \alpha_k + N)!} N!\, V_{T_j} \quad , \qquad (4.43)$$

où N désigne la dimension spatiale (en utilisant des triangles en 2D et des tétraèdres en 3D, il vient $Ns = N + 1$).

Etant donné la forme des termes visqueux supplémentaires, ils ne différent donc pas des termes rencontrés dans un modèle à deux équations. Par exemple, on considère le flux visqueux de l'équation $\overline{\rho}\widetilde{u''_i u''_j}$. Avec $\vec{R}_{ij} = \left(\overline{\mu} + \frac{\overline{\mu}_t}{\sigma_{ij}}\right) \overline{\rho}\widetilde{u''_i u''_j}_{,k}$, il vient:

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathcal{D}} \vec{R}_{ij}\,\nabla\,\phi_i \mathrm{d}v \approx\ & -\sum_{T\in C_i} \left[\left(\hat{\mu} + \frac{\hat{\mu}_t}{\sigma_{ij}}\right) \left\{ \partial_x \mathrm{N}_{T_i} \sum_{k=1}^{Ns} \left(\frac{\overline{\rho}\widetilde{u''_i u''_j}}{\overline{\rho}} \partial_x \mathrm{N}_T \right)_k \right.\right. \\
& +\partial_y \mathrm{N}_{T_i} \sum_{k=1}^{Ns} \left(\frac{\overline{\rho}\widetilde{u''_i u''_j}}{\overline{\rho}} \partial_y \mathrm{N}_T \right)_k \\
& \left.\left. + \,\partial_z \mathrm{N}_{T_i} \sum_{k=1}^{Ns} \left(\frac{\overline{\rho}\widetilde{u''_i u''_j}}{\overline{\rho}} \partial_z \mathrm{N}_T \right)_k + \right\} V_T \right] \quad . \qquad (4.44)
\end{aligned}$$

4.2.2 Les termes sources

Pour la discrétisation des termes sources, on applique la méthode de "mass–lumping", c'est-à-dire qu'on ramène la masse sur le noeud i,

$$\int_{\mathcal{D}} \vec{S}\,\phi_i \mathrm{d}v \approx \sum_{T\in C_i} \hat{S}_T \frac{V_T}{Ns} \quad . \tag{4.45}$$

Ceci revient à une formulation volumes finis pour le terme source tout en calculant les gradients par l'approche élément fini.

Le chapeau sur le vecteur S indique que les composantes sont évaluées par un moyenne sur l'élément T.

4.3 Réalisabilité numérique

En plus des incertitudes discutées dans le paragraphe 3.5, un modèle réalisable dans sa forme différentielle peut admettre des solutions non-réalisables dans sa représentation discrète. Dans ce cas, il ne s'agit plus forcément d'un problème issu des modèles pour les expressions inconnues, mais de la méthode numérique d'estimation des flux et des gradients. Dans un code de calcul, il est alors difficile de distinguer la cause des valeurs non-réalisables qui apparaissent éventuellement. Il semble donc nécessaire – quelleque soit la forme des modèles différentiels utilisés – d'adopter une procèdure de "clipping", en quelque sorte.

Deardorff [58] a remarqué ce phénomène de non-réalisabilité des solutions numériques locales. Il les explique par l'erreur de troncature du schéma spatial, qui – dans le cas d'un schéma centré à l'ordre deux par exemple – tend à produire des valeurs extrèmes près des forts gradients. Deardorff utilisait déjà une procédure pour imposer des valeurs réalisables de manière forte, ce qui lui a permis d'effectuer des calculs malgré l'apparition de valeurs non-réalisables dans une phase transitoire.

Dans cette étude, on impose la *réalisabilité faible* à chaque pas temporelle après actualisation des valeurs. Si l'une des grandeurs $\widetilde{u''u''}$, $\widetilde{v''v''}$ ou k est négative on remplace localement sa valeur sur un noeud par la moyenne sur les noeuds voisins. Si l'inégalité de Schwarz n'est pas verifiée par une composante tangentielle, on remplace celle-ci par la valeur donnée par l'égalité:

$$\widetilde{u''_\alpha u''_\beta} = \mathrm{sign}\left(\widetilde{u''_\alpha u''_\beta}\right)\sqrt{\widetilde{u''_\alpha u''_\alpha}\cdot\widetilde{u''_\beta u''_\beta}} \quad \text{si} \quad \widetilde{u''_\alpha u''_\beta}^{\,2} > \widetilde{u''_\alpha u''_\alpha}\cdot\widetilde{u''_\beta u''_\beta} \quad , \tag{4.46}$$

où l'on conserve le signe original.

4.4 Conditions aux limites

Dans les calculs des écoulements autour des obstacles, internes ou externes, on rencontre principalement deux types de conditions aux limites: des frontières libres ou des parois solides. Dans les paragraphes suivants, on expose la méthode de traitement de ces cas dans le cadre d'un solveur incluant le transport des tensions de Reynolds. On remarque qu'un troisième type de frontière est constitué par une periodicité au bord du domaine de calcul. Ce phénomène ne peut pas être pris en compte à l'heure actuelle par le code NATURng.

4.4.1 Parois solides

Dans un écoulement turbulent, les parois solides posent un problème particulier. A cause de la supression des fluctuations de vitesse par la présence de la paroi, le comportement des corrélations inconnues change considérablement. Les modélisations faites pour un nombre de Reynolds élevé perdent leur validité à proximité d'une paroi. Pour éviter l'introduction de corrections empiriques dans les équations, on prefère utiliser l'approche d'une loi de paroi. Celle-ci consiste à connecter la paroi et la zone logarithmique d'une couche limite turbulente par des lois algébriques, dites "lois universelles". Le deuxième avantage de cet approche est l'économise du temps de calcul et de la mémoire, puisque les forts gradients des tensions, de la dissipation et de la vitesse, qui se situent notamment dans la sous-couche visqueuse, ne doivent pas être résolus géométriquement.

Cependant, il existe des contraintes assez réstrictives imposées par la déduction des lois de paroi pour le cas d'une couche limite sans gradient de pression, ni courbure de courant.

La méthode numérique des lois de paroi pour un modèle à deux équations a été detaillée dans le rapport précédent [4]. Ici on rappelle briévement les résultats principaux, avant d'exposer le traitement des conditions imposées sur les tensions turbulentes.

On considère par la suite la situation pariétale, illustrée par la figure 4.4 où le premier point du maillage est à une distance d de la paroi physique. Si ce point se trouve dans la sous-couche visqueuse, on connaît directement la tension tangentielle par la relation linéaire:

$$u_\tau^2 = \frac{\vec{v}\vec{t}\nu}{d}, \qquad y^+ < 10 \quad , \tag{4.47}$$

où u_τ désigne la vitesse de frottement $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\overline{\rho}}$ et y^+ représente un nombre de Reynolds local $y^+ = u_\tau\, d/\nu$, $\vec{t}$ étant le vecteur tangentiel à la paroi.

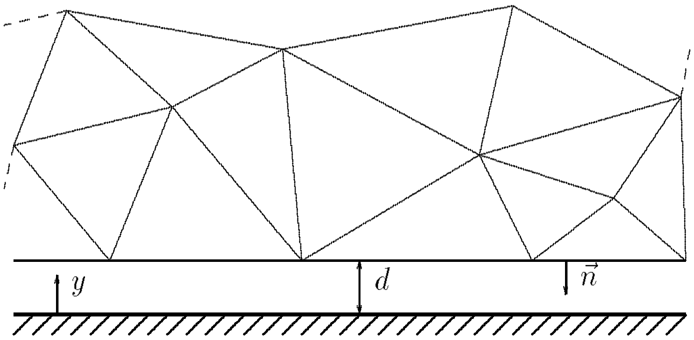


Figure 4.4: Position du maillage par rapport à la paroi

Dans la zone logarithmique, la loi de vitesse utilisée est celle de van Driest (cf. [59]), qui s'écrit

$$\frac{u_c}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa}\ln\left(y^+\right) + B\,, \quad \kappa = 0.41\,, \quad B = 5.2 \quad . \tag{4.48}$$

La vitesse équivalente compressible, u_c, qui tient compte de la variation de la masse volumique entre la paroi et notre point dans la zone logarithmique, est calculée dans le cas d'une paroi adiabatique par

$$u_c = \sqrt{\frac{2c_p\widetilde{T}}{\mathrm{Pr}_T} + \left(\vec{v}\vec{t}\right)^2}\, \arcsin\left(\frac{\vec{v}\vec{t}}{\sqrt{2c_p\widetilde{T}/\mathrm{Pr}_T + \left(\vec{v}\vec{t}\right)^2}}\right) \quad , \tag{4.49}$$

et pour une paroi isotherme on obtient la forme suivante:

$$\begin{aligned} u_c &= E\left[\arcsin\left(\frac{q_w/\tau_w + \vec{v}\vec{t}}{\sqrt{q_w^2/\tau_w^2 + E^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{q_w/\tau_w}{\sqrt{q_w^2/\tau_w^2 + E^2}}\right)\right] \\ E &= \sqrt{\frac{2c_p\widetilde{T}_w}{\mathrm{Pr}_T}} \\ \frac{q_w}{\tau_w} &= \left(\widetilde{T}_w - \widetilde{T}\right) \quad . \end{aligned} \tag{4.50}$$

L'équation (4.48) se résout de manière itérative par une méthode de Newton. A partir de la vitesse de frottement ainsi obtenue, on peut déduire le flux imposé sur l'équation de quantité de mouvement. Pour les expressions détaillées, on pourra se reporter à la reférence [4].

Dans la zone logarithmique pariétale, un équilibre entre la production et la dissipation de la turbulence et observé expérimentalement et dans des simulations directes [60, 61]. Avec cette hypothèse, on déduit

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}\,\frac{\widetilde{T}}{\widetilde{T}_w} \tag{4.51}$$

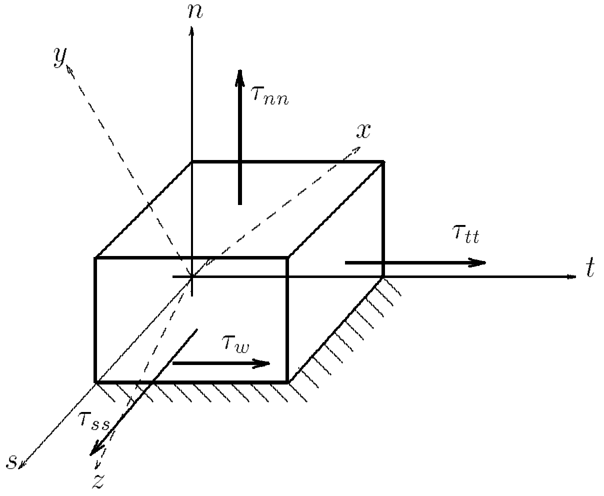


Figure 4.5: Tensions à la paroi dans le repère local

$$\varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y}\left(\frac{\widetilde{T}}{\widetilde{T}_w}\right)^{3/2} \quad . \tag{4.52}$$

On cherche également des conditions pour les composantes des tensions turbulentes. On se place dans un repère local, dont l'axe t est aligné avec l'écoulement. Les axes t et s sont tangentiels à la paroi et n est dans la direction de la normale (voir la figure 4.5). La tension τ_{nt} est directement donnée par l'hypothèse d'une contrainte constante et égale à la tension visqueuse à la paroi

$$\tau_{nt} = \tau_w = u_\tau^2 \overline{\rho} \quad . \tag{4.53}$$

Les contraints τ_{ns} et τ_{ts} sont nulles d'après les conditions de la loi de paroi. Il reste à déterminer la valeur des tensions normales. Pour cela, il existe deux possibilités. La première consiste de faire dégénérer des équations modélisées en des équations algébriques à l'aide d'hypothèses pour la zone logarithmique précédemment définies. Ceci est souvent utilisé dans la littérature [62, 63, 14]. Cette demarche reste cohérente avec les prédictions de notre modèle de pression-déformation obtenues à l'intérieur du domaine. En revanche, on n'introduit pas d'informations supplémentaires sur l'anisotropie à la paroi. C'est pour cela que l'on préfère dans cette étude suivre une approche légèrement différente. Elle consiste à imposer des anisotropies mesurées pour des couches limites génériques. Les valeurs de Klebanoff et Lauffer (cf. [14]) sont

$$\begin{aligned} \tau_{nn} &= \frac{37}{150}\overline{\rho}k \\ \tau_{tt} &= \frac{353}{300}\overline{\rho}k \end{aligned}$$

$$\tau_{ss} \;=\; 2\overline{\rho}k \;-\; (\tau_{nn} + \tau_{tt}) \;=\; \overline{\rho}k\frac{173}{300} \quad . \tag{4.54}$$

Après avoir déterminé toutes composantes du tenseur local des tensions turbulentes, on retransforme celui-ci dans le repère global cartésien $[x, y, z]$. Pour un écoulement bi-dimensionnel, il vient:

$$\begin{aligned}
\widetilde{u''u''} &= \left(n_x^2\frac{37}{150} - n_x n_y 2\sqrt{C_\mu} + n_y^2\frac{353}{300}\right) k \\
\widetilde{v''v''} &= \left(n_x^2\frac{353}{300} + n_x n_y 2\sqrt{C_\mu} + n_y^2\frac{37}{150}\right) k \\
\widetilde{u''v''} &= \left(n_x^2\sqrt{C_\mu} - n_x n_y\frac{93}{100} - n_y^2\sqrt{C_\mu}\right) k \quad .
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Le résultat correspondant au cas tridimensionnel est détaillé dans l'annexe F. Les relations (4.51), (4.52) et (4.55) constituent des conditions de Dirichlet.

4.4.2 Frontières libres

Les frontières libres sont caractérisées par le fait qu'elles separent deux sous-espaces du milieu continu. Par conséquent, on est obligé de respecter le mécanisme de propagation des informations à cette interface pour éviter la création, l'amplification ou la réflection des perturbations numériques. La méthode utilisée est celle des relations de compatibilité basées sur la théorie non-visqueuse. On estime la vitesse des ondes du système convectif normal à la frontiére. Celles qui rentrent portent des informations venant de l'extérieur du domaine. On les remplace par des valeurs physiques à imposer. Les ondes qui sortent ou celles qui suivent la frontière avec une vitesse rélative nulle représentent l'information sur la solution à l'intérieur du domaine. Pour les équations associées, il faut trouver des conditions numériques.

Suivant l'étude de Cambier et al. [64], on projète la partie non-visqueuse du système des équations sur les vecteurs propres à gauche $\vec{\omega}_i$,

$$\vec{\omega}_i \left[\partial_t\vec{Q} \;+ \nabla\,\vec{F}_c\right] \;=\; 0 \quad . \tag{4.56}$$

En considérant le problème stationnaire à la frontière, on discrétise le produit de manière linéaire:

$$\vec{\omega}_i^n \left[\vec{Q}^{n+1} \;-\; \vec{Q}^n\right] \;=\; 0 \quad . \tag{4.57}$$

L'équation (4.57) donne la nouvelle valeur du champ à la frontière à l'étape (n+1) en fonction des valeurs numériques à l'étape précédente (n).

Dans le tableau 4.1, on montre les configurations à la frontière libre. En pratique, on se place dans un repère local, avec l'axe 1 normal à la frontière. On obtient les vecteurs propres à gauche en prenant les lignes de la matrice de passage R^{-1} et en prenant pour vecteur normale $\vec{n} = [1, 0, 0]$.

Mach normale	situation	conditions physiques	conditions numériques
$-1 < \frac{\lvert\vec{v}\vec{n}\rvert}{\widetilde{c}} < 0$	entrée subsonique	toutes sauf $(\vec{v}\vec{n} - \widetilde{c})$	$(\vec{v}\vec{n} - \widetilde{c})$
$0 < \frac{\lvert\vec{v}\vec{n}\rvert}{\widetilde{c}} < 1$	sortie subsonique	$(\vec{v}\vec{n} - \widetilde{c})$	toutes sauf $(\vec{v}\vec{n} - \widetilde{c})$
$\frac{\lvert\vec{v}\vec{n}\rvert}{\widetilde{c}} = 0$	frontière glissante	$(\vec{v}\vec{n} - \widetilde{c})$	toutes sauf $(\vec{v}\vec{n} - \widetilde{c})$
$\frac{\lvert\vec{v}\vec{n}\rvert}{\widetilde{c}} < -1$	entrée supersonique	toutes	/
$1 < \frac{\lvert\vec{v}\vec{n}\rvert}{\widetilde{c}}$	sortie supersonique	/	toutes

Tableau 4.1: Configurations à la frontière

- **Entrée subsonique**
  La seule condition numérique porte sur la pression

$$\overline{p} \;=\; \overline{p}^{n} + (\widetilde{c\overline{\rho}})^{n} \left(\vec{n}\vec{v}^{n} - \vec{n}\vec{v}^{n+1}\right) \;.$$

- **Sortie subsonique**
  En imposant la pression de l'extérieur, on détermine les autres grandeurs avec:

$$\left(\vec{n}\vec{v}^{n+1}\right) = (\vec{n}\vec{v}^{n}) + \frac{1}{(\widetilde{c\overline{\rho}})^{n}} \left(\overline{p}^{n} - \overline{p}^{n+1}\right)$$

$$\overline{\rho}^{n+1} = \overline{\rho}^{n} + \frac{1}{(\widetilde{c}^{n})^{2}} \left(\overline{p}^{n} - \overline{p}^{n+1}\right)$$

$$\vec{t}\vec{v}^{n+1} = \vec{t}\vec{v}^{n+1},\ \varepsilon^{n+1} = \varepsilon^{n},\ k^{n+1} = k^{n},\ \widetilde{u''u''}^{n+1} = \widetilde{u''u''}^{n},\ \widetilde{v''v''}^{n+1} = \widetilde{v''v''}^{n},$$

$$\widetilde{u''v''}^{n+1} = \widetilde{u''v''}^{n},\ \widetilde{u''w''}^{n+1} = \widetilde{u''w''}^{n},\ \widetilde{w''v''}^{n+1} = \widetilde{v''w''}^{n}\;.$$

- **Entrée supersonique**
  On impose toutes les variables à partir de conditions extérieurs au domaine.

- **Sortie supersonique**
  La résolution du système (4.57) pour ce cas montre que les solutions numériques à l'intérieur ne sont pas modifiées, donc $\Phi^{n+1} = \Phi^{n}$ pour toutes les variables.

- **Glissement**
  La condition physique à imposer est que la vitesse normale est nulle. On obtient donc pour les autres variables:

$$\overline{p}^{n+1} = \overline{p}^{n} + (\widetilde{c}\overline{\rho})^{n} \left(\vec{n}\vec{v}^{n+1} - \vec{n}\vec{v}^{n}\right)$$

$$\overline{\rho}^{n+1} = \overline{\rho}^{n} \frac{1 + \vec{n}\vec{v}^{n+1} - \vec{n}\vec{v}^{n}}{\widetilde{c}^{n}}$$

$$\vec{t}\vec{v}^{n+1} = \vec{t}\vec{v}^{n+1},\ \varepsilon^{n+1} = \varepsilon^{n},\ k^{n+1} = k^{n},\ \widetilde{u''u''}^{n+1} = \widetilde{u''u''}^{n},$$
$$\widetilde{v''v''}^{n+1} = \widetilde{v''v''}^{n},\ \widetilde{u''v''}^{n+1} = \widetilde{u''v''}^{n},\ \widetilde{u''w''}^{n+1} = \widetilde{u''w''}^{n},$$
$$\widetilde{w''v''}^{n+1} = \widetilde{v''w''}^{n}\ .$$

Après avoir déterminé les valeurs des variables sur les bords du domaine, on peut encore les imposer de manière forte ou faible, c'est-à-dire par des conditions de flux ou de Dirichlet. On ne sait pas à priori quelle est la meilleure méthode. Par les calculs on constate que d'imposer des conditions de flux permet de converger plus facilement. Par contre, on peut se retrouver avec des niveaux de variables à la frontière pas exactement égaux à ceux calculés par les relations de compatibilité. On choisit donc d'utiliser des conditions de flux partout, sauf à l'entrée, ou l'on impose les valeurs de toutes variables en conditions de Dirichlet et une condition de flux pour l'équation d'énergie totale.

Il faut noter que pour une frontière de glissement où on applique la condition $\vec{v}\vec{n} = 0$, les flux convectifs se reduisent à:

$$\vec{n}\vec{F}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{p}\,\vec{n} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.58}$$

Ceci revient à une contre-pression qui maintient l'écoulement aligné avec la frontière.

Chapitre 5

Résultats

Dans ce chapitre, on présente les résultats de certains calculs de validation effectués avec le solveur de transport des tensions en configuration de base. Il s'agit surtout de vérifier que l'implementation des équations supplémentaires est correcte. Il est souhaitable de pouvoir tester les différents termes dans les équations individuellement en excluant l'interaction avec les autres termes. Dans ce but, on se sert de cas tests du type "numérique", qui ne représentent pas forcément une situation physique.

Une foi que l'on a validé la discrétisation du modèle, on passe à un deuxième niveau de calcul, constitué de cas dits " academiques". Ceux-ci représentent un problème physique, souvent étudié expérimentalement. Le but n'est pas de retrouver à tout prix ces mesures, car il faut être conscient des erreurs d'acquisition et de traitement des donnés, mais on cherche à reproduire des tendances qualitatives.

Finalement, il reste les "cas industriels", représentant l'application du code aux problèmes pour lesquels il a été conçu. Ces calculs sont caractérisés par une complexité géométrique et physique importante.

Pour la validation du code, on ne s'intéresse qu'aux deux premiers niveaux de calcul.

Des références supplémentaires pour les calculs qui suivent sont fournies par des calculs effectués avec la version à deux équations du solveur NATURng [4], qui fonctionne avec une relation constitutive de Boussinesq ainsi qu'une relation non-linéaire de Shih et al. [3] (SZL). En plus de la validation, ces résultats sont utilisé afin de pouvoir juger de la performance d'un modèle de transport par rapport aux modèles algébriques pour les tensions.

cas	Re	$\widetilde{u}_c\,[m/s]$	III	$\widetilde{u}_{1,1}\,[1/s]$	$\widetilde{u}_{2,2}\,[1/s]$	$q_0^2\,[m^2/s^2]$
1	350	13.5	>0	0.8	0.29	41.67
2	450	21.5	<0	1.09	-0.29	74.1

Tableau 5.1: Valeurs caractéristiques de l'expérience [65]

5.1 Retour à l'isotropie de Le Penven et al.

Un cas test, que l'on peut considerer comme test numérique, est le retour à l'isotropie d'une turbulence non-isotrope, car le comportement des modèles utilisés pour la redistribution est connu à l'avance par référence aux tests publiés dans la littérature. L'intérêt ici est de valider le calcul des termes de pression–déformation lente. De plus, ce cas illustre la performance des trois modèles retenus.

5.1.1 Présentation du cas test

Aspects physiques

On considère l'expérience de Le Penven et al. [65], où la réorganisation de l'écoulement après une déformation irrotationelle est étudiée. Une turbulence quasi-isotrope produite par une grille subit une contraction verticale et une contraction ou une expansion horizontale avant d'entrer dans la conduite de mesure de section constante (voir figure 7.1). Selon les cas, l'invariant III de la turbulence non-isotrope est positif ($III > 0$) ou négatif ($III < 0$), tandis que le deuxième invariant II garde la même valeur. Dans la partie de mesure, l'écoulement peut être consideré comme homogène, car le gradient de la vitesse axiale produit par l'épaississement des couches limites aux parois est faible. Il existe également un gradient longitudinal des tensions turbulentes, puisqu'elles evoluent dans cette direction. Ce fait doit créer une diffusion qui reste néanmoins faible.

Dans cette expérience on utilise l'air comme fluide, la viscosité cinématique ν valant $15\times10^{-6}\ m^2/s^2$. Le nombre de Reynolds associé à la décroissance de la turbulence est défini par $Re = \left(q^2\right)^2/(9\varepsilon\nu)$. Dans le tableau 5.1, on donne certaines valeurs représentatives de l'expérience.

Aspects numériques

Un calcul du mécanisme de retour à l'isotropie correspondant à l'expérience de Le Penven et al. [65] a été effectué pour un domaine d'integration ne com-

cas	$\tilde{u}$	k	ε	$\widetilde{u''u''}$	$\widetilde{v''v''}$
1	13.5	2.084×10^{-2}	4.063×10^{-2}	8.37×10^{-3}	1.20×10^{-2}
2	21.5	3.705×10^{-2}	1.111×10^{-1}	1.10×10^{-2}	2.89×10^{-2}

Tableau 5.2: Conditions à l'entrée, retour à l'isotropie, unités S. I.

prenant que la partie à section constant de longueur de $5.13\,m$. On ne cherche pas à reproduire l'influence des parois. Le calcul est donc essentiellement monodimensionnel. Cependant, on doit utiliser un maillage bi-dimensionnel à cause de la formulation numérique du code. Aussi, on ne prend que 11 noeuds dans la direction transversale alors que l'on prend 100 noeuds dans la direction axiale. Les positions des noeuds sont légérement raffinées vers l'amont.

Pour les deux cas expérimentaux, on effectue des calculs avec chacun des trois modèles de pression–déformation retenus: le modèle de Launder *et al.* (LRR), qui se réduit ici au terme linéaire de Rotta, celui de Speziale *et al.* (SSG) et celui de Fu *et al.* (FLT).

On utilise une condition de glissement aux frontières supérieure et inférieure. A l'entrée, on impose les valeurs données dans le tableau 5.2. L'état initial des champs est uniforme.

Le critère de convergence pour obtenir un état stationnaire utilisé dans cette étude est le rapport entre la norme quadratique de l'incrément et l'ancienne valeur d'une variable Φ,

$$r_\Phi \equiv \frac{\sqrt{\sum_i^N (\delta\Phi)^2}}{\sqrt{\sum_i^N \Phi^2}} \quad . \tag{5.1}$$

Cela caractérise l'evolution du champ d'une itération à l'autre. Pour ce cas test du retour à l'isotropie, on atteint une valeur finale de $r < 10^{-5}$.

Dans les calculs, on garde le système d'équations complet; on n'introduit pas l'hypothèse d'homogénéité qui permettrait de supprimer les équations de la quantité de mouvement, de l'énergie totale et différents termes dans les équations des tensions de Reynolds. Par conséquent, il existe une influence non-nulle de la diffusion sur les tensions. Néanmoins, celle-ci étant la même quel que soit le modèle de pression-déformation, les conséquences ne peuvent être que de nature quantitative. De plus, dans l'expérience elle même, la diffusion influe de la même manière.

Une autre conséquence du fait de garder le système entier des équations est la répercussion des tensions turbulentes sur l'écoulement moyen. En pratique, ce phénomène est négligeable.

5.1.2 Résultats du calcul

Le but étant de valider l'implémentation des termes de pression-déformation lente, on montre d'abord les résultats obtenus avec les modèles SSG et LRR sur la figure 7.2 correspondant à la figure 2(b) de la référence [18]. Il s'agit du cas pour lequel l'invariant III est positif. Speziale et al. [18] ont effectué un calcul du problème homogène, c'est-à-dire qu'ils ont seulement étudié l'evolution temporelle. Les résultats sont en très bon accord.

Pour mieux illustrer la performance des différents modèles, on présente les résultats sous forme de l'invariant II en fonction de la coordonnée x (figures 7.3 et 7.4), où l'on a également inclu le résultat du calcul avec le modèle FLT pour lequel on n'a pas de résultats dans les références.

Il est visible que, dans l'expérience la décroissance de l'invariant II est accélerée pour une valeur négative de l'invariant III. En effet, pour le cas $III > 0$, la turbulence tend vers un état axisymmétrique avant de retourner à l'isotropie, ce qui ralentit le processus [65].

Les modèles ne tiennent pas compte de cette dependance dans l'évolution de l'invariant II. Les courbes des deux calculs sont presque identiques malgré le signe de l'invariant III. Seule le modèle SSG prédit une augmentation de la décroissance, qui est néanmoins trop faible par rapport à l'expérience.

En conclusion on ne voit pas apparaître erreurs pour les termes de pression-déformation lents.

5.2 Cisaillement homogène

Le calcul du retour à l'isotropie du chapitre précédent était motivé par la validation des termes de la pression–déformation lente. Pour pouvoir tester la partie rapide des modèles implementés, on choisit un cas homogène en présence d'un gradient de vitesse moyenne. Cette situation ayant déjà été réalisée expérimentalement [66, 67] ainsi que numériquement [68, 69], on peut effectuer une comparaison.

5.2.1 Présentation du cas test

Aspects physiques

Le champ de vitesse dans la cas d'un cisaillement homogène est donné par la relation

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = S \cdot \delta_{i1}\, \delta_{j2} \quad , \tag{5.2}$$

	R_t	$S\,[1/s]$	$U_c\,[m/s]$	$k\,[m^2/s^2]$	$\varepsilon\,[m^2/s^3]$	$\varepsilon/\mathcal{P}$
cas A [66]	4048	84.0	13.0	0.857	17.100	0.72
cas N [66]	4234	13.4	6.0	0.194	0.838	1.04
cas TC [70]	4828	46.8	12.4	0.383	2.857	0.57

Tableau 5.3: Parametres des réalisations du cisaillement homogène

où S est constant. A cause de l'homogénéité du champ turbulent, les termes diffusifs sont nuls et on a une croissance exponentielle des composantes de la tension. On atteint un equilibre pour lequel les anisotropies b_{ij} et le paramètre $S\frac{k}{\varepsilon}$ prennent des valeurs constantes [68].

Dans les expériences considérées (Tavoularis et Corrsin [70], Tavoularis et Karnik [66]), la vitesse linéaire est generée par un système des plaques à rugosité variable qui sont disposées parallèlement dans l'écoulement. L'agitation turbulente est produite par différents grilles à mailles quadrangulaires. Les expériences sont effectuées pour des nombres de Reynolds turbulents $R_t \equiv \sqrt{2}k^2/(\varepsilon\nu)$ élevés. Les influences visqueuses sont donc négligeables. On donne un résumé des parametres importants dans le tableau 5.3.

Aspects numériques

On peut envisager deux façons d'effectuer le calcul dans le cas homogène. La première consiste à simplifier les équations de transport par la relation (5.2) et en utilisant le fait que les gradients spatiaux des moments turbulents sont nuls. On a donc un problème d'évolution temporelle. Cette démarche est souvent prise dans la littérature pour l'analyse théorique des modèles [7, 69]. La deuxième alternative consiste à simuler l'expérience, c'est-à-dire à suivre l'écoulement cisaillé dans l'espace. Dans ce dernier cas, que l'on applique dans cette étude, les gradients spatiaux des corrélations ne sont pas négligeables. Dans les calculs effectués, on a donc annulé les termes de diffusion. Pour maintenir le gradient de vitesse moyenne constant, on impose un champ de vitesse analytique de la forme (5.2). Par conséquent, on ne résout effectivement que les équations pour les tensions et la dissipation. On a alors réduit les sources d'erreur (informatiques ainsi que numériques) au maximum.

Le problème ainsi résolu étant monodimensionnel, on se contente de situer trois noeuds dans la direction transversale. Dans la direction axiale de l'écoulement moyen, on distribue entre 200 et 250 sommets de manière uniforme selon le cas. La longueur du domaine est égalament adaptée au cas considéré. Le temps caractéristique pour l'établissement d'un équilibre du champ turbulent est défini avec le taux de cisaillement

$$t^* \equiv S \cdot t = S \cdot \frac{\Delta x}{U_c} \quad , \tag{5.3}$$

où U_c est la vitesse axiale au centre. Selon les valeurs que prennent S et U_c, on adapte le domaine Δx: le temps d'évolution doit être suffisant pour que la turbulence atteigne un état d'équilibre (en pratique: $t^* \geq 10$).

La condition de glissement est appliquée aux frontières supérieure et inférieure. A l'entrée du domaine, on impose les valeurs des tensions turbulentes donnée par l'expérience. Les champs initiaux sont uniformes.

5.2.2 Résultats du calcul

Deux aspects du cas test peuvent être examinés: la structure du tenseur des tensions à l'equilibre ($t^* \gg 1$) et son évolution spatiale ($t^* = \mathcal{O}(1)$).

Etat d'équilibre

Pour des calculs d'état d'équilibre, on a choisi deux cas de l'étude de Tavoularis et Karnik [70], qui est la plus récente de ce genre. Les auteurs [70] distinguent la situation à fort cisaillement de celle à faible cisaillement par le paramètre $\varepsilon/\mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ désigne la production d'énergie cinétique turbulente ($\mathcal{P} = -\widetilde{u''v''}\tilde{u}_{,y}$). Dans le premier cas $\varepsilon/\mathcal{P} < 1$, la croissance de l'énergie cinétique k est beaucoup plus marquée que dans le deuxième, où $\varepsilon/\mathcal{P} \approx 1$. Ici, on choisit d'étudier un cas por chaque situation. Les sigles "A" et "N" correspondent à la classification de la reférence [66].

On remarque que l'état donné par l'expérience (voir tableau 7.1 et 7.2), n'est pas forcément celui qui correspond à la valeur asymptotique, car avec les figures de la reférence [66] on ne peut pas donner de conclusions sur l'évolution des anisotropies.

Dans l'étude de Abid et Speziale [69], on trouve des valeurs asymptotiques pour les trois modèles considérés (LRR, SSG, FLT), obtenues par un calcul des équations homogèneisées correspondant à l'expérience de Tavoularis et Karnik [66]. Ces auteurs ont imposé la valeur du rapport de dissipation et de production, $\varepsilon/\mathcal{P} = 0.56$, ce qui correspond à un régime de fort cisaillement.

Les résultats de nos calculs sont donnés dans les tableaux 7.1 et 7.2 pour les réalisations "A" et "N". On constate que de façon analogue à l'expérience, la structure du tenseur, reflétée par les anisotropies b_{ij} est la même pour les deux régimes de cisaillement.

On trouve un bon accord qualitatif aussi bien que quantitatif avec les résultats des simulations effectuées dans la reférence [69] en ce qui concerne les valeurs des anisotropies. Notamment, on verifie les inégalités suivants

$$\begin{array}{c} b_{11_{SSG}} > b_{11_{FLT}} > b_{11_{LRR}} \\ |b_{22_{SSG}}| > |b_{22_{FLT}}| > |b_{22_{LRR}}| \\ |b_{12_{LRR}}| > |b_{12_{SSG}}| > |b_{12_{FLT}}| \\ |b_{33_{SSG}}| > |b_{33_{FLT}}| > |b_{33_{LRR}}| \end{array} . \tag{5.4}$$

Par rapport à l'expérience, on remarque que le modèle SSG donne apparemment la meilleure représentation de la situation homogène avec cisaillement. Le modèle LRR est le moins bon, notamment dans la prédiction de b_{11} et b_{33}. Cela vient du fait que ce modèle a été calibré par reférence à l'expérience de Champagne et al. [67], qui est probablement moins précise. Après cette comparaison, il semble que l'implémentation des termes de pression-déformation dans le code NATURng soit valable.

Evolution de l'anisotropie

Pour juger l'évolution du tenseur d'anisotropie de la tension turbulente pour de petits temps caractéristiques , on choisit l'étude de Tavoularis et Corrsin [70], car la variation des grandeurs est donnée numériquement. L'état à la section $x_1 = 2.2875\,m$ de l'expérience correspond à l'entrée de notre calcul.

Sur les figures 7.5 à 7.8 est présenté le developpement axial des anisotropies. Il est difficile d'évaluer la qualité des résultats sur la base de trois points de mesures seulement. Néanmoins, les modèles FLT et SSG semblent d'être supérieurs au modèle LRR. Pour l'anisotropie b_{33} et b_{12}, la pression-déformation modélisée par FLT est même en trés bon accord avec l'expérience. Curieusement, le modèle LRR est le seul à reproduire qualitativement le comportement du paramètre Sk/ε (voir figure 7.9), qui représente le rapport entre les temps caractéristiques des grandes échelles et du cisaillement.

5.2.3 Conclusion

Les calculs du cisaillement homogène ont permis de valider l'implémentation des termes de pression-déformation. On a effectué des tests supplémentaires (pas montrés ici) qui consistent à tourner le maillage utilisé pas un angle α. On a verifier numériquement ($\alpha = 0°$, $30°$, $50°$) que l'évolution des tensions dans le repère locale (associé aux axes du maillage) est invariant par cette rotation.

fluide	U_1	U_2	ν	$\overline{p}$	$\overline{\rho}$	Ma_1	Ma_2
air	15.0	9.0	15×10^{-6}	19.286	1.2	0.1	0.06

Tableau 5.4: Conditions de l'expérience de Bell et Mehta [71], unités S. I.

5.3 Couche de mélange de Bell et Mehta

La motivation du calcul des couches de mélange est tout d'abord l'absence de parois solides dans le domaine du calcul. Ceci permet d'analyser les capacités prédictives du solveur par rapport au phénomène de mélange turbulent libre. On peut considérer la couche de mélange comme un des cas realistes les plus simples, car il existe principalement une direction d'inhomogénéité, la direction transversale. Dans la direction axiale, une transformation de similitude permet une représentation unique des profils. De plus, ce cas est jugé important, puisqu'il fait partie des nombreux cas tests plus complexes. Par référence à la couche de mélange, on pourra être capable d'expliquer des résultats obtenus pour des cas plus complexes. Si l'on décompose les problèmes physiques en plusieurs sous problèmes (par exemple: couche limite, couche de mélange, jets, etc.), la couche de mélange est un des modules principaux.

5.3.1 Présentation du cas test

Aspects physiques

L'expérience qui sert de référence pour ce cas test est celle effectuée par Bell et Mehta [71]. Ces deux auteurs ont réalisé des mesures dans une couche de mélange (voir schéma figure 7.10) se développante à partir des couches limites laminaires ainsi que des couches limites turbulentes. Ici, on ne s'intéresse pas de l'effet de transition sur le développement de l'écoulement: on considère donc le cas de couches limites initialement turbulentes.

Le fluide dans les deux courants est de l'air à pression et masse volumique constantes. Les vitesses étant faibles (voir tableau 5.4), les effets de compressibilité sont négligeables.

Aspects numériques

Les conditions thermodynamiques ne sont pas spécifiées dans la référence [71]. Nous allons les choisir. Notre solveur étant compressible, on prend un nombre de Mach au plus 0.1 et on adapte les valeurs de la pression et de la masse volumique pour qu'elles soient proches des conditions standard (voir tableau 5.4). Cela permet une convergence raisonnable du solveur compressible (qui pour la limite de Mach tendant vers zéro ne peut pas fonctionner) sans provoquer d'effets de compressibilité qui ne sont pas présents dans l'expérience.

Le domaine de calcul couvre la distance entre $x = 0.078\,m$ et $x = 2.5\,m$, c'est-à-dire que la section d'entrée coïncide avec la première station de mesure de l'expérience. Dans la direction y on prend une largeur de $1\,m$, ce qui est suffisament important, pour appliquer des conditions de glissement sur les frontières supérieure et inférieure.

Comme mentionné ci-dessus, les valeurs d'entrée sont les mesures prises à $x = 0.078\,m$. En imposant $\overline{\rho}$ et $\overline{p}$ constant, on peut donc reconstruire toutes les grandeurs sauf la dissipation ε. Pour celle-ci, on utilise une estimation faite à partir de l'hypothèse de Boussinesq:

$$\varepsilon \;=\; \max\left\{-C_\mu\,\overline{\rho}\,k^2\frac{\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y}}{\widetilde{u''v''}}\,,\quad \varepsilon_{min}\right\}\,,\quad \varepsilon_{min} = 10^{-5}\frac{m^2}{s^3}\quad. \tag{5.5}$$

Les profils imposés à l'entrée sont donnés sur les figures 7.12 et 7.13.

Le maillage utilisé (voir figure 7.11) est constitué de 5940 noeuds. Après des calculs préliminairs sur un maillage de 3950 noeuds, on a raffiné successivement à 5940 noeuds et puis à 8340 noeuds. Le résultat d'un calcul effectué avec le modèle LRR sur le maillage fin de 8340 noeuds ne différait pas visiblement de celui sur le maillage moyen de 5940 noeuds. On considère donc ces résultats comme indépendants du maillage.

5.3.2 Résultats du calcul

Bell et Mehta montrent dans leur étude [71], que la fonction déduite par Townsend (cf. [71]),

$$U^* \;=\; \left[1 + \mathrm{erf}\,(y/b)\right]/2\quad, \tag{5.6}$$

représente le profil transversal de la vitesse axiale normalisée,

$$U^* \equiv (\widetilde{u} - U_2)\,/\,(U_1 - U_2)\quad, \tag{5.7}$$

à partir de petites valeurs de la distance axiale. Dans l'expression (5.6), b représente l'épaisseur de la couche de mélange. De façon analogue à l'étude [71], on utilise une méthode des moindres carrés appliquée à (5.6) pour déterminer b à chaque section de calcul. Cela revient à minimiser l'écart global entre la fonction (5.6) et les valeurs numériques en utilisant b comme

	expérience	LRR	SSG	FLT	Boussinesq	SZL
$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}$	0.0190	0.0195	0.0157	0.0138	0.0135	0.0135
$\%_{exp}$	100.0	102.6	82.6	72.6	71.0	71.0

Tableau 5.5: Résultats pour la croissance de l'epaisseur de la couche de mélange incompressible

paramètre. L'expression non-linéaire obtenue est résolue par une méthode de Newton.

La figure 7.14 montre la validité de la fonction de Townsend pour le résultat obtenu avec le modèle SSG qui est représentatif de tous nos calculs.

Par cette procédure de normalisation, on extrait en effet un seul paramètre b qui caractérise entièrement le champ moyen de l'écoulement. On définit la variable $\eta \equiv y/b$ utilisée comme ordonnée normalisée. Sur la figure 7.15 est montrée l'épaisseur b en fonction de la distance axiale. Pour les calculs présentés, le champ cinématique moyen atteint un état de similitude à environ $x = 1\,m$, ce que l'on constate avec le gradient de l'épaisseur qui devient constant (voir le tableau 5.5). Les deux résultats obtenus avec les modèles à deux équations donnent une croissance nettement inférieure à l'expérience. Les modèles de transport conduisent à une croissance plus réaliste, surtout pour les modèles LRR et SSG.

On s'intéresse maintenant aux corrélations de la vitesse. Dans l'expérience, celles-ci atteignent une valeur asymptotique pour $x = 0.6\,m$ environ. On vérifie, tout d'abord, qu'un état de similitude est atteint par les résultats numériques. Sur les figures 7.16 à 7.18 est tracée l'évolution spatiale des maxima de l'énergie cinétique turbulente, de la dissipation et de la tension normale $\widetilde{uu}$. On constate donc que les courbes correspondant aux calculs prennent des valeurs constantes à partir de $x = 150\,cm$ environ. Au delá de ce point, on considèrera le champ comme établi.

Sur les figures 7.19 à 7.23 sont montrés des profils de l'énergie cinétique turbulente et des tensions turbulentes en représentation normalisée. On constate que l'énergie turbulente est sousestimée pour tous loes calculs (entre 20% et 35% selon le modèle utilisé): la faible valeur de l'énergie cinétique turbulente est également visible sur l'évolution des maxima (voir ci-dessus). La décroissance rapide de la dissipation près de l'entrée (voir figure 7.17) semble indiquer qu'elle prend une trop grande valeur à la frontière. On peut penser que la reconstruction de la dissipation ε peut avoir une influence sur l'état asymptotique. On a donc effectué plusieurs calculs avec différentes conditions d'entrée. La première condition, a consistée à utiliser l'hypothèse d'équilibre entre la production et la dissipation dans la section d'entrée,

$$\varepsilon = \max\left\{-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\widetilde{u''v''}, \quad \varepsilon_{min}\right\}, \quad \varepsilon_{min} = 10^{-5}\frac{m^2}{s^3} \quad , \tag{5.8}$$

au lieu de la relation (5.5). La deuxième condition est de réduire la dissipation obtenue par la relation (5.5) d'un facteur 4 en se basant sur la figure 7.17:

$$\varepsilon = \varepsilon_{(5.5)} \cdot \frac{1}{4} \quad . \tag{5.9}$$

La figure 7.24 montre les trois profils d'entrée. Les résultats obtenus avec les relations (5.5) et (5.8) ne diffèrent pas beaucoup. Le profil réduit de la dissipation (5.9) conduit à une évolution spatiale des grandeurs turbulentes initialement modifiée (figure 7.26), bien que l'on obtienne également un état de similitude. Celui-ci correspond au profil associé à la condition d'entrée d'origine (5.5). La figure 7.25 vérifie que les profils asymptotiques de l'énergie cinétique obtenus par le modèle LRR sont effectivement identiques.

Une autre cause de la différence de niveau de l'énergie cinétique entre le calcul et l'expérience pourrait être l'influence pariétale du séparateur des courants, qui n'est pas prise en compte dans les calculs. On a donc effectué un calcul en imposant les profils asymptotiques de l'expérience à l'entrée du domaine. Pour la vitesse axiale, on impose directement la fonction (5.6). Ce n'est pas le cas car les résultats obtenus pour les deux conditions d'entrée sont approxiamtivement identiques.

Après les tests de raffinement du maillage mentionnés ci-dessus, il ne semple donc pas que le faible niveau de l'intensité turbulente soit dû à des erreurs numériques. Pour cela, on va donc analyser de façon qualitative les résultats obtenus pour les composantes du tenseur des tensions.

Pour étudier la structure du tenseur prédite par les modèles, on considère les composantes de l'anisotropie b_{ij} représentées sur les figures 7.27 à 7.32. On ne tient pas compte du comportement loin de l'axe ($|\eta|$ grand), les valeurs des tensions étant faibles à l'extérieur de la zone du cisaillement. On constate que les résultats obtenus avec les modèles de transport ainsi qu'avec le modèle SZL suvent qualitativement ceux de l'expérience. Par contre, la relation de Boussinesq prédit une quasi-isotropie des tensions normales. Il faut cependant noter que, quantitativement, les modèles de transport surestiment fortement toutes les trois composantes de l'anisotropie. Par contre, le modèle algébrique SZL, lui, sous-estime les composantes normales mais donne une bonne représentation du cisaillement.

Ces dernières remarques se rapportent plutôt à la fonction de pression-déformation responsable de l'échange d'énergie entre les composantes. Cette configuration étant le premier test non-homogène, il faut donc également s'intéresser à la fiabilité du modèle de diffusion. Pour tester le modèle isotrope utilisé, on étudie la corrélation triple $\widetilde{uvv}$ mesurée dans l'expérience [71]. Sur la figure 7.33 est présentée la courbe expérimentale comparée à la valeur calculée à partir des corrélations doubles de vitesse. Bien que les points de calculs sont relativement dispersés du fait que l'on a utilisé peu de points pour évaluer les gradients, l'accord est assez bon et le niveau des maxima et les pentes semblent être corrects.

5.3.3 Conclusions

On a constaté que le niveau d'énergie turbulente ainsi que l'anisotropie de la tension semblent très faibles dans cette expérience. On a néanmoins pu valider, avec cette configuration de cisaillement libre et inhomogène, le modèle de transport complet. L'avantage des versions testées par rapport aux modèles à deux équations provient de la prédiction de l'épanouissement de la zone de mélange. En ce qui concerne la structure du tenseur, le modèle k-ε nonlinéaire SZL donne la meilleure prédiction (le cisaillement moyen étant très faible).

5.4 Couche de mélange de Goebel et Dutton

Après avoir effectué des calculs dans le cas d'une couche de mélange à basse vitesse, on considère maintenant le cas plus compléxe d'une couche de mélange à vitesse élevée. Nous nous intéressons ici aux changements induits par la compressibilité de l'énergie et de la structure du champ turbulent. Cependant, sans corrections spécifiques pour le cas d'un nombre de Mach turbulent élevé, on a très peu de chance de reproduire ces phénomènes. On peut seulement simuler l'influence de la masse volumique moyenne. Ce test sert donc surtout à illustrer les defauts d'une approche négligeant l'effet intrinsèque de la compressibilité sur l'intensité et la structure de la turbulence.

D'autre part, d'un point de vue numérique, un tel cas test est important, les gradients de vitesse étant très forts et le type de l'écoulement changant en passant le point sonique.

5.4.1 Influence de la compressibilité dans l'expérience

L'observation principale lors du développement spatial d'une couche de mélange est la réduction de l'épanouissement avec l'intensité de la compressibilité. Afin de distinguer le cas d'une variation de masse volumique due à une pure dilatation du cas d'une variation due à de forts gradients de vitesse, on définit le nombre de Mach relatif:

$$\mathrm{M}_r \equiv \frac{U_1 - U_2}{(\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2)/2} = 2\,\mathrm{M}_c \quad , \tag{5.10}$$

proportionel au nombre de Mach convectif M_c des grandes échelles (si $\gamma_1 = \gamma_2$). Papamoschou et Roshko [72] ont montré l'utilité du nombre de Mach convectif pour distinguer les deux cas précédemment cités. Cette étude a permis de démontré que, pour un écoulement à γ constant, le taux de croissance n'etait fonction que du rapport des vitesses, de celui des densités et du nombre de Mach convectif,

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{U_1}{U_2},\ \frac{\rho_1}{\rho_2},\ \mathrm{M}_c\right) \quad . \tag{5.11}$$

On constate que pour des rapports U_1/U_2 et ρ_1/ρ_2 donnés, la valeur de $\mathrm{d}b/\mathrm{d}x$ diminue fortement quand M_c augmente. La figure 7.35 montre quelques valeurs obtenues dans les études de Goebel et Dutton [73] et Samimy et Elliott [74] qui illustrent cette tendance.

Dans l'étude de Papamoschou et Roshko [72], le champ turbulent n'a pas été analysé en détail. Les mesures successives de Samimy et Elliott [74] et Goebel et Dutton [73] donnent des informations supplémentaires sur certaines corrélations de vitesse jusqu'à l'ordre 4, mais ce sont presque exclusivement des mesures bidimensinnelles. On utilisera donc la justification donnée dans le paragraphe 5.4.2 pour reconstruire l'énergie cinétique turbulente.

Nous allons étudier plus particulièrement les expériences de Samimy et Elliot (noté après SE) et de Goebel et Dutton (GD). Nous considérons, ici, l'influence de trois facteurs: l'énergie cinétique turbulente k, puis la structure du tenseur des tensions turbulentes b_{ij} et enfin le transport turbulent par les fluctuations de vitesse.

Afin d'estimer le comportement de k, on est amené, pour comparer les différents cas, à chercher une normalisation de cette grandeur. En suivant les auteurs des expériences, on choisit la différence de vitesse moyenne $\Delta U \equiv U_1 - U_2$. Il faut noter que, pour un grand nombre de cas incompressibles, cette normalisation conduit à des valeurs constantes [73].

On introduit alors le paramètre σ_k, définit par

$$\sigma_k \equiv \frac{\sqrt{k}}{\Delta U} = \frac{\mathrm{M}_t}{\mathrm{M}_r}\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \tag{5.12}$$

proportionel au rapport des nombres de Mach turbulent (habituellement définit par $M_t \equiv \sqrt{2k}/\tilde{c}$ dans la littérature) et relatif. Sur les figures 7.36 et 7.37 sont représentées les valeurs de similitude de σ_k en fonction de la coordonnée normalisée y/b pour différentes conditions expérimentales. On observe une diminution de l'énergie k par rapport à l'énergie cinétique moyenne pour les deux expériencese quand M_r augmente, la seule différence vénant du maximum de σ_k qui rest constant entre $Mr = 1.4$ et $M_r = 1.97$ dans l'expérience de Goebel et Dutton. On en conclut que l'action du mélange est limitée pour des niveaux de compressibilité importants puisque l'énergie relative des fluctuations turbulentes est reduite.

Le tenseur d'anisotropie b_{ij} est un paramètre qui traduit la structure du champ turbulent. Les figures 7.38 à 7.43 montrent qeu les deux expériences donnent des résultats opposés. Les mesures de GD montrent une nette croissance en valeur absolue des composantes b_{11} et b_{22} et une réduction moins marquée de la valeur absolue de b_{12} en fonction du nombre de Mach relatif. Les résultats correspondant à $M_r = 1.59$ ne suivent pas cette tendance; ils montrent une anisotropie très faible pour toutes les composantes. Par contre, les profils d'anisotropie déterminés par SE sont pratiquement identiques entre $M_r = 1.02$ et $M_r = 1.72$. Ces valeurs correspondent, de plus, approximativement aux valeurs obtenues à $M_r = 0.40$ dans l'expérience de GD. SE en concluent donc que l'anisotropie entre les tensions n'est pas affectée par la compressibilité tandis que GD sont amenés à la conclusion inverse. Ils considèrent d'ailleurs qu'une cause de la différence d'anisotropie est une modification de la corrélation entre pression et vitesse transversale. Ils estiment aussi que l'influence du confinement du domaine de propagation des ondes de pression à haut nombre de Mach relatif joue un rôle important. Afin d'étudier ce genre de phénomène, on peut considérer le cas d'un écoulement homogène cisaillé moins complexe puisque les termes de transport sont nuls. Cette situation sera étudiée dans un rapport ultérieur [75].

La troisième observation faite dans les expériences porte sur le transport turbulent, non-nul dans cet écoulement inhomogène. Le mécanisme de transport des tensions par des fluctuations de vitesse fait apparaître des corrélations triples de vitesse dans l'équation de bilan (2.4). A partir des fluctuations de vitesse mésurées dans la direction axiale et dans la direction transversale, SE ont calculé les quatres corrélations triples dans le plan $[x, y]$. Sur les figures 7.44 à 7.47 sont représentés les profils de ces termes de transport normalisés par le cube de l'écart de la vitesse moyenne ΔU^3. Toutes les composantes ont tendance à diminuer quand le nombre de Mach relatif croît. On en déduit que le transport relatif des tensions ainsi que celui de l'énergie cinétique turbulente par l'action du champ de vitesse fluctuant diminue à

cas	U_2/U_1	$\overline{\rho}_2/\overline{\rho}_1$	Mr	T_t	$\overline{p}$	Ma_1	Ma_2	U_1	U_2
1	0.78	0.76	0.4	295	46	2.01	1.38	515	404
3	0.18	0.57	1.37	285	53	1.96	0.27	499	92

Tableau 5.6: Conditions de l'expérience de Goebel et Dutton [73], unités S. I.

cause de la compressibilité. On est alors amené à définir

$$\mathrm{R}_{uu} \equiv \frac{\overline{u'u'v'}}{\overline{u'u'u'}}, \quad \mathrm{R}_{vv} \equiv \frac{\overline{v'v'v'}}{\overline{u'v'v'}}, \quad \mathrm{R}_{uv} \equiv \frac{\overline{u'v'v'}}{\overline{u'u'v'}}, \quad \mathrm{R}_{k} \equiv \frac{\overline{v'(u'u'+v'v')}}{\overline{u'(u'u'+v'v')}} \quad , \tag{5.13}$$

représentant le rapport du transport des tensions $\overline{u'u'}$, $\overline{v'v'}$, $\overline{u'v'}$ et k respectivement dans les directions transversale et axiale . Les valeurs étant fortement dispersées (voir figures 7.48 à 7.48), déduire une évolution en fonction du nombre de Mach relatif est impossible. Il semble donc que l'influence de la compressibilité sur l'anisotropie des corrélations triples est assez faible. Par conséquent, les transports transversal et axial suivent la même évolution.

5.4.2 Présentation du cas test simulé numériquement

Aspects physiques

D'après la base de données de Settles et Dodson [76] pour les écoulements compressibles, on a choisi l'expérience de Goebel et Dutton [73] comme support pour la couche de mélange compressible. Un des avantages est que leur série de sept essais couvre un spectre assez large de rapports des vitesses entre les deux courants, de rapports des densités et de nombre de Mach relatif. Pour trois de ces cas, la température totale est constante des deux cotés de l'interface. On peut alors reconstruire plus facilement les profils du champ moyen à l'entrée, bien que la masse volumique n'ait pas été mesurée. Il s'agit des cas 1, 1d et 3 (le cas 1d correspond au cas 1, avec des perturbations latérales). On a alors décidé de simuler numériquement les cas 1 et 3 de Goebel et Dutton dont les caractéristiques sont données dans le tableau 5.6.

Dans tous les essais, le fluide utilisé est de l'air . Les courants initiaux sont chauffés ou refroidis individuellement pour obtenir la condition d'opération souhaitée.

cas	N	L_x	L_y	Δy_{min}	Δy_{max}	Δx_{min}	Δx_{max}
1	6900	0.45	0.1	$6.6 \cdot 10^{-5}$	$6.6 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$
3	9480	0.30	0.2	$3.9 \cdot 10^{-4}$	$8.0 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$

Tableau 5.7: Paramètres caractéristiques des maillages utilisés pour le calcul de la couche de mélange compressible; distances données en mètres

Aspects numériques

Comme dans le calcul de la couche de mélange en régime incompressible, le domaine de calcul commence à la première section de mesure ($x = 0.01\,m$) qui fournit la condition aux limites. Suivant le cas, le mélange s'effectuant plus ou moins rapidement, on utilise des domaines de longueur différente , de $0.45\,m$ pour le cas 1 à $0.30\,m$ pour le cas 3. Dans la direction transversale, les deux maillages couvrent une distance de plus que dix fois l'épaisseur maximale de la zone de mélange. Les caractéristiques des deux maillages sont donnés dans le tableau 5.7. On tient compte de la différence d'évolution du mélange dans les deux cas (nombre des noeuds N, dimensions L_x et L_y, taille des mailles Δx, Δy); le raffinement dans la direction transversale y est du même ordre de grandeur.

Pour déterminer l'état dans la section d'entrée à partir des mesures de $\widetilde{u}$, $\overline{\rho}\widetilde{u''u''}$, $\widetilde{v''v''}$ et $\widetilde{u''v''}$, on part de la définition de la température totale pour obtenir la masse volumique:

$$\overline{\rho} = \frac{\overline{p}}{RT_t - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\widetilde{u}^2} \quad , \tag{5.14}$$

où l'on suppose que la pression ne varie pas selon y et que la vitesse transversale $\widetilde{v}$ est négligeable. Ces hypothèses ne sont pas vérifiées puisqu'un simple bilan de masse montre que le processus de mélange crée une vitesse $\widetilde{v}$ dirigée du côté haute vitesse vers le côté basse vitesse. De plus, un bilan de quantité de mouvement pour la couche de mélange montre (voir par exemple [50, p. 15.12]) que la pression varie avec y en fonction de la tension $\widetilde{vv}$,

$$\partial_y(\overline{p}) = -\partial_y(\overline{\rho}\widetilde{vv}) \quad . \tag{5.15}$$

Néanmoins, n'ayant pas de mesures pour la vitesse $\widetilde{v}$, on est obligé d'utliser la relation (5.14). Ceci a pour conséquence de créer une perturbation du champ de pression sur l'axe près de l'entrée. Cette dépression se propage sous la forme d'une ligne de Mach dans la partie supersonique du domaine (voir figure 7.56). Afin d'éviter l'interaction et la reflexion de cette onde à la frontière longitudinale, on impose une condition de non-réflexion sur la frontière supérieure (dans le cas 1 ceci n'est pas nécessaire car l'onde est faible).

Sans données pour la troisième composante diagonale du tenseur des tensions $\widetilde{w''w''}$, on suppose que

$$\widetilde{w''w''} \approx \widetilde{v''v''} \quad , \tag{5.16}$$

ce qui permet de déduire l'énergie cinétique turbulente. Le cas 6 de la série d'essais de Dutton *et al.* permet de valider cette hypothèse. Il s'agit, en effet, du seul cas où des mesures tridimensionelles de vitesse ont été effectuées. Sur la figure 7.34 sont montrées des valeurs expérimentales des tensions transversales $\widetilde{vv}$ et $\widetilde{ww}$ pour une station axiale ($x = 170\,mm$), cette situation étant représentative de tout le domaine. On constate un bon accord des deux courbes sauf pour la partie hors de la zone de mélange. On en conclut que pour déterminer les conditions d'entrée et pour effectuer la normalisation du tenseur de l'anisotropie b_{ij}, l'hypothèse (5.16) peut être utilisée.

Pour déterminer la dissipation à l'entrée, on utilise l'approximation (5.5). Les profils à l'entrée ainsi obtenus sont montrés sur les figures 7.52 à 7.55.

Ce cas test nous a posé le problème particulier du traitement de la frontière de sortie. En effet, les frontières libres sont en général considérées des zones "non-visqueuses". Par conséquent, on n'assemblait pas les flux visqueux $\vec{R}$ à travers un ségment de frontière libre. Ceci revient à négliger, sur cette partie de la frontière, la contribution

$$\oint_{\Gamma} \vec{R}\,\vec{n}\,\phi_i\,\mathrm{d}\sigma \tag{5.17}$$

dans la formulation intégrale des équations (4.3). Or, dans le cas présent, ces flux ne sont plus négligeables devant les flux convectifs à cause de la très forte valeur du cisaillement et de l'intensité turbulente. Le bilan d'énergie est notamment très sensible à cette contribution. Les figures 7.56 et 7.57 montrent les lignes iso-valeurs de la pression avec ou sans le terme de bord visqueux (5.17): la perturbation du champ est visiblement réduite quand on prend en compte l'expression (5.17)[1].

5.4.3 Résultats du calcul

Nous nous intéressons plus particulièrement des résultats obtenus pour le cas 3, pour lequel le nombre de Mach relatif est plus élevé. Il est donc

---

[1] Néanmoins, dans la plupart des cas, ce terme (5.17) est effectivement négligeable, ce qui est démontré, par exemple, pour des calculs instationnaires du passage d'un tourbillon par une frontière dans [77].

plus sensible aux phénomènes de compressibilité. On utilise les résultats pour le cas d'un faible nombre de Mach relatif (cas 1) pour effectuer des comparaisons.

Sur la figure 7.58 sont représentés les profils de la vitesse axiale obtenus avec le modèle SSG dans plusieurs stations. Initialement, on remarque un déficit de vitesse du côté basse vitesse, issu de la couche limite génératrice. Ensuite, le profil de vitesse prend la forme d'une fonction *erf*.

Pour ce cas test, on définit l'épaisseur b comme:

$$b \equiv y_1(\tilde{u} = U_2 + 0.9\ (U_1 - U_2)) - y_2(\tilde{u} = U_2 + 0.1\ (U_1 - U_2)) \quad . \tag{5.18}$$

On définit alors la coordonnée transversale, adimensionelle η par:

$$\eta \equiv \frac{y - y_0}{b} \quad , \tag{5.19}$$

où y_0 est le centre entre les deux points y_1 et y_2. Il faut noter que la définition (5.18) est différente de celle utilisée pour la couche de mélange incompressible du paragraphe 5.3. Elle correspond en fait a celle d l'expérience [73].

La figure 7.62 montre l'évolution de l'épaisseur b en fonction de la distance axiale. On remarque qu'à partir de $x = 140\,mm$ environ, les courbes sont linéaires, c'est-à-dire que le champ moyen semble avoir atteint un état de similitude. Cette similitude est vérifiée par la superposition des courbes de vitesse prises à différentes stations et tracées en fonction du paramètre η. C'est ce qu'on remarque sur la figure 7.59 pour le modèle SSG. En outre, tous les résultats sont similaires dans la zone développée (voir figure 7.61 pour le cas 3). Par conséquent, le seul paramètre qui caractérise le champ moyen de vitesse est l'épaisseur b. On note tout de même une légère décroissance de la valeur de la vitesse extérieure du côté basse vitesse sur la figure 7.59. Elle provient du gradient de pression longitudinal que l'on peut remarquer sur la figure 7.56. Cependant, dans l'expérience ce phénomène est encore plus important (voir figure 7.60): on en déduit que le dispositif expérimentale'génère un fort gradient de pression.

La croissance spatiale du paramètre b (déterminée dans la zone de similitude) est donnée dans le tableau 5.8. On rappelle que du fait de la définition (5.18), l'épaisseur b est désormais une quantité locale, alors que la définition du paragraphe 5.3 donnait une épaisseur globale. On s'attend donc à une erreur plus importante surtout pour le gradient. Ceci est valable pour l'expérience tout comme pour le calcul, puisque l'on ne dispose que des valeurs discrètes.

On a également inclu dans le tableau 5.8 la valeur de l'épaississement

cas	(5.20)	expérience	LRR	SSG	FLT	Boussinesq	SZL
1	0.0202	0.0200	0.0256	0.0229	0.0236	0.0242	0.0211
3	0.1030	0.0590	0.0663	0.0636	0.0486	0.0585	0.0446

Tableau 5.8: Croissance de l'épaisseur $\mathrm{d}b/\mathrm{d}x$ des couches de mélange compressibles

donnée par la formule de Roshko (cf.[73]),

$$\left.\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}\right]_{\mathrm{M}_r\to 0} = C\cdot\frac{(1-U_1/U_2)(1+\sqrt{\rho_1/\rho_2})}{2\,(1+U_1/U_2\,\sqrt{\rho_1/\rho_2})}\,,\quad C=0.165\quad,\tag{5.20}$$

qui n'est valable que pour le cas d'un champ de vitesse incompressible, mais qui tient compte d'une masse volumique variable. La formule (5.20) sert à déterminer approximativement le taux de croissance asymptotique d'une couche de mélange pour des rapports de vitesse et de densités donnés mais pour un nombre de Mach relatif négligeable.

La valeur donnée par (5.20) avec les paramètres du cas 1 est en bon accord avec l'expérience. A haut nombre de Mach relatif (cas 3) les mesures montrent une forte réduction, d'environ 40%, de la croissance spatiale . D'autre part, les calculs prédisent un épaississement trop élevé, entre 5% et 28%, pour le cas 1. Les prédictions pour le cas 3 varient entre une sous-estimation de 18% avec le modèle SZL et une surestimation de 12% avec le modéle LRR. Ce résultat est surprenant puisque, sans correction de compressibilité, le modéle SSG, par exemple, prédit l'épanouissement avec 14% d'erreur dans le cas 1 et avec 7% d'erreur seulement dans le cas 3. Il est donc nécessaire d'étudier le champ des moments statistiques pour obtenir d'avantage d'informations sur la qualité des calculs.

Les profils des tensions $\widetilde{u_i''u_j''}$ en fonction de η sont représentés sur les figures 7.63 à 7.68 pour les deux configurations expérimentales. En ce qui concerne les tensions normales $\widetilde{u''u''}$ et $\widetilde{v''v''}$, le modèle SSG se rapproche le plus des mesures en générant les anisotropies les plus élevées; les trois modèles de transport donnent les meilleures prédictions; l'hypothèse de Boussinesq prédit une quasi-égalité entre les tensions normales. L'erreur augmente avec le nombre de Mach convectif. Le niveau de la contrainte $\widetilde{u''v''}$ est assez bien prédit par tous les calculs sauf par le modéle SZL qui donne des valeurs trop faibles. La contrainte $\widetilde{u''v''}$ est responsable pour la plus grande partie de la production d'énergie turbulente k. La représentation de cette grandeur reflète donc la performance des modèles pour ce qui est de la prédiction du taux de croissance de la zone de mélange.

Les profils des tensions, sont-ils similaires? L'évolution des maxima de $\widetilde{u''u''}$ et ε à chaque station (figures 7.69 à 7.72) montre que, dans le cas 1, le champ des moments turbulents peut être considéré comme autosimilaire à partir de $x = 400\,mm$, ce qui n'est pas vrai pour le cas 3. On note qu'à l'intérieur de la région couverte par les mesures expérimentales ($x \leq 250\,mm$), le maximum de la tension $\widetilde{u''u''}$ croît toujours quasi-linéairement, tandis que la décroissance de la dissipation est ralentie vers la sortie du domaine. On a alors effectué un calcul avec le modèle SSG sur un maillage prolongé jusqu'à $x = 500\,mm$. Au delà de $x = 300\,mm$, la tension $\widetilde{uu}$ continue à croitre linéairement tout comme l'énergie cinétique k (voir figure 7.73), tandis que la dissipation ε approche un état asymptotique vers la sortie (figure 7.74). Les calculs ne tendent donc pas vers un état asymptotique pour les niveaux des composantes de la tension de Reynolds. Par conséquent, on n'est pas capable d'effectuer une comparaison entre l'expérience et le calcul pour le rapport entre l'énergie cinétique turbulente et l'énergie cinétique du champ moyen σ_k.

Par contre, les composantes de l'anisotropie b_{ij} atteignent très rapidement un état d'autosimilitude. Sur les figures 7.75 et 7.76, on montre l'évolution des valeurs associées aux maxima des tensions de chaque station pour le calcul SSG dans les deux configurations étudiées. La figure 7.77 donne le rapport approché des temps caractéristiques Sk/ε associés (le paramètre de déformation S n'inclue que le cisaillement); le rapport entre la production et la dissipation d'énergie cinétique turbulente sur l'axe est montré sur la figure 7.78. Ces deux rapports varient très peu en fonction de la distance et du cas. Pour tous les calculs dans les deux cas étudiés, Sk/ε prend une valeur entre 4 et 5 et $\mathcal{P}/\varepsilon$ est compris entre 1.2 et 1.5. Ces valeurs ne sont pas très éloignées de celles obtenues pour un cisaillement homogène (présenté dans le paragraphe 5.2). On constate également que les valeurs d'anisotropie b_{ij} sur l'axe pour chaque modèle correspondent à celles que l'on retrouve asymptotiquement pour le cisaillement homogène.

Par analogie avec le cas d'un cisaillement homogène, il ne semble pas surprenant que les modèles de transport utilisés montrent les mêmes niveaux d'anisotropie dans les deux cas de la couche de mélange. On le constate également avec les profils transversaux d'anisotropie (cas 1: $x = 400\,mm$; cas 3: $x = 250\,mm$), qui ont atteint un état de similitude. Les courbes issues du calcul effectué avec le modèle SSG sont montrées sur les figures 7.79 et 7.80. La structure du tenseur est quasiment identique dans les deux cas. On rappelle que dans l'expérience, par contre, l'anisotropie des composantes normales augmente avec le nombre de Mach convectif, tandis que la contrainte diminue (voir paragraphe 5.4.1; figures 7.38, 7.40 et 7.42). Ainsi, avec les équations modélisées, les deux cas étudiés sont similaires en ce qui concerne la structure du tenseur de Reynolds.

5.4.4 Conclusions

Le calcul d'une couche de mélange à vitesse élevée et avec un fort cisaillement a permis, tout d'abord, de valider notre approche numérique. On a été amené à améliorer le traitement des frontières libres en prenant en compte les termes de bord liés aux termes visqueux afin de supprimer les perturbations liées aux forts gradients dans la section de sortie.

Les tensions turbulentes n'ont pas atteint un état de similitude avec nos calculs pour le cas d'un haut nombre de Mach convectif, mais les valeurs de l'anisotropie b_{ij} deviennent autosimilaires.

Les conclusions liées à l'influence de la compressibilité sur les tensions de Reynolds sont différentes selon les études expérimentales. Mais, si l'on se base sur les mesures de Goebel et Dutton, l'anisotropie est fortement affectée par le nombre de Mach convectif. Ce comportement n'est pas trouvé par les modèles de transport que nous avons utilisés, puisq'il s'agit d'extensions à masse volumique variable de modèles conçus pour des écoulements incompressibles. Néanmoins, il existe une analogie trés proche entre la structure du tenseur dans un cisaillement homogène et dans une couche de mélange en autosimilitude (voir également Sarkar [9]). Il semble donc utile d'étudier la situation homogène pour arriver à une meilleure compréhension de l'influence de la compressibilité.

5.5 Couche limite de Klebanoff

Les configurations étudiées dans les paragraphes précédents étant des écoulements libres, on s'intéresse maintenant à la prédiction des effets en présence d'une paroi solide. Comme on l'a déjà remarqué dans l'introduction, la modélisation des termes de pression-déformation ("echo") par l'approche des lois de paroi empiriques sans correction pariétale est basée sur des hypothèses très grossières. Les intérêts de ce traitement simplifié de l'écoulement en proche paroi sont l'économie de temps de calcul (la sous-couche visqueuse n'est pas résolue) et l'indépendance géométrique du modèle (la distance normale à la paroi n'intervient pas comme paramètre dans le modèle).

L'objectif des calculs du type couche limite est de déterminer la validité de notre méthode pour une configuration qui est à la fois simple et bien étudiée. Pour cela, on a, tout d'abord, choisi l'expérience de Klebanoff [78] qui est assez complête et qui sert de référence dans de nombreuses études numériques et expérimentales.

$\nu\,[m^2/s]$	$u_\infty\,[m/s]$	Re_{QDM}	Re_x	Re_u
1.5705×10^{-5}	15.24	7620	4.200×10^6	1.016×10^6

Tableau 5.9: Grandeurs caractéristiques de l'expérience de Klebanoff

5.5.1 Présentation du cas test

Aspects physiques

La couche limite dans l'expérience de Klebanoff se développe à faible vitesse extérieure, les effets de compressibilité ne sont donc pas présents. Le fluide utilisé est de l'air. La configuration expérimentale est constituée d'une plaque plane lisse sauf sur une partie de $0.6\,m$ à partir du bord d'attaque où elle est recouverte par une surface rugueuse afin d'obtenir une épaisseur de couche limite plus importante. Le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement δ_{QDM} vaut de $\mathrm{Re}_{QDM} \approx 8000$ dans la section de mesure située à $x_0 = 3.2\,m$ du bord d'attaque. L'écoulement est donc turbulent dans cette zone et les influences dues à un nombre de Reynolds faible peuvent être négligées [79]. Le tableau 5.9 donne certaines grandeurs caractéristiques de l'écoulement. On note que le nombre de Reynolds Re_x est basé sur la distance à l'origine apparente, valant $x = 4.3282\,m$. On a également reporté la valeur du nombre de Reynolds unitaire basé sur une longueur de $1\,m$.

Aspects numériques

La figure 7.81 montre le domaine de calcul qui s'étend sur une distance axiale de $3\,m$ entre les stations de mesure x_0 et x_1. La hauteur du domaine mesure $0.5\,m$, ce qui correspond à quatre épaisseurs de la couche limite à la sortie.

Le maillage utilisé (figure 7.82) est constitué de 6000 noeuds qui sont distribué de manière structurée. Dans la direction axiale, on a 120 noeuds équidistants; dans la direction normale à la paroi, 50 noeuds sont répartis de telle sorte que le rapport entre la plus grande et la plus petite distance soit égale à 20. Par conséquent, 25 à 30 noeuds se trouvent dans la couche limite. La distance entre la paroi numérique (première noeud du calcul) et la paroi physique vaut $d = 0.002\,m$ pour tous les calculs, ce qui donne des valeurs adimensionnelles de y^+ variant entre 80 et 90.

De façon analogue aux écoulements incompressibles précédemment étudiés, on a adapté la pression afin d'augmenter artificiellement le nombre de Mach dans le calcul. Les valeurs des variables thermodynamiques sont données dans le tableau 5.10.

$\overline{p}\,[Pa]$	$\overline{\rho}\,[kg/m^3]$	Ma_∞
1.9908×10^4	1.2000	0.1

Tableau 5.10: Variables thermodynamiques du calcul de la couche limite de Klebanoff

A la frontière d'entrée, on impose les profils expérimentaux pour la vitesse axiale, les composantes de la tension turbulente, l'énergie cinétique turbulente et le taux de la dissipation. Ces profils sont montrés sur les figures 7.83 et 7.84. La vitesse normale est prise égale à zéro à l'entrée.

5.5.2 Résultats du calcul

Dans l'étude de Klebanoff, les mesures ont été effectuées dans une seule section transversale. Par conséquent on ne dispose pas d'information sur l'évolution axiale de l'écoulement. Mais, en ce qui concerne le champ moyen, on peut comparer la variation de l'épaisseur de la couche limite,

$$\delta_{99} \equiv y\left(\tilde{u}\left(y\right) = 0.99 u_\infty\right) \quad , \tag{5.21}$$

et de l'épaisseur de quantité de mouvement,

$$\delta_{QDM} \equiv \frac{1}{u_\infty^2} \int_0^\infty \tilde{u}\left(u_\infty - \tilde{u}\right) \mathrm{d}y \quad , \tag{5.22}$$

donnés par le calcul avec les formules empiriques [5]:

$$\begin{aligned} \delta_{99}\left(x\right) &= 0.37\, x \left(\mathrm{Re}_x\right)^{-1/5} && (5.23) \\ \delta_{QDM}\left(x\right) &= 0.036\, x \left(\mathrm{Re}_x\right)^{-1/5} \quad . && (5.24) \end{aligned}$$

Ces formules sont valables jusqu'à $\mathrm{Re}_x \approx 1 \times 10^7$, ce qui est verifié dans notre cas.

Sur les figures 7.85 à 7.86, on montre l'évolution de ces grandeurs en fonction de la distance axiale. On remarque, tout d'abord, que l'on obtient des bons résultats avec les différents calculs. L'évolution de l'épaisseur de la quantité de mouvement est notamment correctement représentée, avec une marge d'erreur de ±5% le long de la plaque. Par contre, l'erreur maximale sur l'épaisseur δ_{99} atteint 10%. Cette différence vient probablement de la définition de ces deux épaisseurs: δ_{99} est une quantité locale, tandis que δ_{QDM} est une grandeur intégrale (ceci est analogue au problème de la définition de l'épaisseur de couche de mélange discuté dans le paragraphe 5.4).

Sur la figure 7.87 sont représentés les profils de la vitesse moyenne axiale. On ne compare pas les résultats avec l'expérience puisque cette grandeur n'est pas autosimilaire. On constate une légère différence entre les prédictions dans la zone: $0.2\,\delta < y < 0.6\,\delta$.

On s'intéresse maintenant aux profils transversaux des tensions turbulentes. Pour analyser les résultats, numériques, on suppose, tout d'abord, l'existence d'un état asymptotique des corrélations doubles de la vitesse avec la vitesse de frottement au carré u_τ^2 et l'épaisseur δ_{99} comme echelles de mise sous forme adimensionelle . Les profils obtenus par Klebanoff mis sous forme adimensionelle sont ensuite considérés comme des profils asymptotiques. La déviation des calculs par rapport à ces profils peut donc servir comme moyen de comparer la performance des modèles.

Existe-t-il un état asymptotique? Les publications sur ce sujet ne sont pas en accord. Dans l'article de revue de Gad-el-Hak et Bandyopadhyay [80], l'évidence expérimentale n'est pas jugée concluant quant à l'existence d'un état asymptotique des corrélations doubles de vitesse. L'étude de Andreopoulos *et al.* [81] conclut qu'à partir d'un nombre de Reynolds de $\mathrm{Re}_{QDM} \approx 10000$, les profils des corrélations longitudinales $\widetilde{uu}$ gardent la même forme. Les profils dans le travail de Antonia *et al.* [79] à $\mathrm{Re}_{QDM} \approx 6000$, $\mathrm{Re}_{QDM} \approx 9000$ sont en très bon accord avec ceux de Klebanoff [78] si l'on applique la mise sous forme adimensionelle par u_τ^2 et δ_{99} utilisée ici. Ainsi, bien qu'il ne s'agisse pas d'une similitude exacte, on est amené à supposer que la variation longitudinale des corrélations doubles de vitesse normalisées est négligéable.

On a tracé les profils transversaux des tensions turbulentes à la station $(x - x_0) = 2.8\,m$ en fonction de la distance y normalisée par l'épaisseur δ_{99} (figures 7.88 à 7.90) et en fonction de y^+ en représentation semi-logarithmique (figures 7.91 à 7.93). La différence entre les deux représentations est proportionelle au rapport entre l'épaisseur δ_{99} et la vitesse de frottement u_τ. La première est une grandeur déterminée à l'interface extérieure de la couche limite, tandis que la dernière est déterminée a la paroi. Dans les calculs, la vitesse de frottement est surestimée, ce qui provoque un décalage en y^+ des calculs par rapport à l'expérience sur les figures 7.91 à 7.93.

En ce qui concerne les tensions normales, on constate que les modèles de transport sont plus performants que les modèles k-ε. Le comportement qualitatif ainsi que les niveaux d'anisotropie de $\widetilde{uu}$ et $\widetilde{vv}$ sont très satisfaisants. Dans la zone de très proche paroi ($y < 0.1\,\delta$), on remarque que sans corrections spécifiques (termes d'écho de paroi), les modèles de transport ne prédisent pas précisément le transfert d'énergie de la composante normale ($\widetilde{vv}$) à la composante axiale ($\widetilde{uu}$). De plus, on note que le résultat obtenu avec le modèle FLT est plus éloigné plus des mesures que les résultats obtenus avec les modèles LRR et SSG.

En ce qui concerne la contrainte $\widetilde{uv}$, on constate que l'écart entre les différents résultats est faible sauf pour le modèle SZL qui prédit une valeur trop pétite.

Finalement, on a tracé les composantes du tenseur de l'anisotropie b_{ij} (figures 7.94 à 7.99) dans la couche limite. On remarque que les valeurs de ces grandeurs ne sont pas significatives en dehors de la couche limite, car la turbulence est résiduelle. Ces courbes confirment, cependant, l'accord qualitatif entre les résultats obtenus par les modèles de transport pour toutes les composantes.

5.5.3 Conclusions

Le calcul d'une couche limite turbulente sans gradient de pression à faible vitesse extérieure a servi de validation à l'implémentation des conditions aux limites pariétales pour le modèle de transport des tensions de Reynolds. Il a montré qu'avec la présente approche, on est capable de reproduire qualitativement les corrélations doubles de vitesse en proximité de la paroi. De plus, les résultats obtenus avec les modèles de transport sont meilleurs que ceux du modèle k-ε, notamment pour les tensions normales.

On a également constaté les défauts de l'approche des lois de paroi sans termes d'écho. Afin d'obtenir des prédictions encore plus précises pour les composantes normales du tenseur des tensions, on devrait probablement introduire un terme correctif dans le modèle de pression-déformation. Néanmoins, cette erreur restera limitée.

5.6 Couche limite de Mabey

Dans ce paragraphe, on étudie le calcul d'une couche limite à vitesse extérieure supersonique. Le but de cette étape est la validation de notre approche du traitement des parois solides avec des forts gradients de vitesse. L'expérience de Mabey [82] a déjà servi comme cas test pour une version précédente du code NATURng [4].

5.6.1 Présentation du cas test

Aspects physiques

Il s'agit du cas désigné par le numéro 7701 dans la revue AGARD 263 [82]. L'expérience étudie une couche limite turbulente se développant sans gradient de pression sur une paroi adiabatique. Les paramètres caractéristiques sont donnés dans le tableau 5.11, où le nombre de Reynolds est basé sur la longueur

Re_u	Ma_∞	T_∞
2.82×10^7	4.5	62° K

Tableau 5.11: Paramètres caractéristiques de la couche limite supersonique

de $1\,m$ (pour plus de détails sur ce cas test, se reporter aux références [4, 82].

Aspects numériques

Pour ce calcul, on conserve le maillage de 4000 noeuds utilisé dans l'étude [4] et la distance $d = 0.001\,m$ du premier noeud à la paroi physique. Il s'agit d'un domaine du même type que celui utilisé pour la couche limite incompressible (figure 7.81). A l'entrée, on impose les grandeurs du champ moyen qui correspondent à la première station de mesure de l'expérience située à $x = 0.368\,m$ du bord d'attaque. Pour déterminer les moments statistiques à l'entrée (qui n'ont pas été mesurés), on utilise les valeurs approchées de k et ε données dans l'étude [4], déduites d'un calcul préliminaire à l'aide d'un modèle k-ε bas–Reynolds [83]. Les valeurs à l'entrée des composantes du tenseur de Reynolds ont été obtenues à l'aide de l'hypothèse de Boussinesq. On effectue un calcul sur une longueur de $1.3\,m$. Les résultats sont comparés à $x = 1.368\,m$ du bord d'attaque qui correspond à la cinquième et dernière station de mesure de l'expérience.

Toutes les frontières libres sont traitées par la méthode des relations de compatibilité. Pour le traitement de la paroi solide, on utilise uniquement la loi de paroi de Van Driest. Le nombre de Prandtl du flux de chaleur turbulent est $\mathrm{Pr}_t = 0.72$ pour tous les calculs.

5.6.2 Résultats du calcul

Les profils de la vitesse moyenne axiale sont tracés sur la figure 7.100. Les résultats numériques sont très proches des mesures. L'évolution du coefficient de frottement $c_f \equiv 2\,\tau_w/(\rho_\infty\,u_\infty^2)$, déduit de la vitesse de frottement issue de la loi de paroi, est montrée sur la figure 7.101. Par rapport aux valeurs expérimentales, la décroissance des courbes numériques est un peu trop rapide. Les niveaux prédits par les modèles de transport des tensions de Reynolds sont satisfaisants, avec moins de 10% d'erreur à la station $x = 1.4\,m$.

L'échauffement de l'écoulement au voisinage de la paroi dû à l'action du cisaillement et de la turbulence est capté par l'ensemble des calculs. Les résultats numériques sont assez proches des mesures de la température (figure 7.102), sauf pour la zone de trés proche paroi ($x < 0.005\,m$), où l'analogie de Reynolds entre les gradients de vitesse et de température n'est probablement plus valable. La représentation de la température totale sur la figure 7.103 montre aussi une surestimation de la température en proche paroi, qui est due à la surestimation de la vitesse de frottement. Comme on a pu l'observer ci-dessus (figure 7.101), seul le modèle SZL donne une contrainte pariétale beaucoup plus faible. Par conséquent, les profils de température et de température totale associés sont plus proches de l'expérience.

Dans l'étude de Mabey, les corrélations des grandeurs fluctuantes n'ont pas été déterminées. Néanmoins, on présente ici des profils des tensions de Reynolds $\overline{\rho}\widetilde{u_i''u_j''}$ obtenus par les calculs avec les différents modèles de transport (figures 7.104 à 7.106). On montre également les courbes de l'expérience de Klebanoff [78] (voir paragraphe 5.5) effectuée à très bas nombre de Mach. Les tensions sont normalisées par la vitesse de frottement et par la densité à la paroi, la distance y est normalisée par l'épaisseur de la couche limite. Dans leur résumé des études expérimentales, Fernholz et Finley [84] concluent qu'avec cette forme d'adimensionnalisation, la contrainte $\overline{\rho}\widetilde{uv}$ varie très peu avec le nombre de Mach. En ce qui concerne les tensions normales, ils n'arrivent pas à la même conclusion. Pourtant, la variation de la forme des profils des tensions normales semble être également faible en fonction du nombre de Mach aussi bien qu'en fonction du nombre de Reynolds (voir par exemple Acharya *et al.* [85]). Au vu de ces observations, il est intéressant de noter que les calculs de la couche limite supersonique se rapprochent des courbes de Klebanoff avec cette normalisation. Les résultats obtenus avec le modèle SSG montrent notamment une très forte similitude avec les courbes de Klebanoff.

5.6.3 Conclusions

On a montré à l'aide de ce cas test la capacité de notre approche à reproduire des écoulements pariétaux à très haute vitesse extérieure. Du fait que la structure du champ turbulent dans une couche limite ne change pas énormement entre les régimes incompressible et supersonique, un accord satisfaisant avec l'expérience concernant le champ moyen peut être obtenu sans corrections spécifiques dues à la compressibilité.

Chapitre 6

Conclusion

Une fermeture du second ordre pour des écoulements compressibles a été présentée. Il s'agit d'une extension avec masse volumique variable de modèles conçus pour la situation incompressible. On a détaillé le cadre numérique et l'intégration des équations supplémentaires pour notre méthode de résolution. Celle-ci consiste en une formulation mixte volumes-finis/éléments-finis discrétisée sur des maillages non-structurés. La partie des équations traitée par la méthode des volumes-finis est réduite au système hyperbolique, conservatif au premier ordre différentiel, ce qui permet de découpler les équations en un système principal et en plusieurs équations associées à des grandeurs que l'on traite comme des scalaires passifs. Des tests en configuration monodimensionnelle [53] montrent que ce schéma n'assure pas forcement la monotonie de certaines grandeurs en présence de très fortes discontinuités. Cependant, les calculs dans un écoulement du type tube à choc [86] effectués avec le code NATURng-RSM, présenté dans cette étude, ne revèlent pas d'oscillations dans la solution. Il semble donc que notre méthode de traitement des termes convectifs soit suffisamment robuste et précise pour les calculs envisagés[1].

Divers tests de validation ont été effectués: cas d'ecoulements homogènes et inhomogènes; cas d'écoulements libres et ceux avec paroi solide; cas d'écoulements quasi-incompressibles et supersoniques. Ils nous ont permis de corriger certaines erreurs de programmation et d'adapter la méthode numérique. Ils ont mis en évidence quelques points faibles de la modélisation.

Après cette étape de validation, les questions que l'on peut se poser, concernent principalement la compressibilité et son influence sur les équations statistiques:

- Quel est le rôle du flux de masse turbulent systématiquement négligé

---

[1] La méthode couplée, développée dans [53], est plus rigoureuse du point de vue théorique, mais elle n'a pas encore été testée en formulation multidimensionelle.

dans notre approche?

- Comment modéliser les termes énergétiques, la pression-dilatation et la dissipation compressible et prendre en compte l'influence de la compressibilité sur les termes de redistribution entre les composantes de la tension turbulente?

On a observé des contradictions, à ce sujet, entre les diverses expériences. Par contre, les résultats des simulations numériques directes (DNS) de cisaillement homogène et de la couche de mélange en évolution témporelle apportent des conclusions cohérentes. Il semble que la dissipation compressible ainsi que la pression-dilatation soient non-nuls pour des niveaux de compressibilité élévés, mais qu'ils soient petits devant les termes solénoidaux [9, 87]. Les études sur le cisaillement homogène de Blaisdell *et al.* [8], de Sarkar [88, 9] et de Simone et Cambon [89] révèlent que l'anisotropie de la tension de Reynolds change avec le nombre de Mach turbulent. C'est une influence que l'on retrouve dans les mesures de la couche de mélange de Goebel et Dutton [73]: l'anisotropie des composantes normales augmente, tandis que celle de la contrainte diminue. Ces observations sont confirmées par la DNS d'une couche de mélange qui évolue temporellement (Vreman [87]). Il montre également que l'anisotropie du tenseur de dissipation ε_{ij} est affectée par la compressibilité et que, par conséquent, l'ensemble des termes redistributeurs va changer. De plus, en établissant une relation entre la croissance temporelle de la couche de mélange et l'intégrale de la production d'énergie cinétique turbulente, Vreman montre l'importance de la valeur de l'anisotropie dans le développement du champ moyen.

A l'heure actuelle, il manque une modélisation de ce phénomène d'applications plus générales: elle devrait donc être tensoriellement invariante et valable dans un écoulement complexe. Il faudrait pouvoir obtenir de bons résultats et pour une couche de mélange et pour une couche limite par exemple. Pour un écoulement compressible et cisaillé, le modèle pourrait être basé sur la fait qu'il existe un domaine d'influence limité par des ondes caractéristiques de pression et une diminution des fluctuations de pression, comme l'ont constaté différents auteurs [73, 87].

Bibliographie

[1] M. Uhlmann. Literature review on Reynolds–stress models with emphasis on the compressible case. Technical Report 94–1, Laboratoire de Mécanique de Fluides et d'Acoustique, Ecole Centrale de Lyon, France, April 1994.

[2] M. Uhlmann. Couplage des équations Navier–Sokes avec les équations de transport de la turbulence. Technical report, Laboratoire de Mécanique de Fluides et d'Acoustique, Ecole Centrale de Lyon, France, July 1994. 91 pages.

[3] T.H. Shih, J. Zhu, and J.L. Lumley. A realizable Reynolds stress algebraic equation model. Technical Report 105993, NASA TM, 1993.

[4] M. Uhlmann. Préparation d'un solveur des équations Navier–Stokes d'un fluide compressible pour l'introduction d'un modèle de turbulence du second ordre. Technical Report 95–1, Laboratoire de Mécanique de Fluides et d'Acoustique, Ecole Centrale de Lyon, France, Mai 1995. `http://cephee.mecaflu.ec-lyon.fr/MFN/publi/publi.html`.

[5] H. Schlichting. *Boundary-Layer Theory.* McGraw-Hill, 1951.

[6] A. Favre. Equations des gaz turbulents, partie I et II. *J. de Mécanique*, 4(3):362–421, 1965.

[7] C.G. Speziale, R. Abid, and N.N. Mansour. Evaluation of reynolds stress turbulence closures in compressible homogeneous shear flow. Technical Report 94-17, NASA ICASE, 1994.

[8] G.Ã. Blaisdell, N.Ñ. Mansour, and W.C̃. Reynolds. Compressibility effects on the growth and structure of homogeneous turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.*, 256:443–485, 1993.

[9] S. Sarkar. The stabilizing effect of compressibility in turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.*, 282:163–186, 1995.

[10] S. Sarkar and B. Lakshmanan. Application of a Reynolds stress turbulence model to the compressible shear layer. *AIAA Journal*, 29:743–749, 1991.

[11] J.H̃. Morrison. A compressible Navier–Stokes solver with two–equation and Reynolds stress turbulence closure models. Technical Report 4440, NASA CR, 1992.

[12] P.Y. Chou. On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation. *Quart. Appl. Mech.*, 3:38–54, 1945.

[13] J. Rotta. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. *Zeitschrift für Physik*, 129:547–572, 1951.

[14] B.Ẽ. Launder, G.J̃. Reece, and W. Rodi. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.*, 68:537–566, 1975.

[15] C. G. Speziale. Analytical methods for the development of Reynolds stress closures in turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 23:107–157, 1991.

[16] J. L. Lumley. Computational modelling of turbulent flows. *Advances in Applied Mechanics*, 18:123–176, 1978.

[17] U. Schumann. Realizability of Reynolds-stress turbulence models. *Phys. Fluids*, 20:721–724, 1977.

[18] C. G. Speziale, S. Sarkar, and T. B. Gatski. Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach. *J. Fluid Mech.*, 227:245–272, 1991.

[19] S. Fu, B.E. Launder, and D.P. Tselepidakis. Accommodating the effects of high strain rates in modelling the pressure-strain correlation. Technical Report TFD/87/5, UMIST Mechanical Engineering Dept., 1987.

[20] J. O. Hinze. *Turbulence.* McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering. McGraw-Hill Publishing Company, second edition, 1975.

[21] S. El Thary. Application of a Reynolds stress model to engine-like flow calculations. *ASME Journal of Fluids Eng.*, 107:444–451, 1985.

[22] W.P̃. Jones and B.Ẽ. Launder. The prediction of laminarization with a two–equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15:301–314, 1972.

[23] B.E. Launder and D.B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 3:269–289, 1974.

[24] S. Sarkar, G. Erlebacher, M.Ỹ. Hussaini, and H.Õ. Kreiss. The analysis and modelling of dilatational terms in compressible turbulence. *J. Fluid Mech.*, 227:473–493, 1991.

[25] S. Sarkar, G. Erlebacher, and M.Ỹ. Hussaini. Compressible homogeneous shear: Simulation and modelling. Technical Report ICASE 92–6, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, 1992.

[26] S. Sarkar, G. Erlebacher, and M.Y. Hussaini. Direct simulation of compressible turbulence in a shear flow. In T.B. Gatski, S. Sarkar, and C.G. Speziale, editors, *Studies in Turbulence*. Springer Verlag, 1992.

[27] H. Fujiwara and C. Arakawa. Direct numerical simulation and modeling of compressible isotropic turbulence. In *Ninth Symposium on Turbulent Shear Flows, Kyoto*, August 1993.

[28] O. Zeman. On the decay of compressible isotropic turbulence. *Phys. Fluids A*, 3:951–955, 1991.

[29] H.S. Zhang, R.M. So, C.G. Speziale, and Y.G. Lai. A near–wall two–equation model for compressible turbulent flows. Technical Report 92–0442, AIAA, 1992.

[30] G. N. Coleman and N. N. Mansour. Simulation and modeling of homogeneous compressible turbulence under isotropic mean compression. In *Eighth Symposium on Turbulent Shear Flows, Munich*, September 1991.

[31] D. Vandromme. *Contribution à la modélisation et á la prédiction d'écoulements turbulents á masse volumique variable.* Thèse d'etat, Universite de Lille, 1983.

[32] L. Shao. *Etude d'une couche de melange turbulente non cisaillee par simulation des grandes echelles.* Dissertation, Ecole Centrale Lyon, 1992.

[33] A. Yoshizawa. Statistical analysis of compressible turbulent shear flow with special emphasis on turbulence modelling. *Physical Review A*, 46:3292–3306, September 1992.

[34] B.Ã. Daly and F.H̃. Harlow. Transport equations in turbulence. *Phys. Fluids*, 13:2634–2649, 1970.

[35] G.L̃. Mellor and H.J̃. Herring. A survey of the mean field closure models. *AIAA Journal*, 11:590–599, 1973.

[36] K. Hanjalic and B.Ẽ. Launder. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. *J. Fluid Mech.*, 52:609–638, 1972.

[37] R. du Vachat. Realizability inequalities in turbulent flows. *Phys. Fluids*, 20(5):551–565, 1977.

[38] J.M. Hérard. Basic analysis of some second moment closures. Part I: incompressible isothermal turbulent flows. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 6(4):213–233, 1994.

[39] T.H. Shih, J. Zhu, and J.L. Lumley. Modeling of wall–bounded complex flows and free shear flows. Technical Report TM 106513, NASA ICOMP, 1994.

[40] C.G. Speziale, R. Abid, and P.A. Durbin. New results on the realizability of Reynolds stress turbulence closures. Technical Report 93-76, NASA ICASE, 1993.

[41] C.G. Speziale. Invariance of turbulent closure models. *Phys. Fluids*, 22(6):1033–1037, 1979.

[42] J.M. Hérard. Solveur de Riemann approché pour un système hyperbolique non conservatif issu de la turbulence compressible. Technical Report HE-41/95/009/A, EDF Chatou, 1995.

[43] T.H. Shih and A. Shabbir. Methods of ensuring realizability for non–realizable second order closures. Technical Report 106681, NASA TM, 1994.

[44] J.M. Hérard. Suitable algorithms to preserve the realisability of Reynolds stress closures. Technical Report HE-41/95/035/A, EDF Chatou, 1995.

[45] J.M. Hérard. Modèles au second ordre réalisables non dégénérés pour les écoulements turbulents incompressibles. Technical Report t. 322, Série II b, C. R. Acad. Sci. Paris, 1996.

[46] B. Stoufflet, J. Periaux, F. Fezoui, and A. Dervieux. Numerical simulation of 3D hypersonic Euler flows around space vehicles using adapted finite elements. Technical Report 87-0560, AIAA Paper, 1987.

[47] P. Rostand. *Sur une Methode de Volume Finis en Maillage non Structure pour le Calcul D'Ecoulements Visqueux Compressible.* These, L'Universite Paris VI, Mars 1989.

[48] D. Vandromme. Turbulence modelling for compressible flows and implementation in Navier–Stokes solvers. Lecture series, von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1991.

[49] J. M. Morisson. Flux difference split schemes for turbulent transport equations. Technical Report AIAA paper No. 90-5251, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1990.

[50] R. Friedrich. Compressible turbulence. In *Space Course, Munich*, Octobre 1993.

[51] P.L̃. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43, 1981.

[52] J.M. Herard. Solveur de Riemann approché pour un système hyperbolique non conservatif issu de la turbulence compressible. Technical report, Electricite de France, Chatou, 1995.

[53] M. Uhlmann and G. Brun. Solveur pour le système des équations hyperboliques non-conservatives issu d'un modèle de transport des tensions de Reynolds. Technical Report 95-2, Laboratoire de Mécanique de Fluides et d'Acoustique, Ecole Centrale de Lyon, France, Novembre 1995. `http://cephee.mecaflu.ec-lyon.fr/MFN/publi/publi.html`.

[54] B. Larrouturou. How to preserve the mass fractions positivity when computing compressible multi-component flows. *J.Comp.Phys.*, 95:59–84, 1991.

[55] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. v. a second-order sequel to Godunov's method. *J.Comp.Phys.*, 32:101–136, 1979.

[56] H. Steve. *Schemas Implicites Linéarises Décentrés pour la Résolution des Equations d'Euler en Plusieurs Dimensions.* These, L'Universite de Provence Aix-Marseille 1, Juillet 1988.

[57] L. Hallo. *Etude de schémas numériques pour la simulation des écoulements tridimensionnels turbulents compressibles réactifs.* PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1995.

[58] J.W. Deardorff. The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence. *J. Fluids Eng.*, pages 429–438, 1973.

[59] P.G. Huang and G.N. Coleman. Van Driest transformation and compressible wall–bounded flows. *AIAA Journal*, 32(10):2110–2113, 1994.

[60] R. M. C. So, H. S. Zhang, and C. G. Speziale. Near-wall modeling of the dissipation rate equation. *AIAA Journal*, 29:2069–2076, 1991.

[61] W. Rodi and N.Ñ. Mansour. Low Reynolds number k–ϵ modelling with the aid of direct simulation data. In *Proceedings of the summer program*, pages 85–106. Center for Turbulence Research, 1990.

[62] F.S. Lien and M.A. Leschziner. Assessment of turbulence transport models including non–linear RNG eddy viscosity formulation and second–moment closure for flow over a backward facing step. *Computers & Fluids*, 23(8):983–1004, 1994.

[63] P. Debaty. *Performances des modèles de turbulence au second ordre appliqués à des configurations axisymmétriques simulés par éléments finis.* PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, France, 1994.

[64] L. Cambier, W. Ghazzi, J. P. Veuillot, and H. Viviand. Une approche par domaines pour le calcul d'écoulements compressibles. In *5e Colloque Int. sur les méthodes de calcul scientifique et technique de l'INRIA, Versailles*, Décembre 1981.

[65] L. Lepenven, J.Ñ. Gence, and G. Comte-Bellot. On the approach to isotropy of homogeneous turbulence: Effect of the partition of kinetic energy among the velocity components. In *Frontiers in Fluid Mechanics*, 1986.

[66] S. Tavoularis and U. Karnik. Further experiments on the evolution of turbulent stresses and scales in uniformly sheared turbulence. *J.Fluid Mech.*, 204(457–478), 1989.

[67] F.H. Champagne, V.G. Harris, and S. Corrsin. Experiments on nearly homogeneous turbulent shear flow. *J.Fluid Mech.*, 41(81–139), 1970.

[68] C. G. Speziale and N. Mac Giolla Mhuiris. On the prediction of equilibrium states in homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 209:591–615, 1989.

[69] R. Abid and C. G.Speziale. Predicting equilibrium states with reynolds stress closures in channel flow and homogeneous shear flow. Technical Report 92-28, NASA ICASE, 1992.

[70] S. Tavoularis and S. Corrsin. Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow with a uniform mean temperature gradient. Part 1. *J.Fluid Mech.*, 104(311–347), 1981.

[71] J.H. Bell and R.D. Mehta. Development of a two stream mixing layer from tripped and untripped boundary layers. *AIAA Journal*, 28(12):2034–2042, 1990.

[72] D. Papamoschou and A. Roshko. The compressible turbulent shear layer: an experimental study. *J. Fluid Mech.*, 197:453–477, 1988.

[73] S.G. Goebel and J.C. Dutton. Experimental study of compressible turbulent mixing layers. *AIAA J.*, 29(4):538–546, 1991.

[74] M. Samimy and G.S. Elliott. Effects of compressibility on the characteristics of free shear layers. *AIAA J.*, 28(3):439–445, 1990.

[75] M. Uhlmann. Turbulence compressible dans le cas du cisaillement homogène. Technical report, Laboratoire de Mécanique de Fluides et d'Acoustique, Ecole Centrale de Lyon, France, Février 1996.

[76] G.S. Settles and L.J. Dodson. Hypersonic turbulent boundary-layer and free shear database. Technical Report CR 177610, NASA, 1993.

[77] M. Uhlmann. Passage d'un tourbillon par la frontière. Technical report, Laboratoire de Mécanique de Fluides et d'Acoustique, Ecole Centrale de Lyon, France, Mars 1996.

[78] P.S. Klebanoff. Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. Technical Report 1247, NACA, 1954.

[79] R.A. Antonia, D.K. Bisset, and L.W. Browne. Effect of Reynolds number on the topology of the organized motion in a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 213:267–286, 1990.

[80] M.G̃ad el Hak and P.R. Bandyopadyay. Reynolds number effects in wall–bounded turbulent flows. *Appl. Mech. Rev.*, 47(8):307–364, 1994.

[81] J. Andreopoulos, F. Durst, Z. Zaric, and J. Jovanovic. Influence of Reynolds number on characteristics of turbulent wall boundary layers. *Experiments in Fluids*, 2:7–16, 1984.

[82] H.H. Fernholz and P.J. Finley. A critical compilation of compressible turbulent boundary layer data. Technical Report 223, AGARDograph, 1977.

[83] I. Yudiana. Quelques modélisations de turbulence compressible de proche paroi 'aide de modèles eux équations. Application au cas d'une couche limite turbulente compressible. Technical report, LMFA Ecole Centrale Lyon, 1995.

[84] H.H. Fernholz and P.J. Finley. A further compilation of compressible turbulent boundary layer data with a survey of turbulence data. Technical Report 263, AGARDograph, 1981.

[85] M. Acharya, C.C. Horstman, and M.I. Kussoy. Reynolds number effects on the turbulence field in compressible boundary layers. *AIAA J.*, 17(4):380–386, 1979.

[86] M. Uhlmann. Calcul des écoulements du type tube à choc avec le système des équations issue d'un modèle du second ordre. Technical report, Laboratoire de Mécanique de Fluides et d'Acoustique, Ecole Centrale de Lyon, France, Mai 1996.

[87] A.W. Vreman. *Direct and large-eddy simulation of the compressible turbulent mixing layer.* PhD thesis, University of Twente, 1995.

[88] S. Sarkar. Turbulence modeling and simulation of high-speed flows. In *Space Course, Munich*, Octobre 1993.

[89] A. Simone and C. Cambon. Rapid distortion and direct simulation approach to compressibility in turbulent shear flow. In *Turbulent shear flows X*. Pennsylvania State University, 1995.

[90] S. K. Lele. A consistency condition for Reynolds stress closures. *Phys. Fluids*, 28:64–69, 1985.

Figures

Retour à l'isotropie

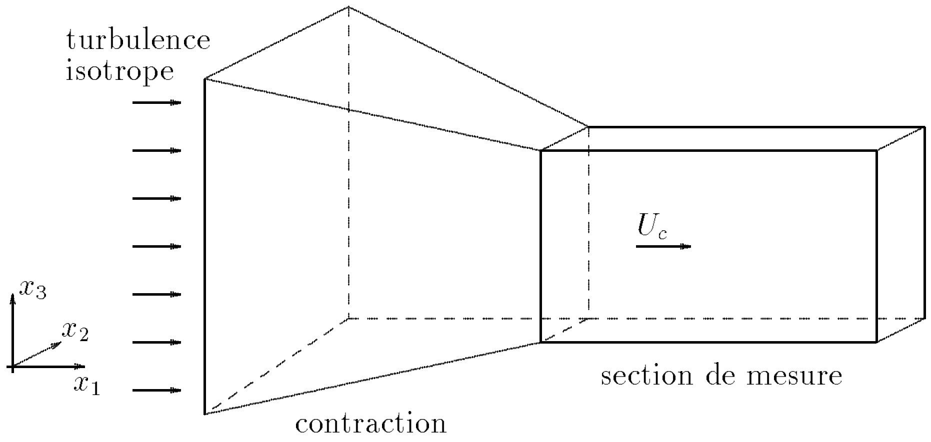


Figure 7.1: Schéma de l'expérience de Le Penven et al. [65]

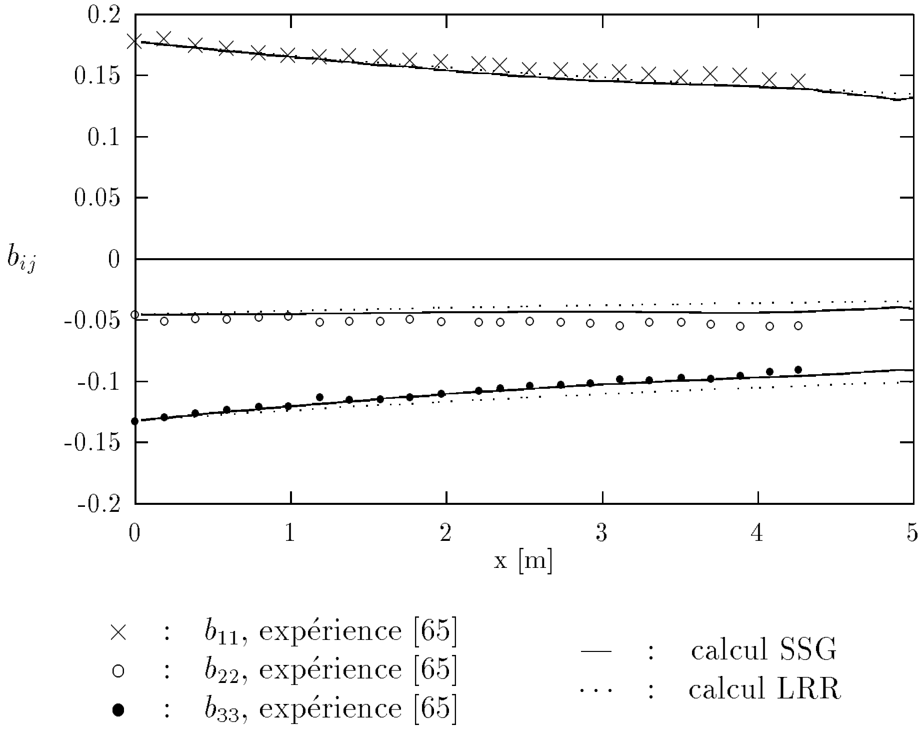


Figure 7.2: Variation axiale des déviateurs, cas 1 ($III > 0$)

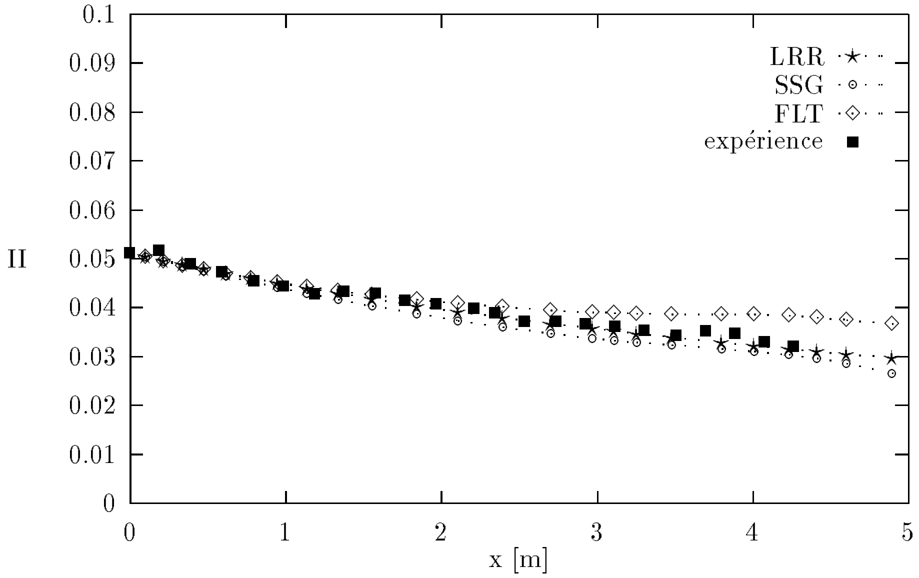


Figure 7.3: Variation axiale de l'invariante II, cas 1 ($III > 0$)

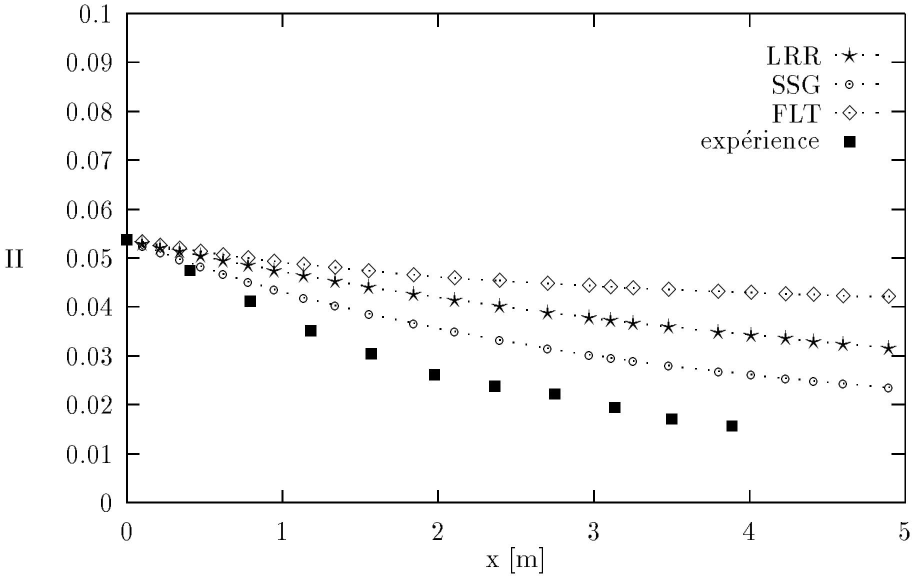


Figure 7.4: Variation axiale de l'invariante II, cas 2 ($III < 0$)

Cisaillement homogène

	symbole	b_{11}	b_{21}	b_{22}	b_{33}	$S\,k/\varepsilon$	$\mathcal{P}/\varepsilon$
expérience	■	0.2167	-0.1650	-0.1333	-0.0833	4.2087	1.3889
LRR	⋆	0.1565	-0.1878	-0.1223	-0.0342	5.5671	2.0907
SSG	○	0.2216	-0.1640	-0.1485	-0.0730	6.3685	2.0894
FLT	◇	0.2126	-0.1442	-0.1474	-0.0652	7.1933	2.0748

Tableau 7.1: Cisaillement homogène à l'équilibre, cas A [66]

	symbole	b_{11}	b_{21}	b_{22}	b_{33}	$S\,k/\varepsilon$	$\mathcal{P}/\varepsilon$
expérience	■	0.2367	-0.1550	-0.1433	-0.0933	3.1017	0.9615
LRR	⋆	0.1562	-0.1878	-0.1222	-0.0340	5.5347	2.0788
SSG	○	0.2212	-0.1641	-0.1482	-0.0730	6.2778	2.0600
FLT	◇	0.2073	-0.1471	-0.1439	-0.0635	6.8022	2.0009

Tableau 7.2: Cisaillement homogène à l'équilibre, cas N [66]

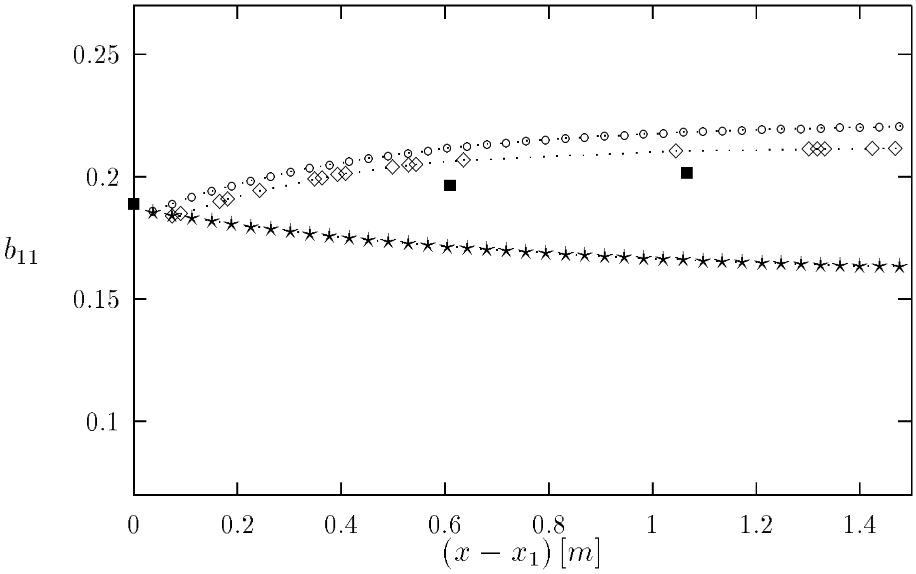


Figure 7.5: Variation axiale de l'anisotropie b_{11}, cas TC [70], symbole: voir tableau 7.1

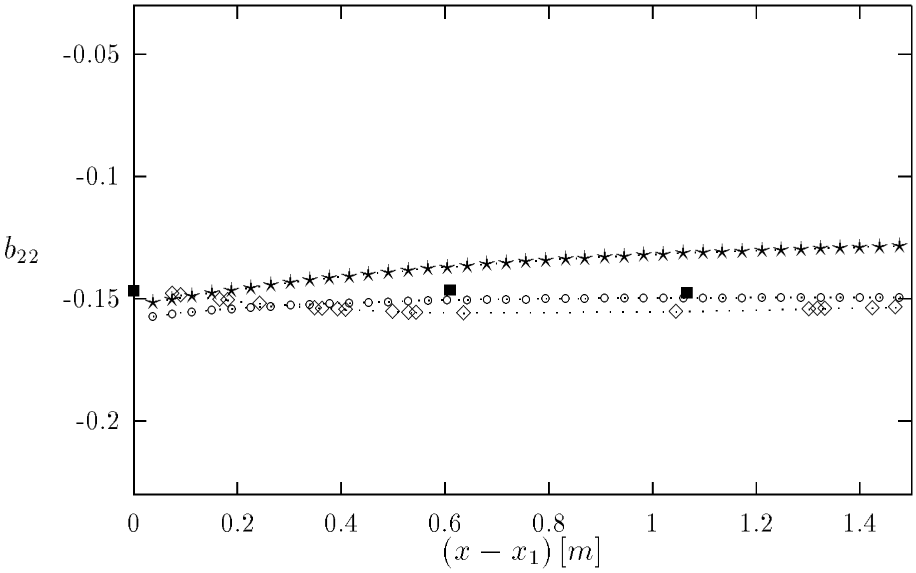


Figure 7.6: Variation axiale de l'anisotropie b_{22}, cas TC [70], symbole: voir tableau 7.1

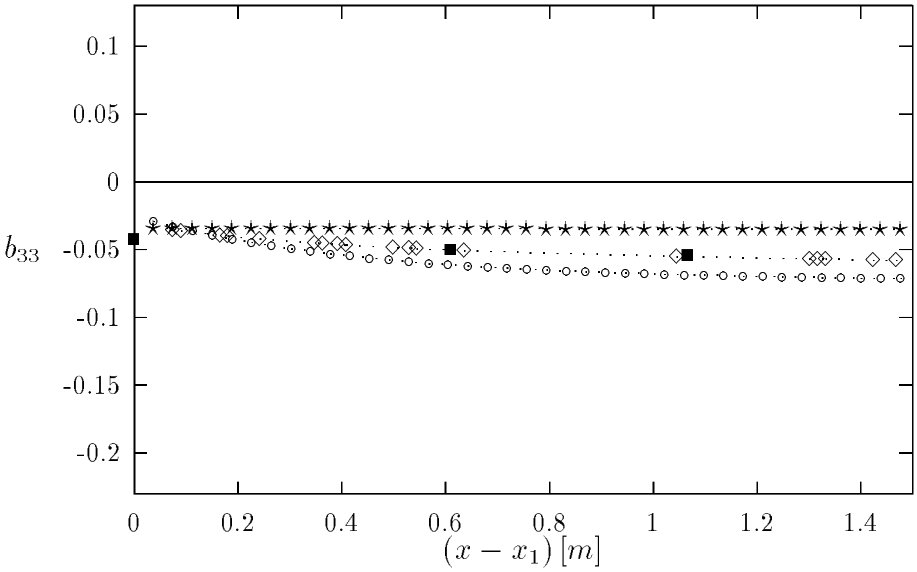


Figure 7.7: Variation axiale de l'anisotropie b_{33}, cas TC [70], symbole: voir tableau 7.1

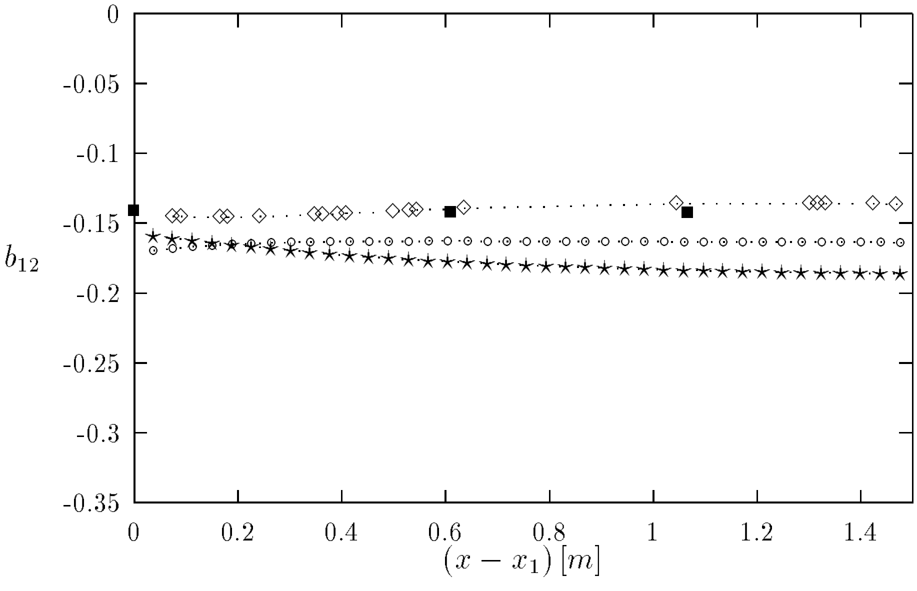


Figure 7.8: Variation axiale de l'anisotropie b_{12}, cas TC [70], symbole: voir tableau 7.1

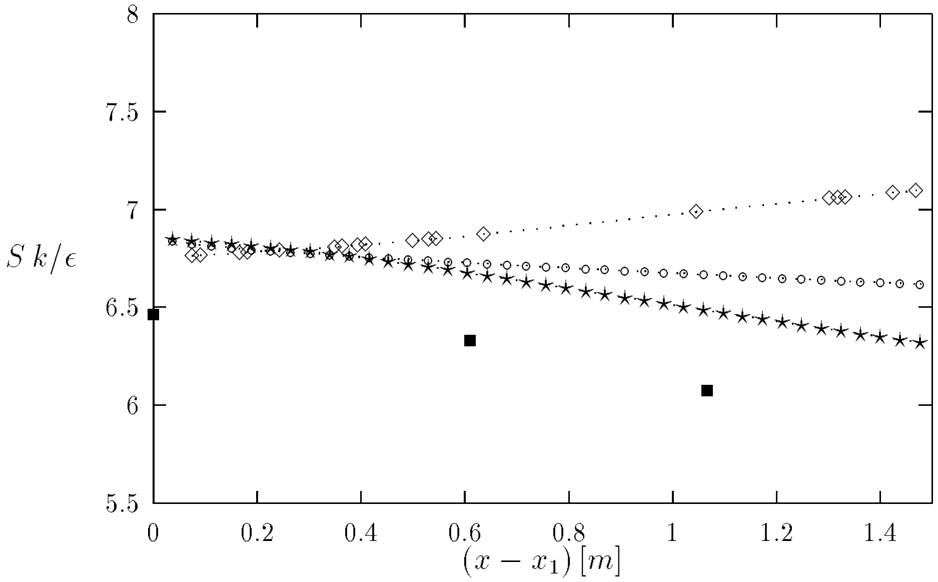


Figure 7.9: Variation axiale du paramètre Sk/ε, cas TC [70], symbole: voir tableau 7.1

Couche de mélange incompressible

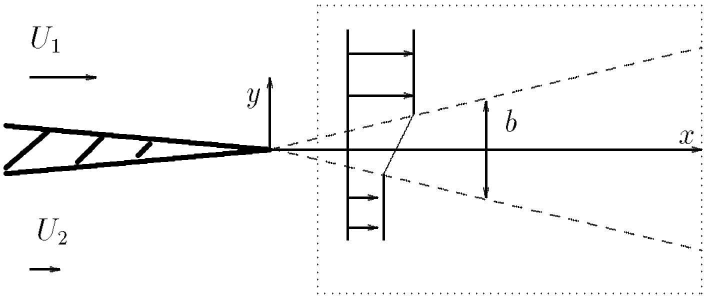


Figure 7.10: Schéma d'une couche de mélange

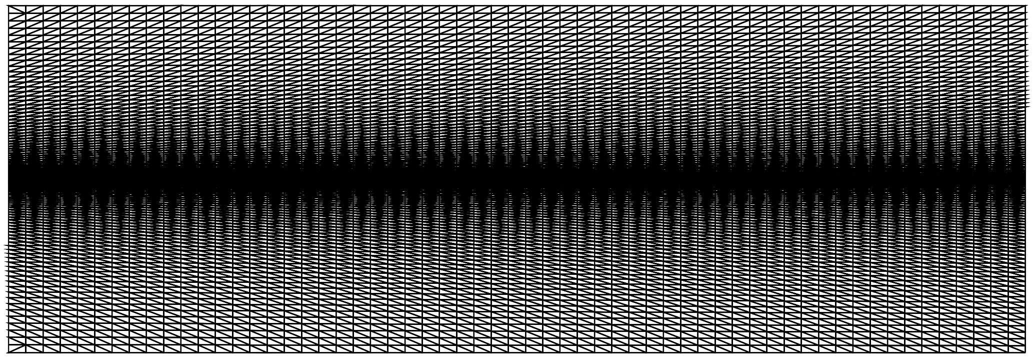


Figure 7.11: Maillage, couche de mélange incompressible

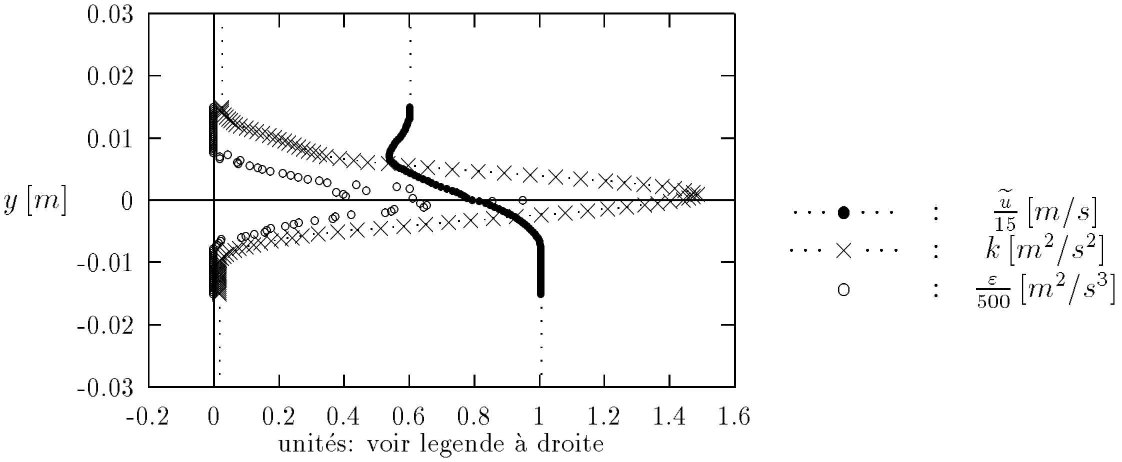


Figure 7.12: Conditions limites à l'entrée, couche de mélange incompressible

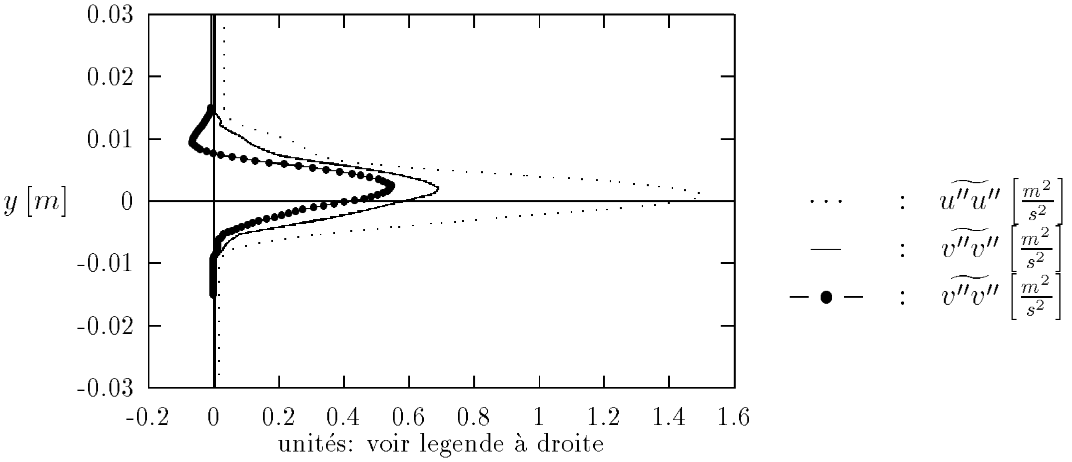


Figure 7.13: Conditions limites à l'entrée, couche de mélange incompressible

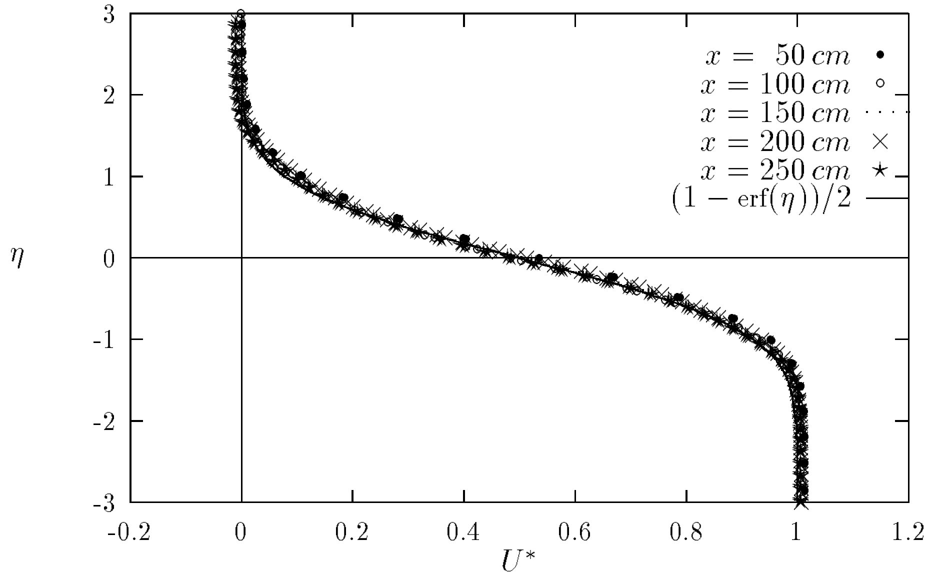


Figure 7.14: Similitude des profils de vitesse axiale normalisée, calcul SSG

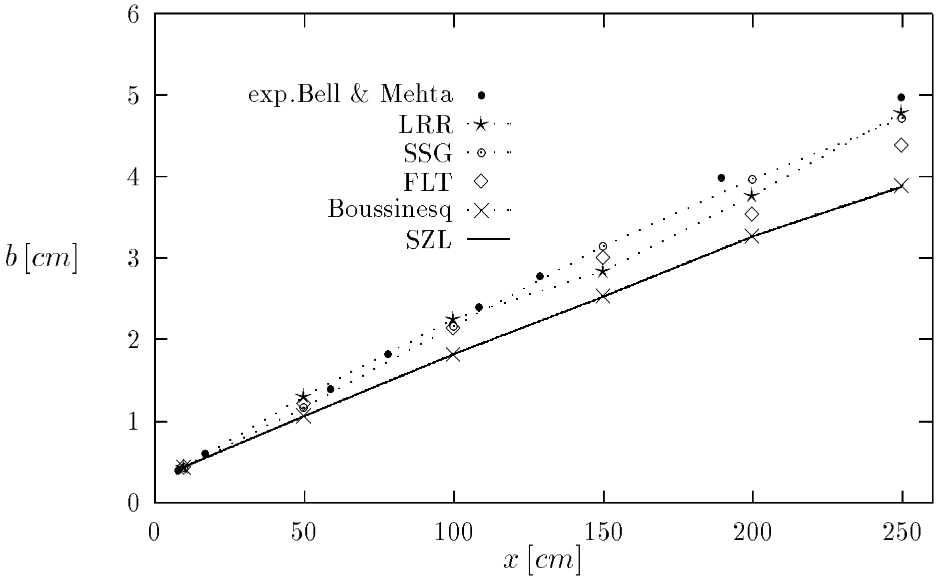


Figure 7.15: Evolution axiale de l'epaisseur de la couche de mélange

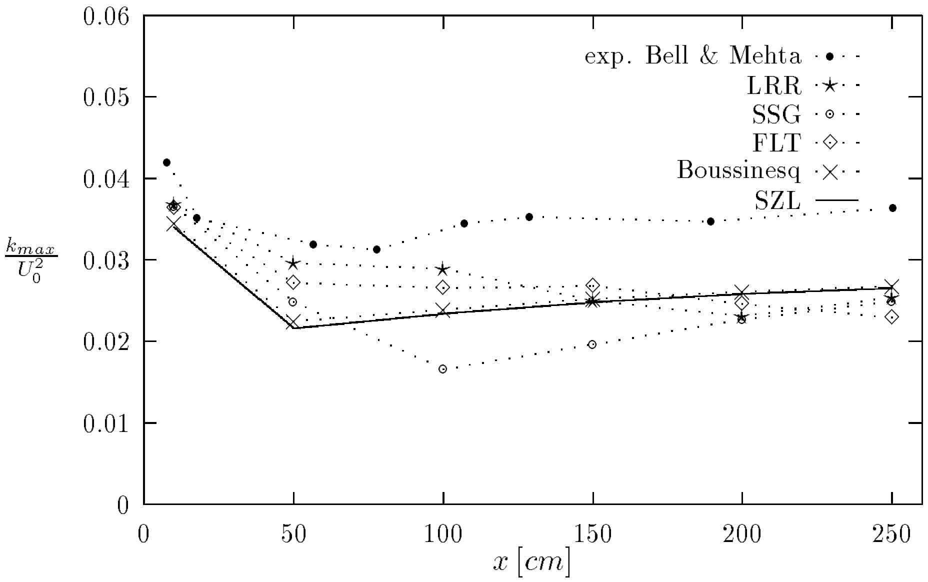


Figure 7.16: Evolution de la valeur maximale de l'énergie cinétique turbulente

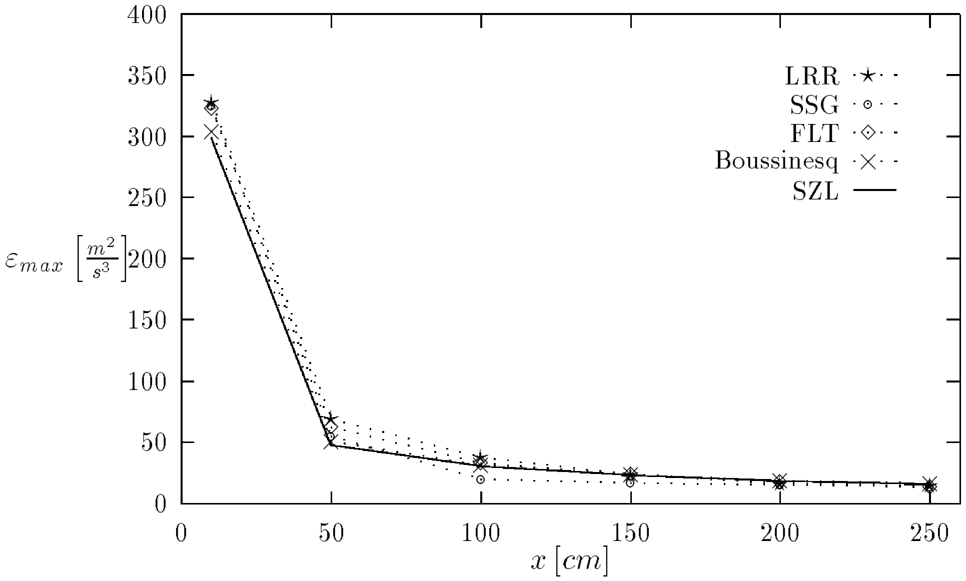


Figure 7.17: Evolution de la valeur maximale du taux de dissipation

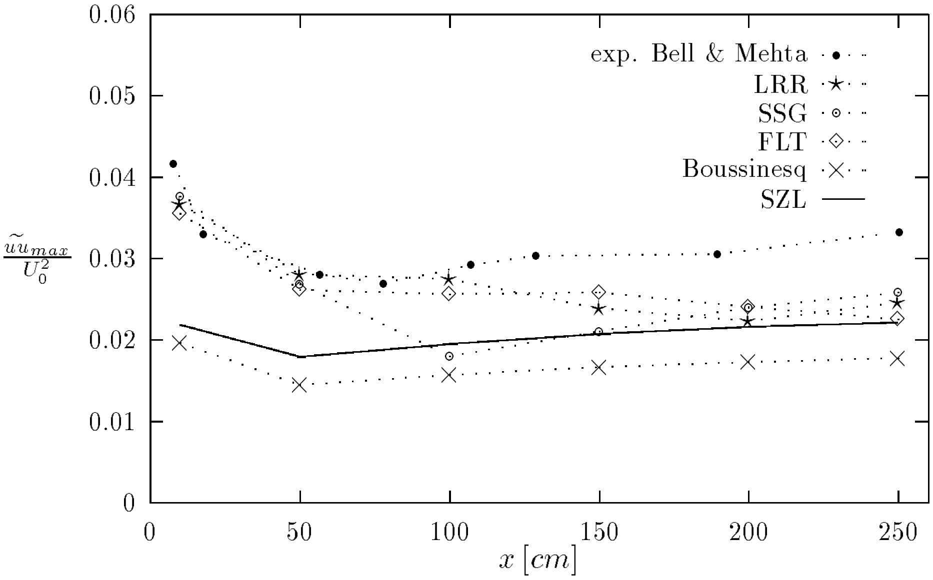


Figure 7.18: Evolution de la valeur maximale de la tension normale turbulente

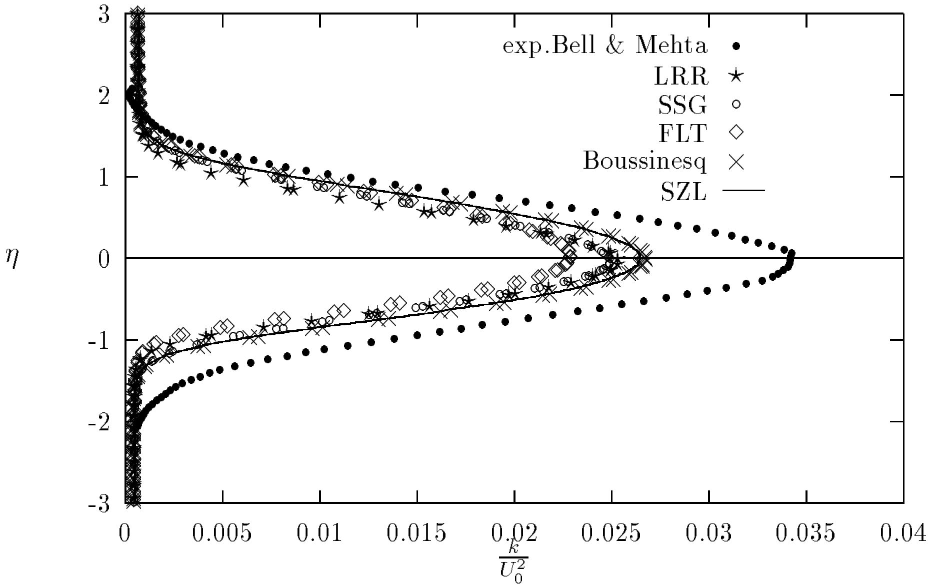


Figure 7.19: Profils asymptotiques de l'énergie cinétique turbulente, $x = 250\,cm$

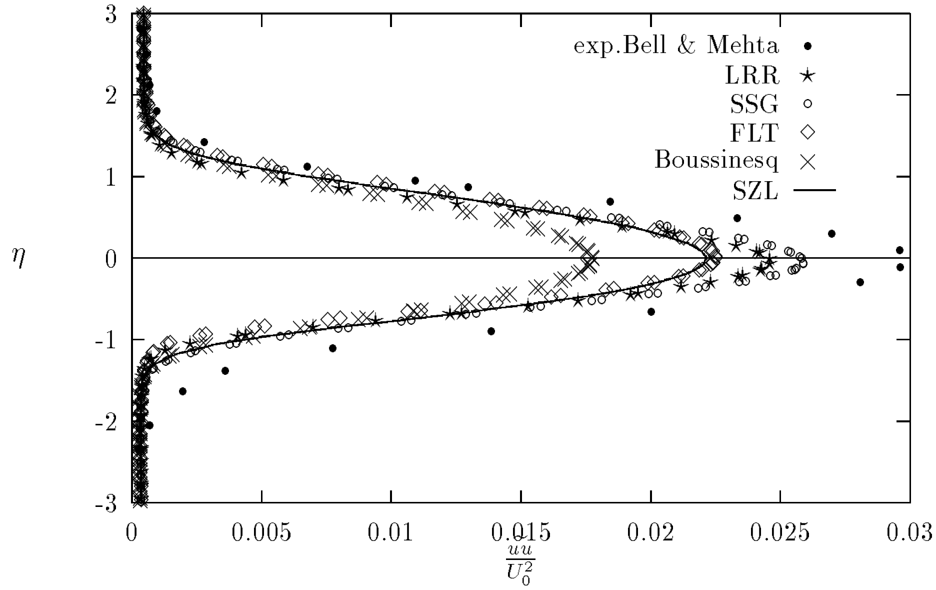


Figure 7.20: Profils asymptotiques de la tension normale $\widetilde{uu}$, $x = 250\,cm$

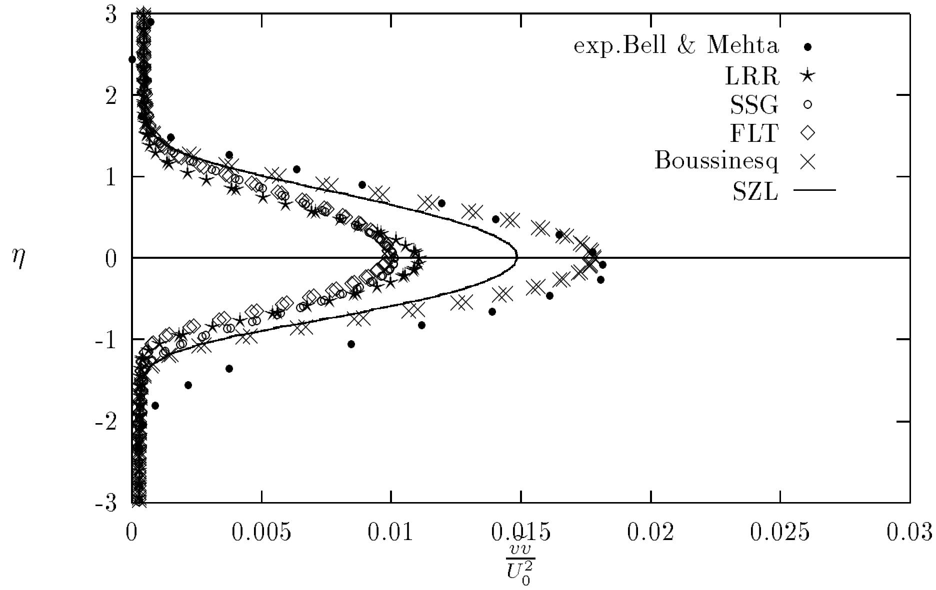


Figure 7.21: Profils asymptotiques de la tension normale $\widetilde{vv}$, $x = 250\,cm$

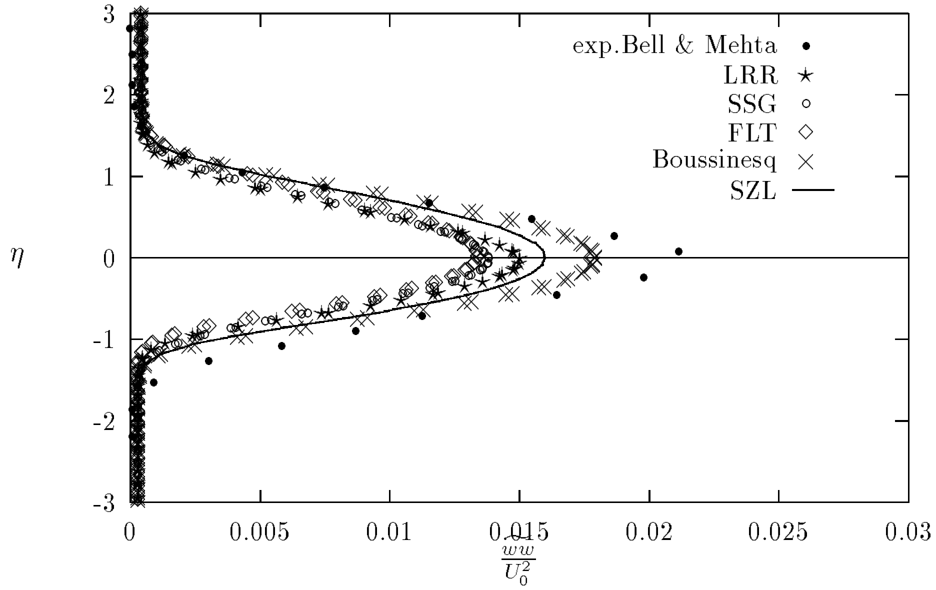


Figure 7.22: Profils asymptotiques de la tension normale $\widetilde{ww}$, $x = 250\,cm$

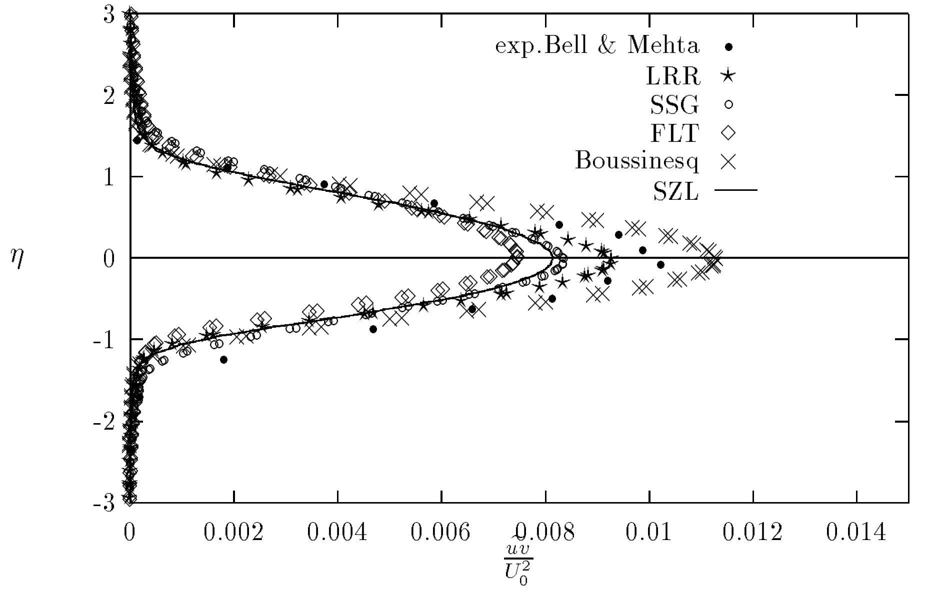
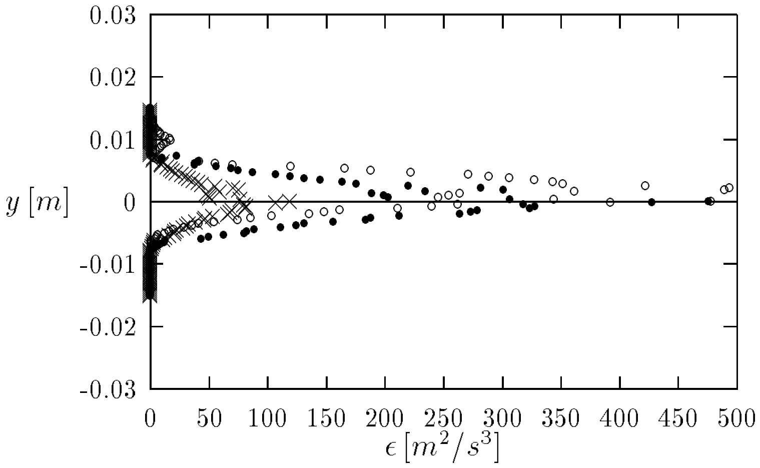


Figure 7.23: Profils asymptotiques de la tension tangentielle, $x = 250\,cm$



● Boussinesq, equ.(5.5) ○ equilibre, equ.(5.8) × reduit, equ.(5.9)

Figure 7.24: Profils d'entrée par différents hypothèses

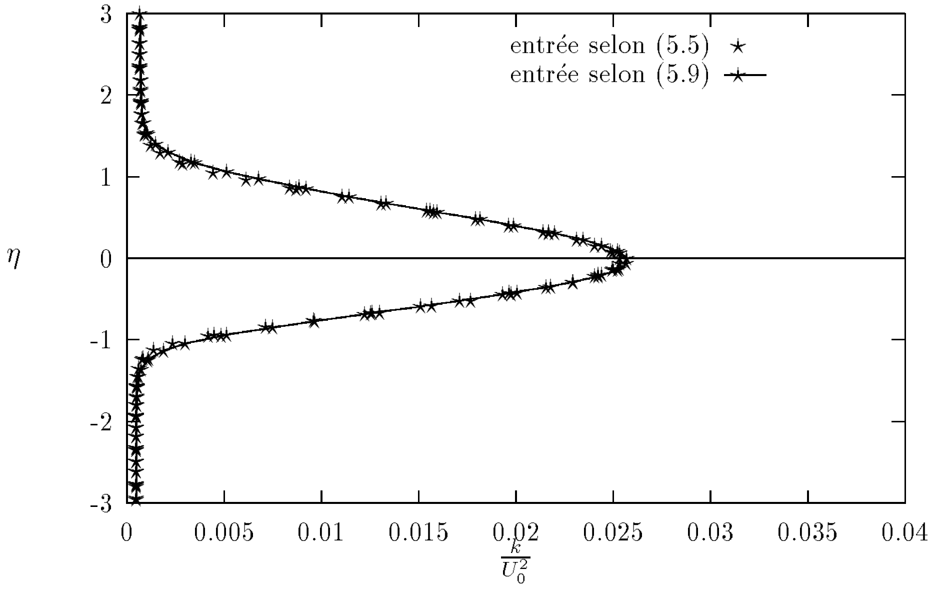


Figure 7.25: Profils asymptotiques de l'énergie cinétique turbulente selon condition d'entrée pour la dissipation, calcul LRR

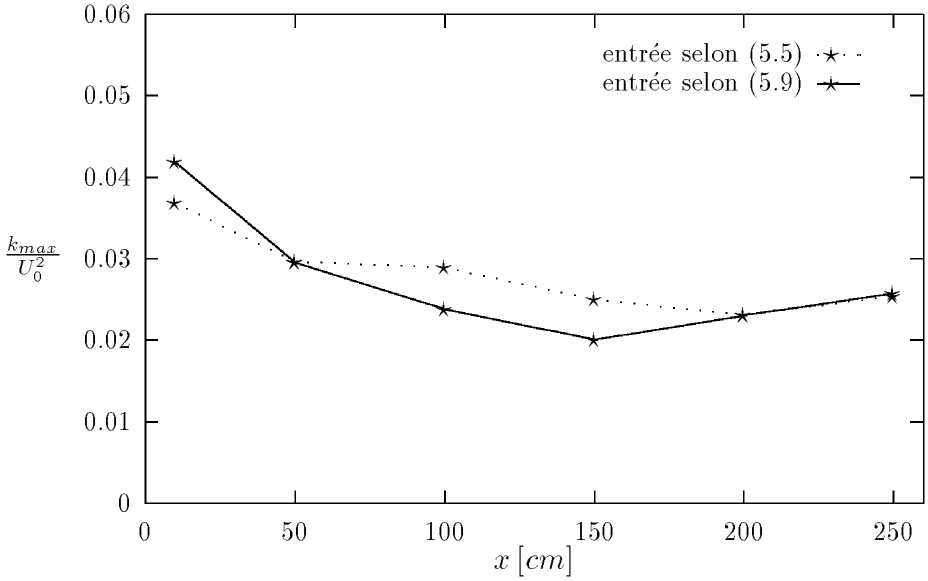


Figure 7.26: Evolution de l'énergie cinétique turbulente selon condition d'entrée pour la dissipation, clacul LRR

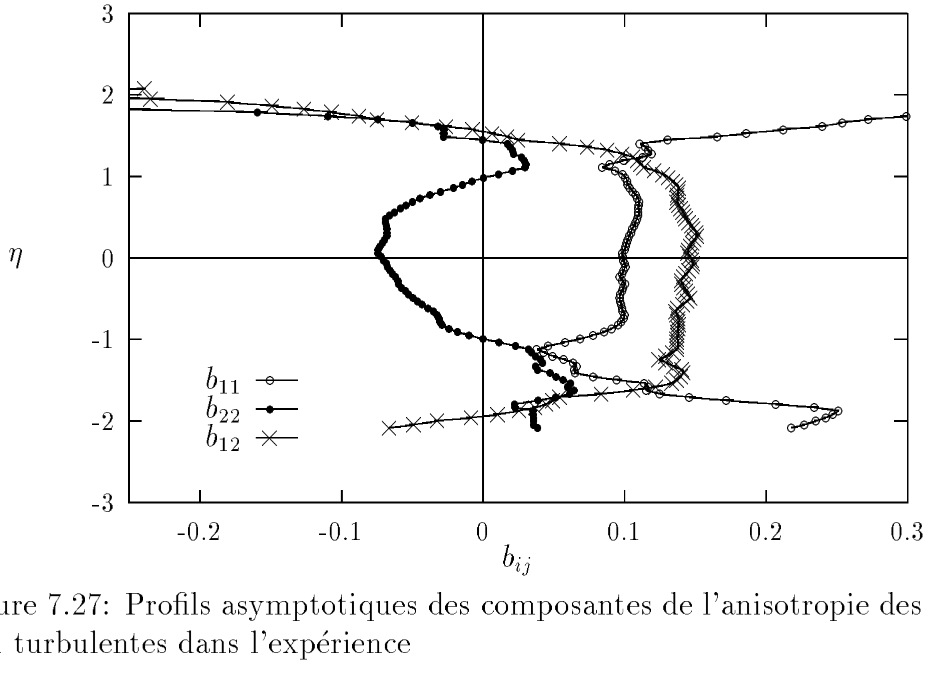


Figure 7.27: Profils asymptotiques des composantes de l'anisotropie des tension turbulentes dans l'expérience

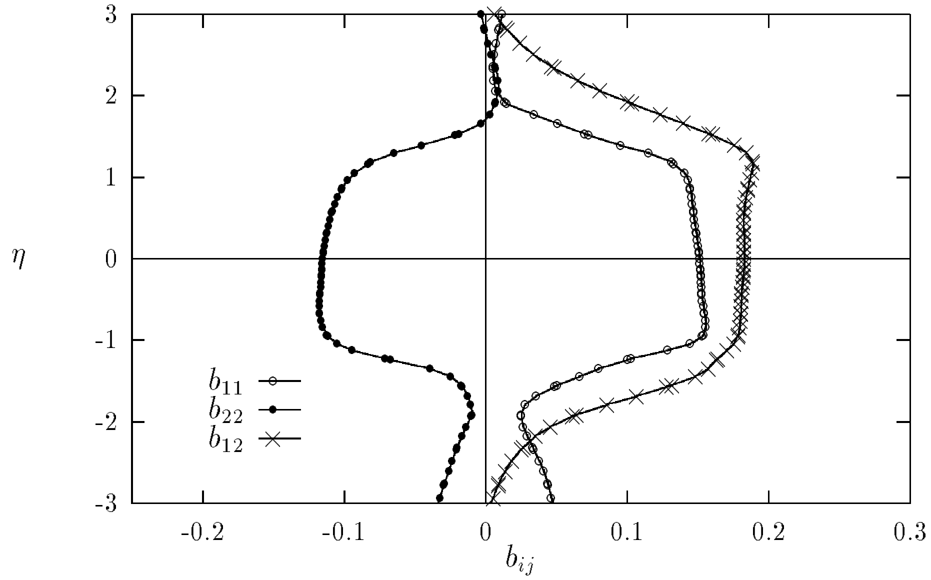


Figure 7.28: Profils asymptotiques des composantes de l'anisotropie des tension turbulentes, calcul LRR

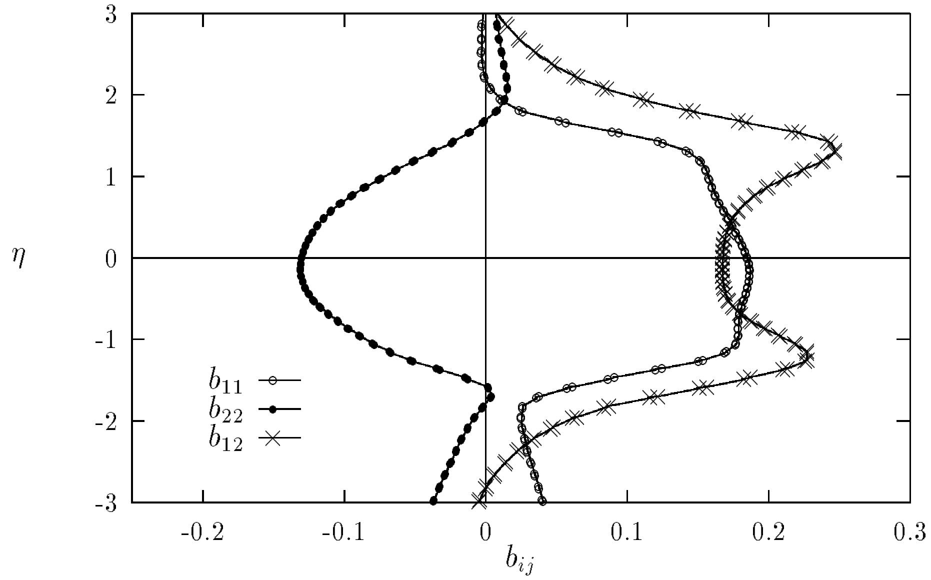


Figure 7.29: Profils asymptotiques des composantes de l'anisotropie des tension turbulentes, calcul SSG

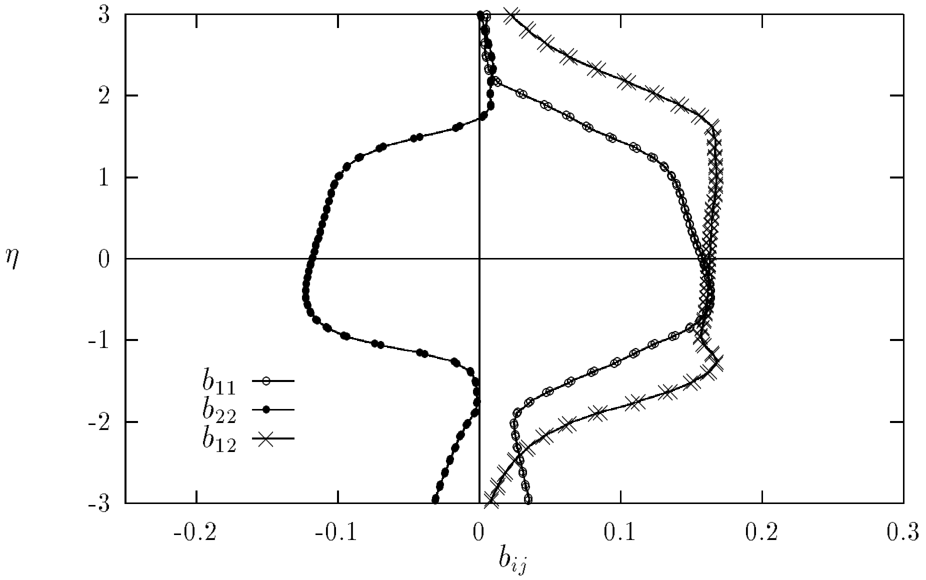


Figure 7.30: Profils asymptotiques des composantes de l'anisotropie des tension turbulentes, calcul FLT

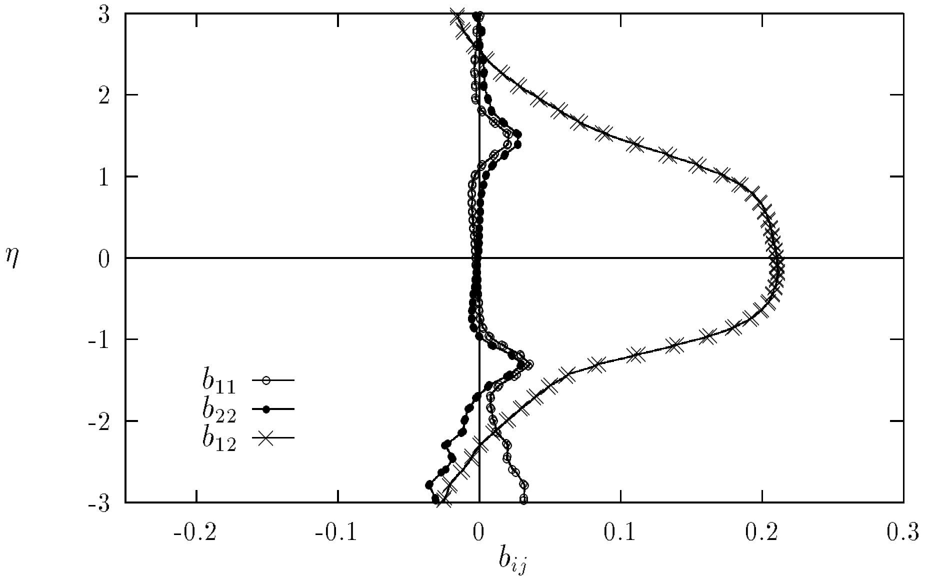


Figure 7.31: Profils asymptotiques des composantes de l'anisotropie des tension turbulentes, calcul Boussinesq

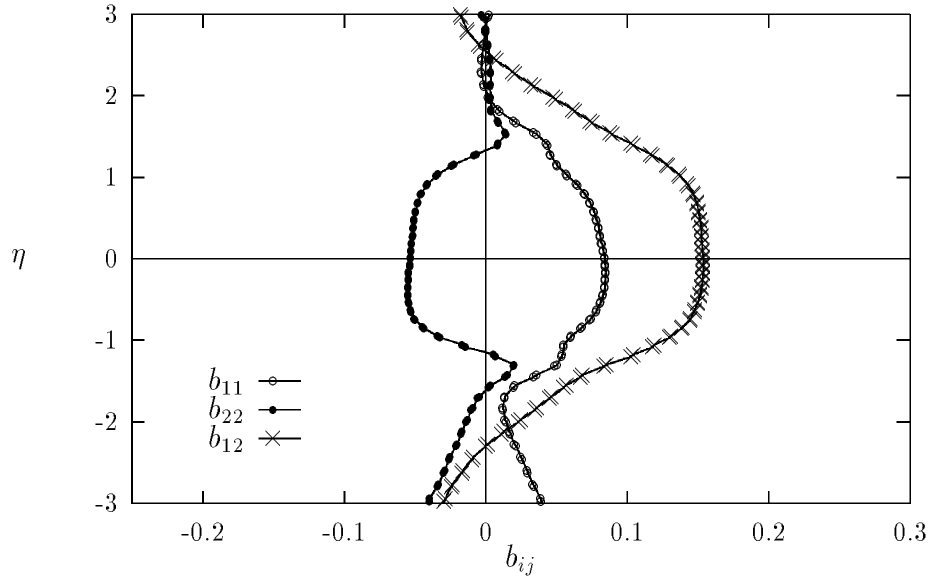
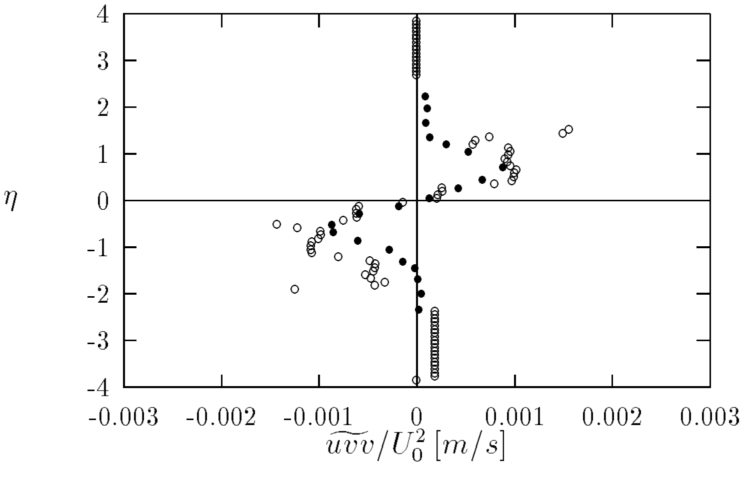


Figure 7.32: Profils asymptotiques des composantes de l'anisotropie des tension turbulentes, calcul SZL



● expérience [71], ○ calcul avec modèle isotrope

Figure 7.33: Evaluation de la diffusion turbulente

Couche de mélange compressible

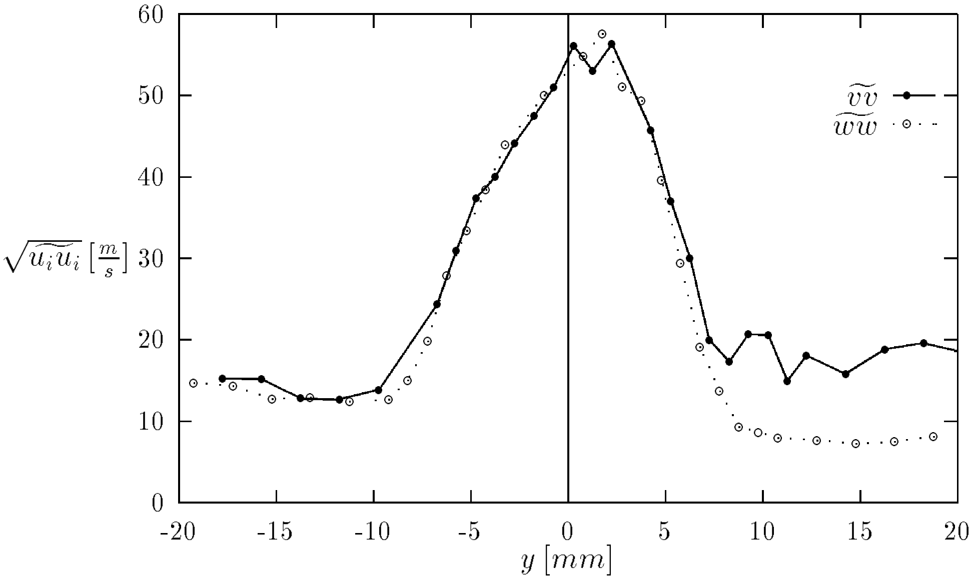


Figure 7.34: Comparaison des tensions transversales, cas 6, $x = 170mm$, expérience de Goebel *et al.* [76]

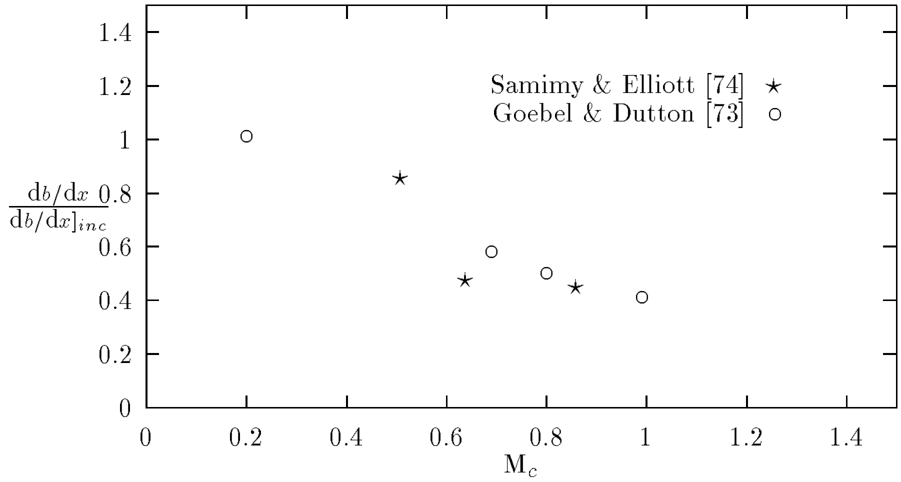


Figure 7.35: Croissance spatiale de couche de mélange normalisée par la valeur donnée par (5.20) en fonction du nombre de Mach convectif

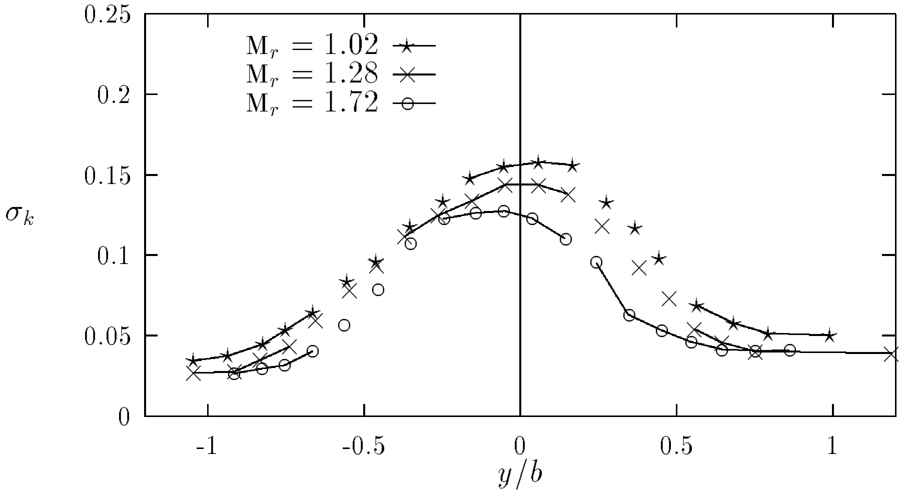


Figure 7.36: Energie cinétique turbulente normalisée par l'écart de vitesse moyenne; expérience de Samimy et Elliott [74]

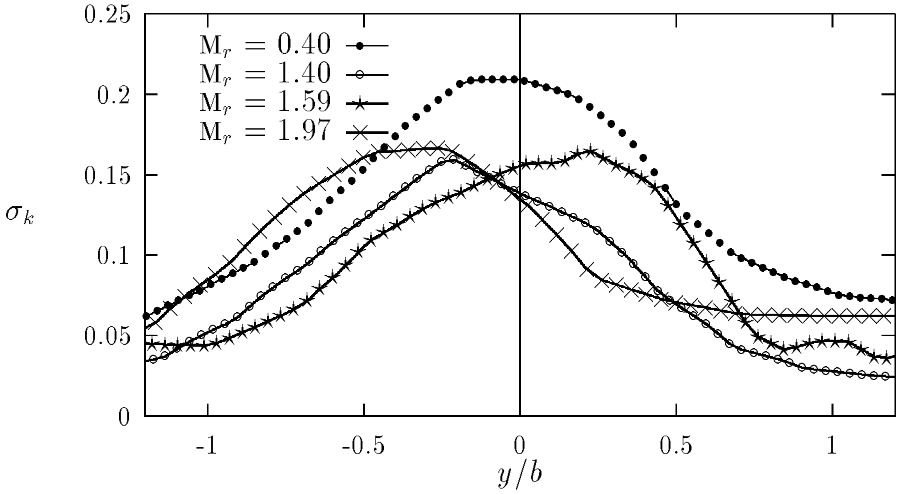


Figure 7.37: Energie cinétique turbulente normalisée par l'écart de vitesse moyenne; expérience de Goebel et Dutton [73]

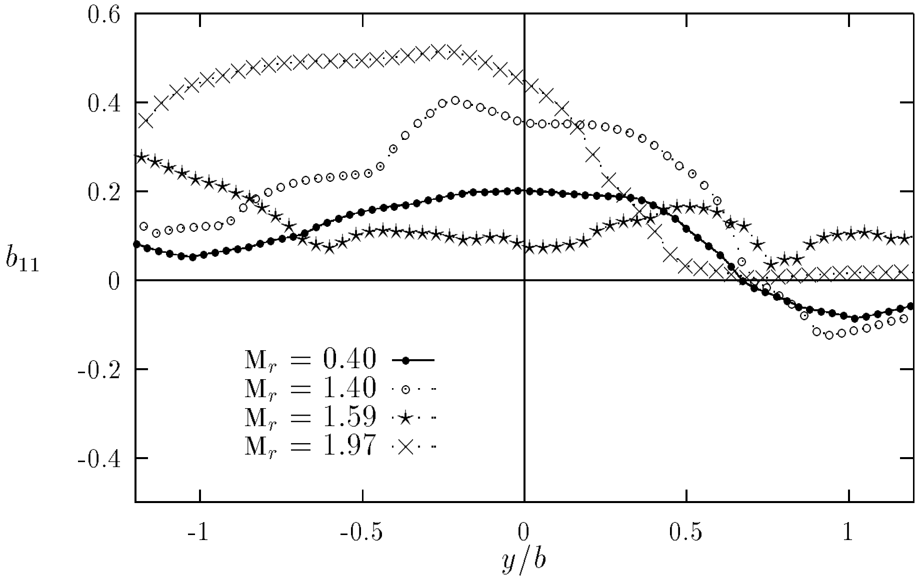


Figure 7.38: Composante axiale du tenseur d'anisotropie; expérience de Goebel et Dutton [73]

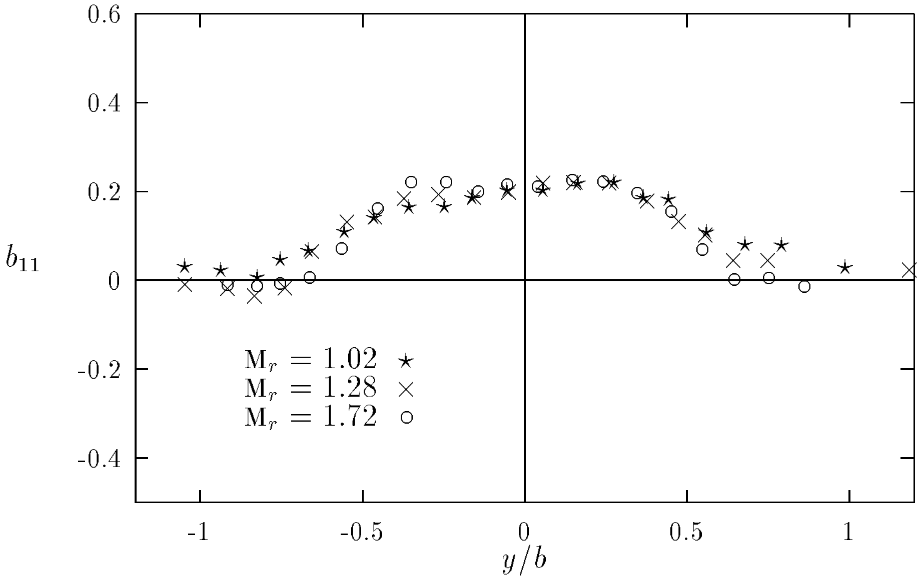


Figure 7.39: Composante axiale du tenseur d'anisotropie; expérience de Samimy et Elliott [74]

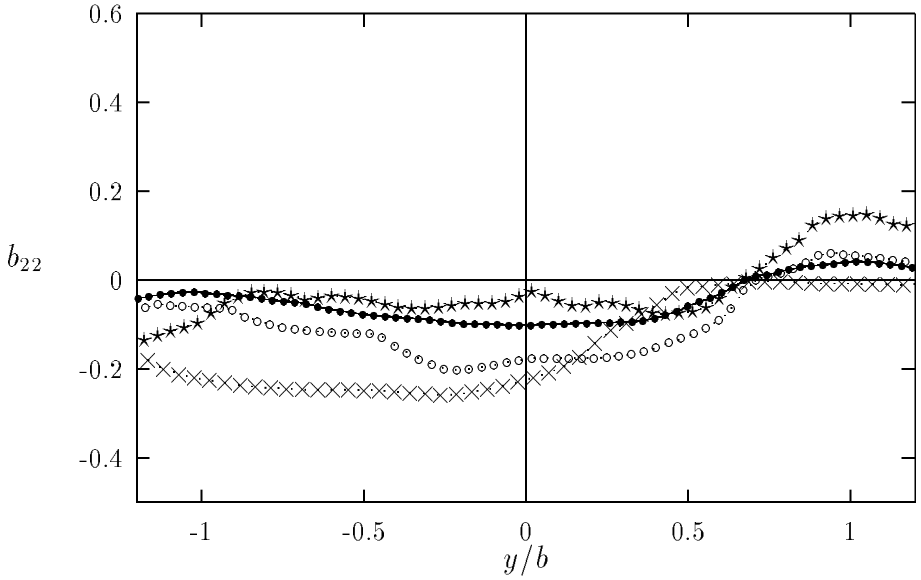


Figure 7.40: Composante transversale du tenseur d'anisotropie; expérience de Goebel et Dutton [73]

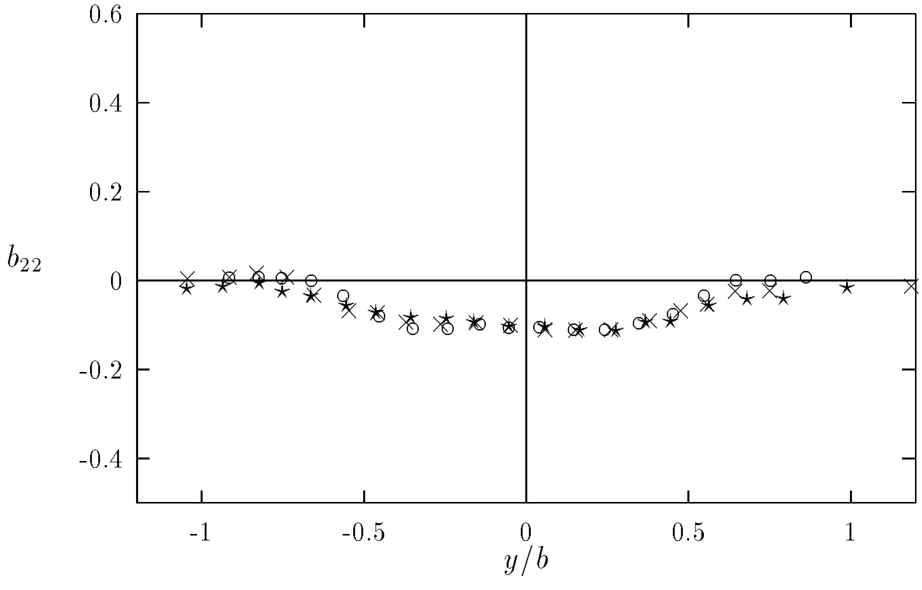


Figure 7.41: Composante transversale du tenseur d'anisotropie; expérience de Samimy et Elliott [74]

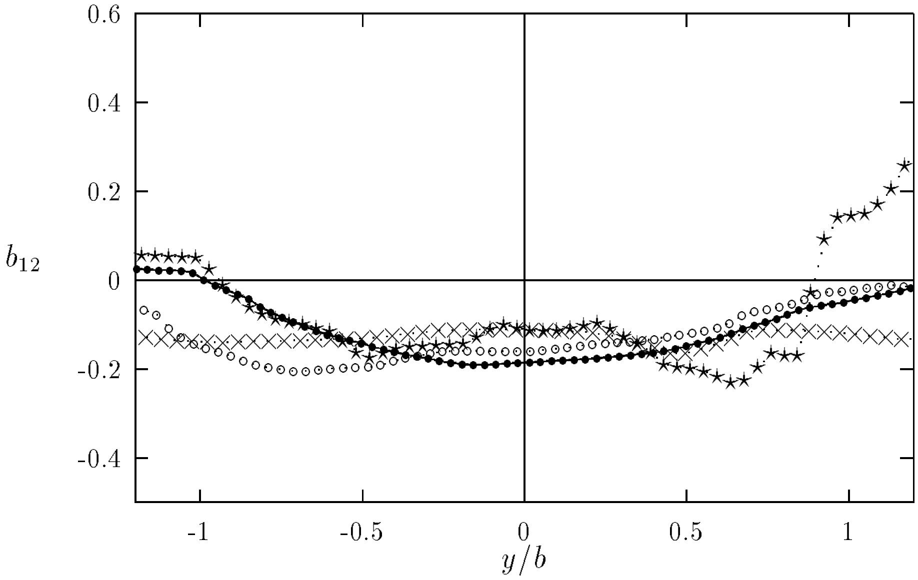


Figure 7.42: Composante tangentielle du tenseur d'anisotropie; expérience de Goebel et Dutton [73]

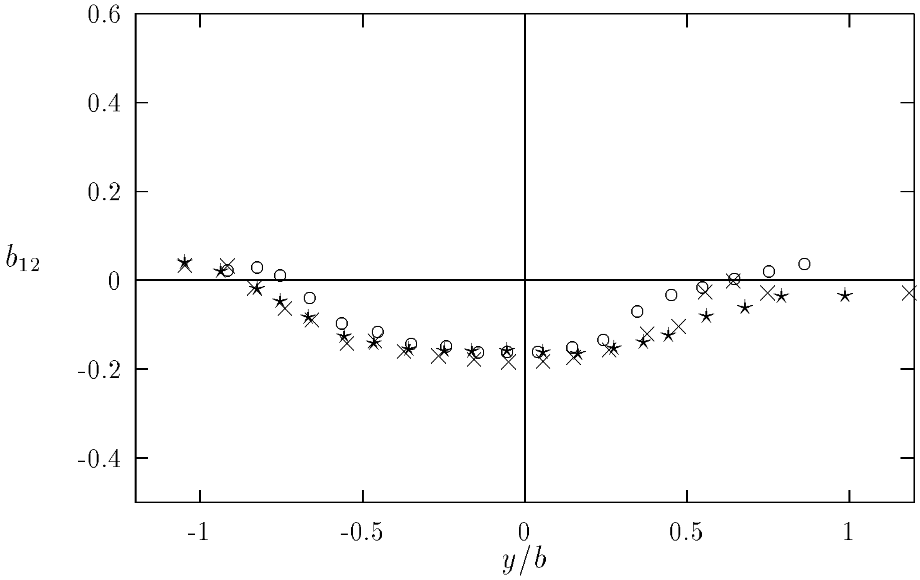


Figure 7.43: Composante tangentielle du tenseur d'anisotropie; expérience de Samimy et Elliott [74]

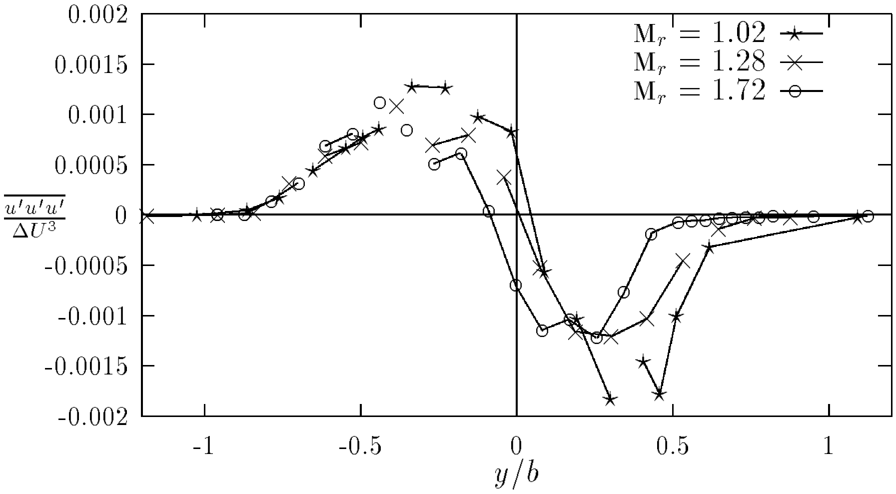


Figure 7.44: Corrélation triple $\overline{uuu}$ normalisée; expérience de Samimy et Elliott [74]

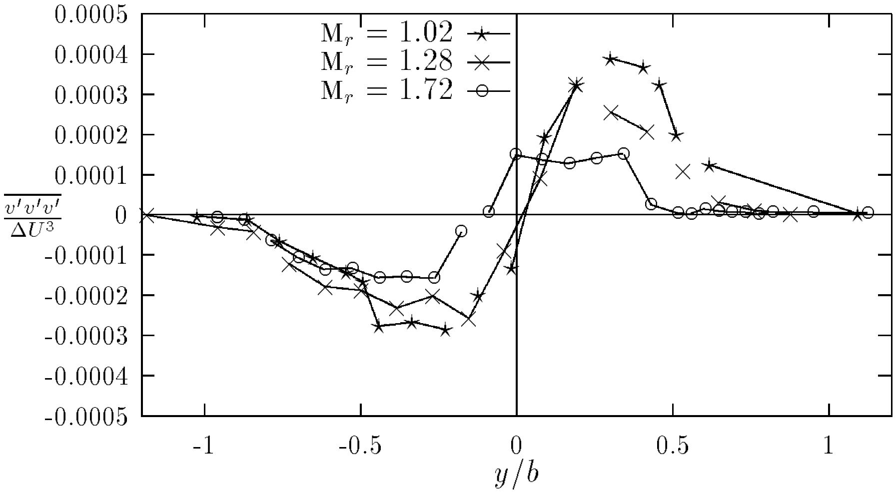


Figure 7.45: Corrélation triple $\overline{vvv}$ normalisée; expérience de Samimy et Elliott [74]

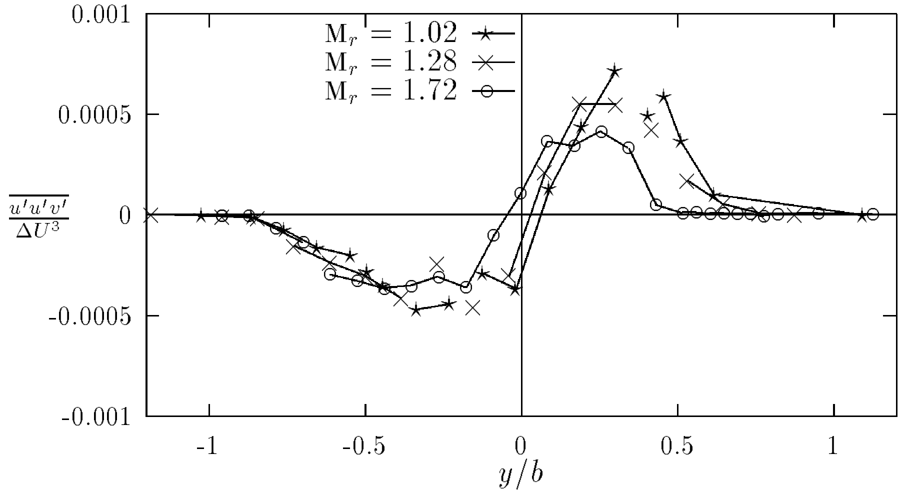


Figure 7.46: Corrélation triple $\overline{uuv}$ normalisée; expérience de Samimy et Elliott [74]

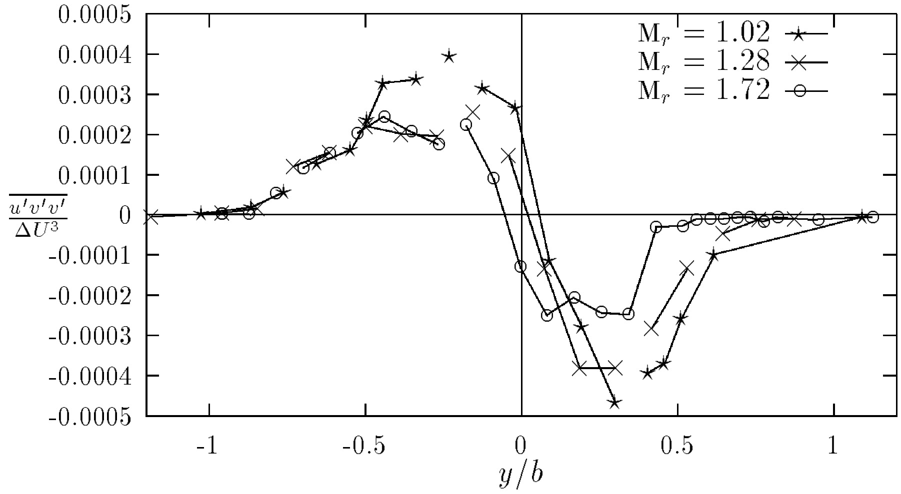


Figure 7.47: Corrélation triple $\overline{uvv}$ normalisée; expérience de Samimy et Elliott [74]

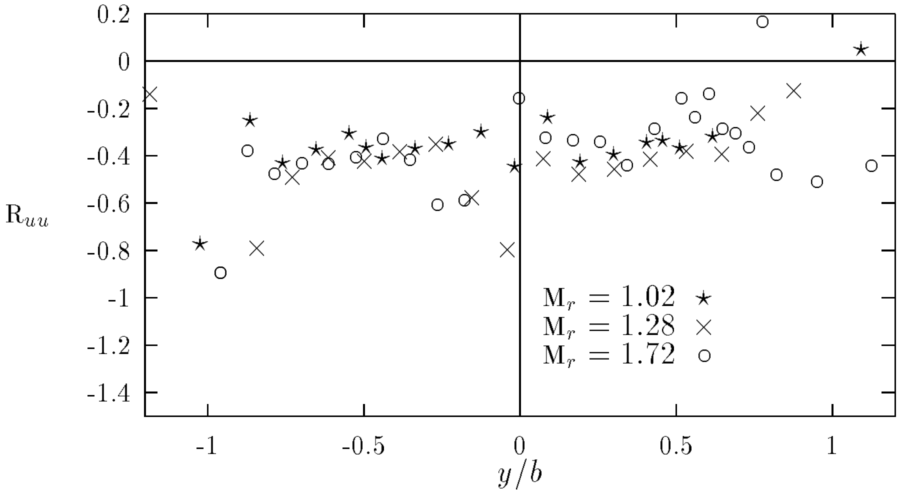


Figure 7.48: Rapport du transport de $\overline{uu}$ dans les directions x et y; expérience de Samimy et Elliott [74]

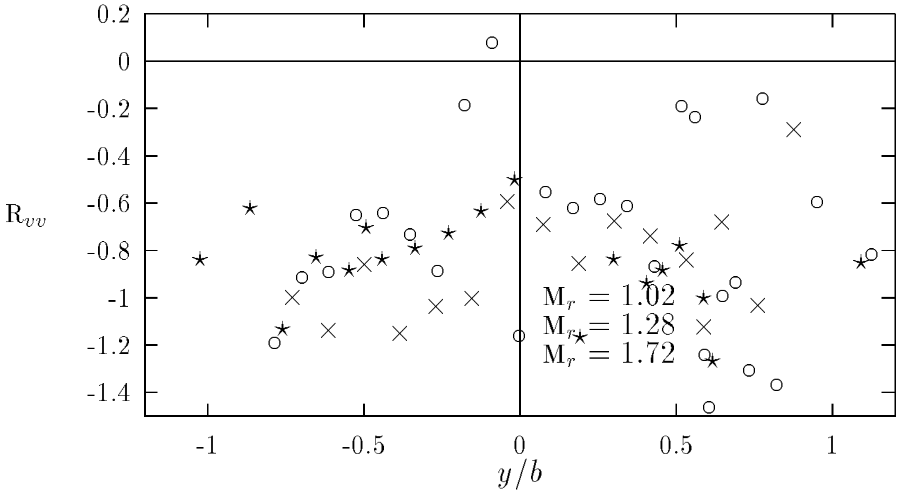


Figure 7.49: Rapport du transport de $\overline{vv}$ dans les directions x et y; expérience de Samimy et Elliott [74]

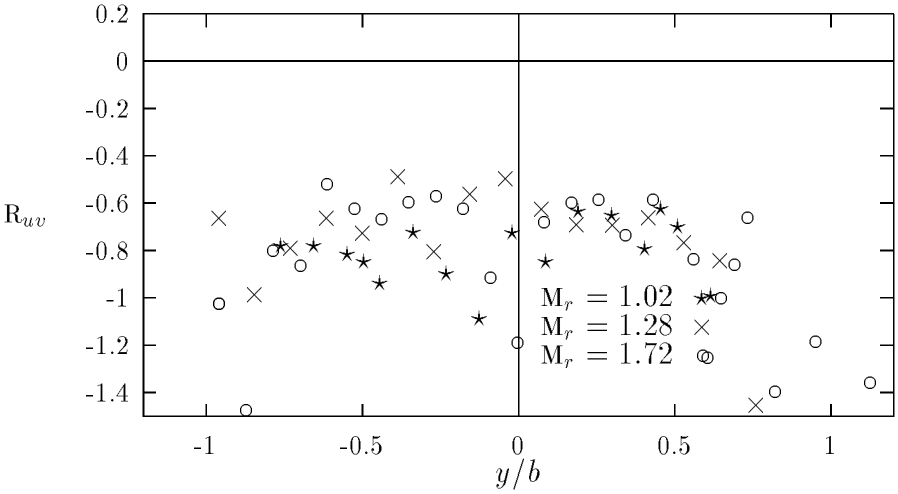


Figure 7.50: Rapport du transport de $\overline{uv}$ dans les directions x et y; expérience de Samimy et Elliott [74]

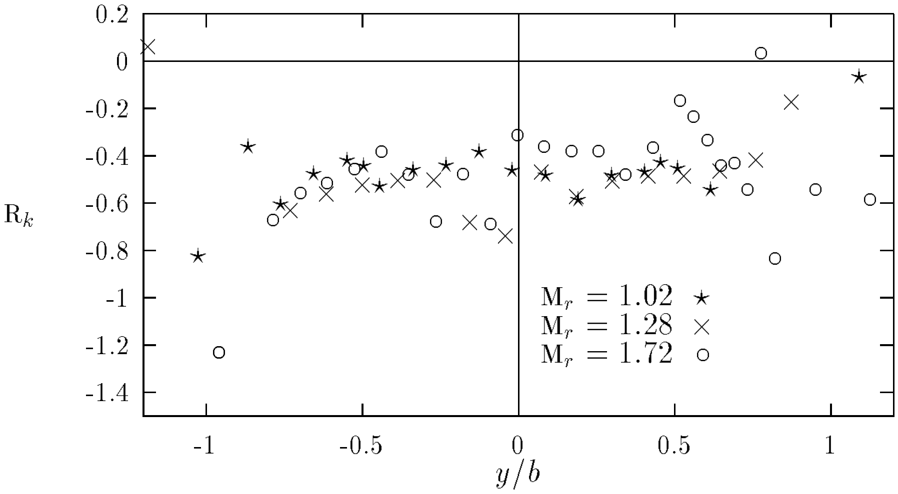


Figure 7.51: Rapport du transport de k dans les directions x et y; expérience de Samimy et Elliott [74]

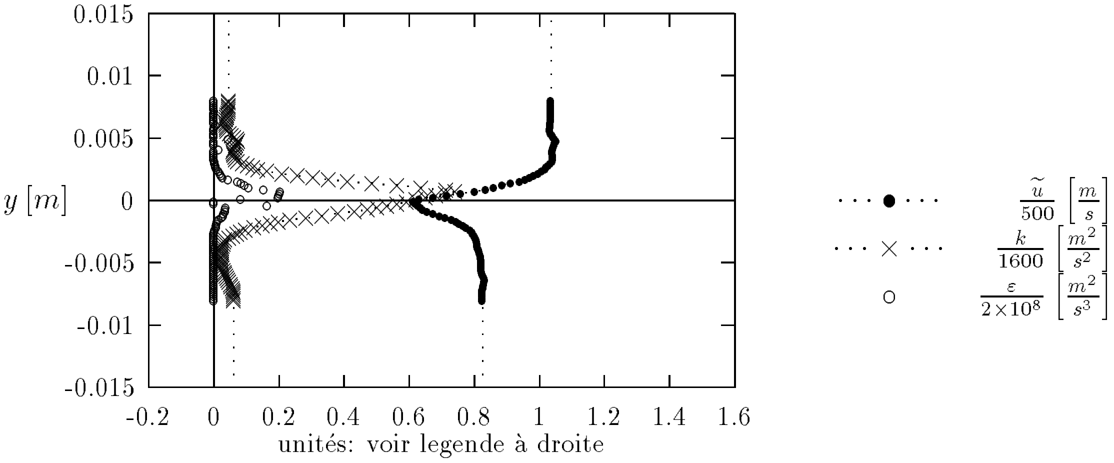


Figure 7.52: Valeurs à l'entrée, couche de mélange compressible, cas 1

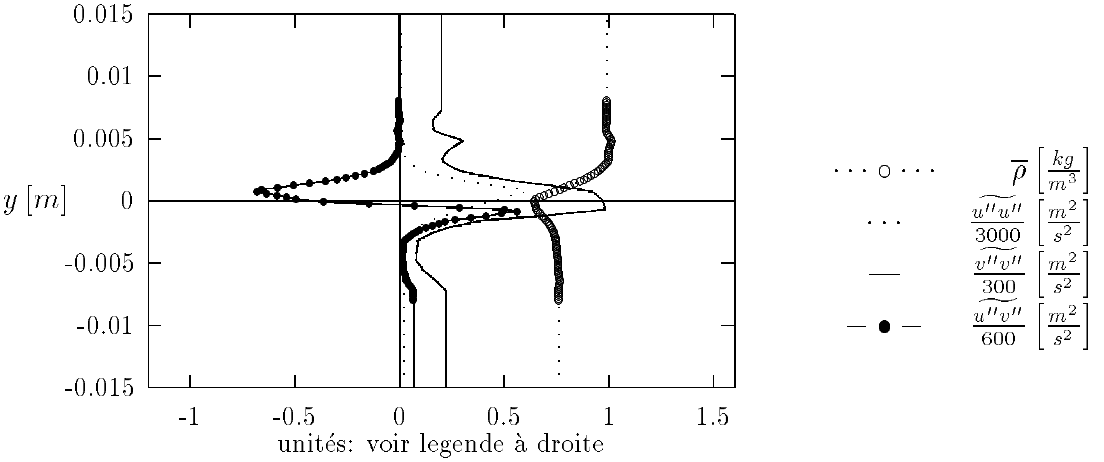


Figure 7.53: Valeurs à l'entrée, couche de mélange compressible, cas 1

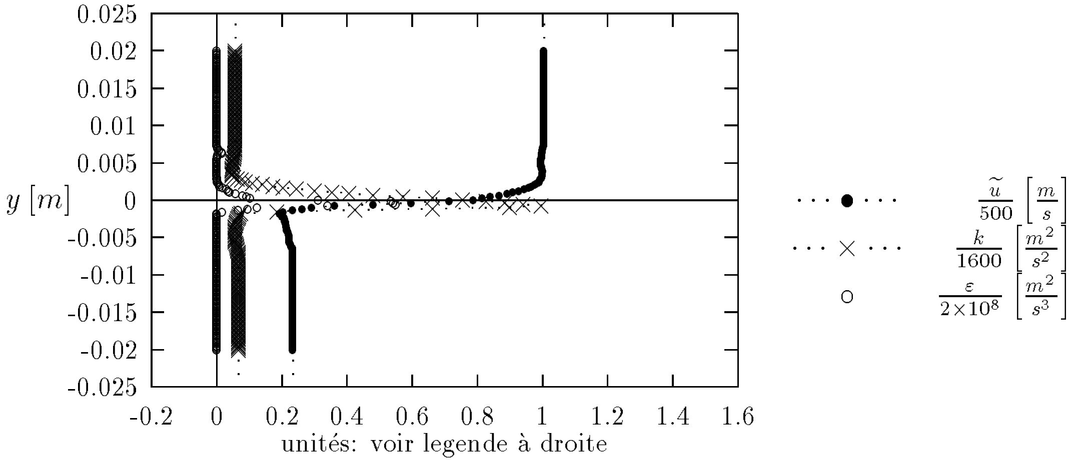


Figure 7.54: Valeurs à l'entrée, couche de mélange Goebel et Dutton, cas 3

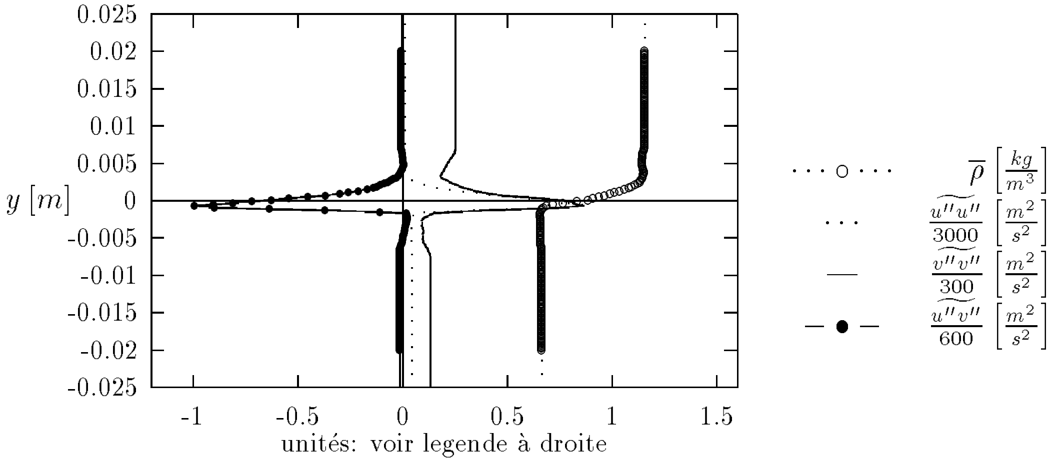


Figure 7.55: Valeurs à l'entrée, couche de mélange Goebel et Dutton, cas 3

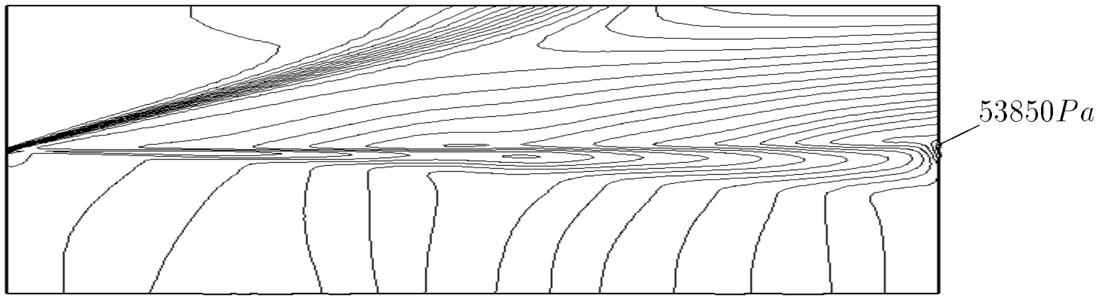


Figure 7.56: Lignes d'isovaleurs de la pression, cas 3, calcul avec termes de bord (5.17); $\overline{p}_{min} = 47500Pa$, $\overline{p}_{max} = 53850Pa$

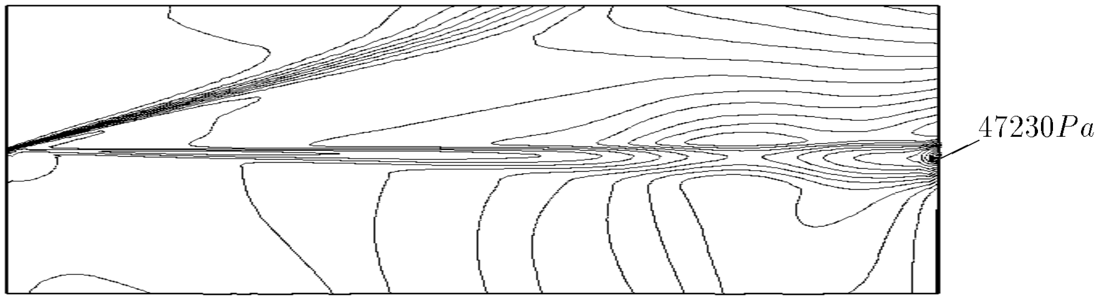


Figure 7.57: Lignes d'isovaleurs de la pression, cas 3, calcul sans termes de bord (5.17); $\overline{p}_{min} = 47230Pa$, $\overline{p}_{max} = 53200Pa$

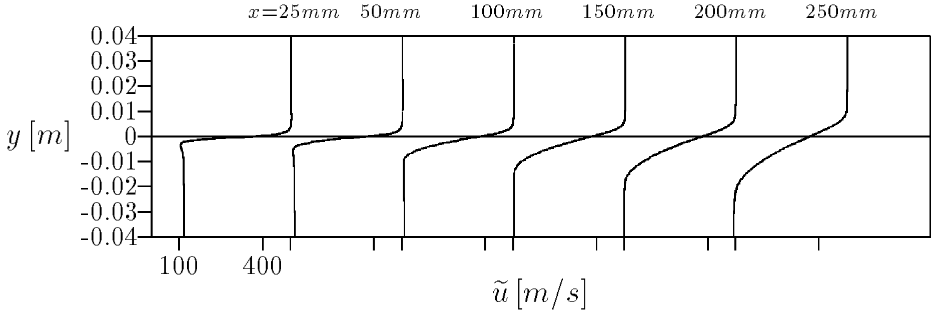


Figure 7.58: Profils successifs de la vitesse axiale, calcul avec modèle SSG, cas 3

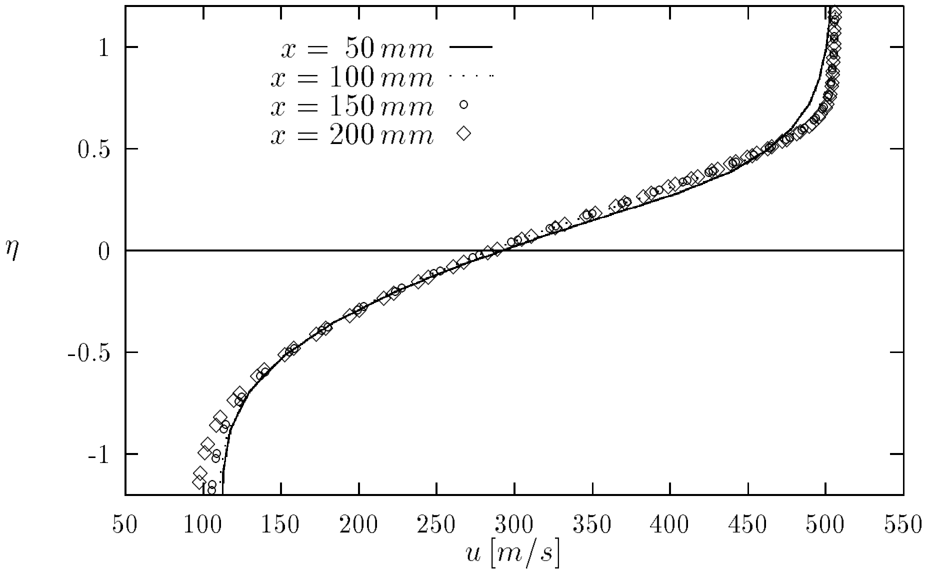


Figure 7.59: Superposition des courbes de vitesse à différentes stations en fonction du paramètre η, calcul SSG, cas 3

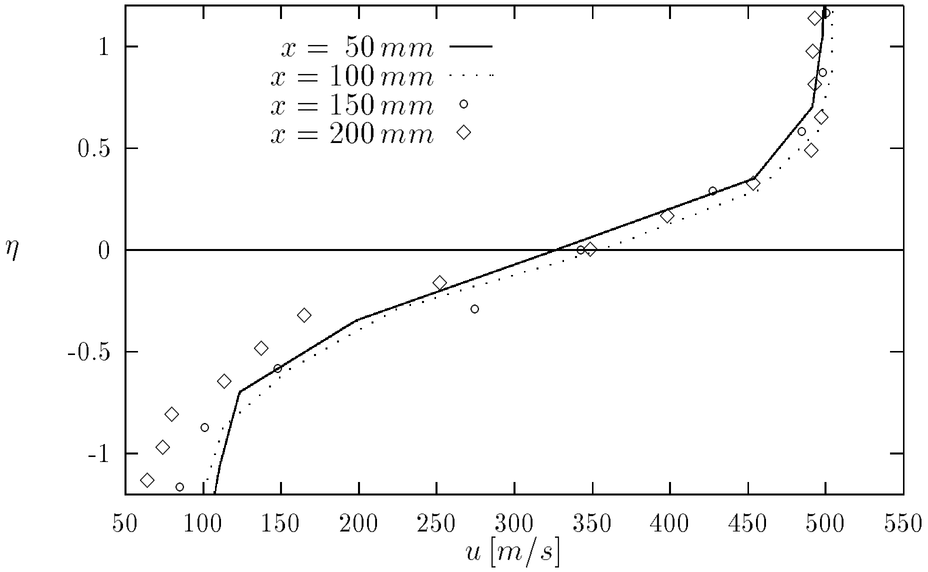


Figure 7.60: Superposition des courbes de vitesse, valeurs de l'expérience, cas 3

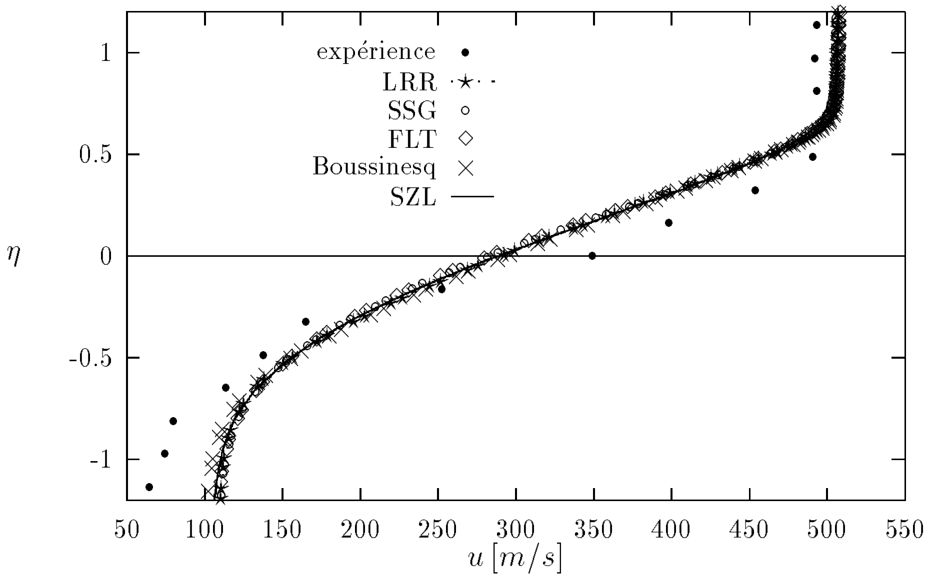


Figure 7.61: Similitude des profils de la vitesse axiale obtenue par différents calculs, $x = 250\,mm$, cas 3

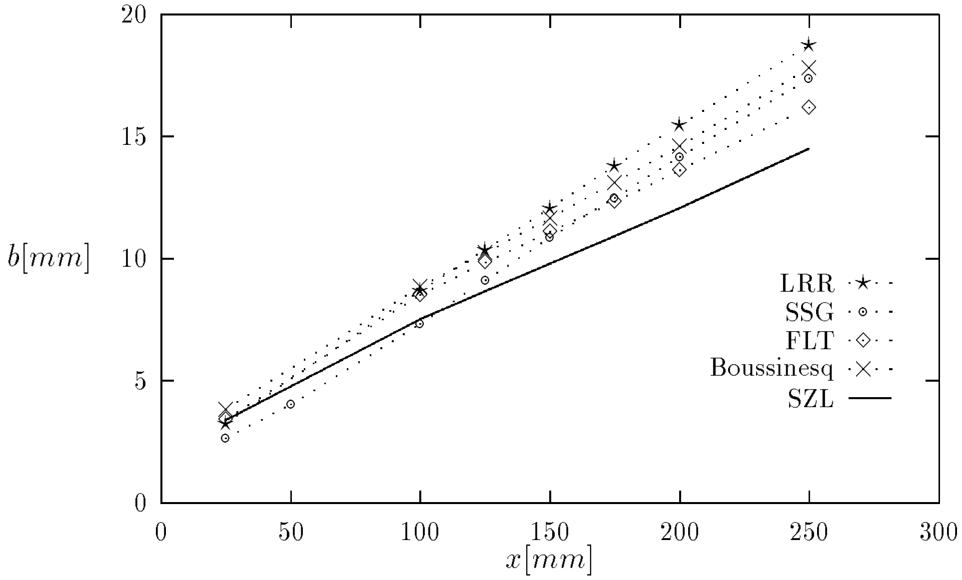


Figure 7.62: Evolution de l'épaisseur de la couche de mélange, cas 3

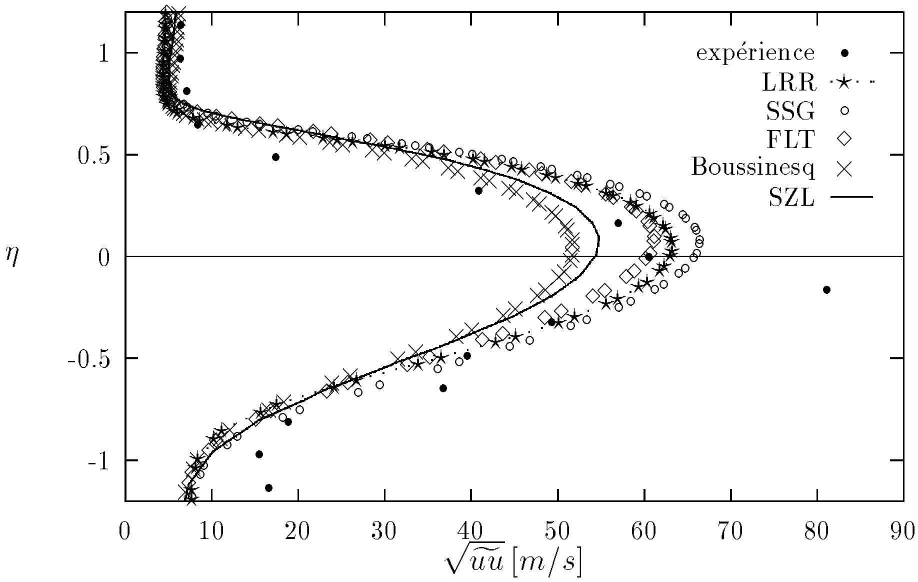


Figure 7.63: Profils de la tension normale $\widetilde{u''u''}$, $x = 250mm$, cas 3

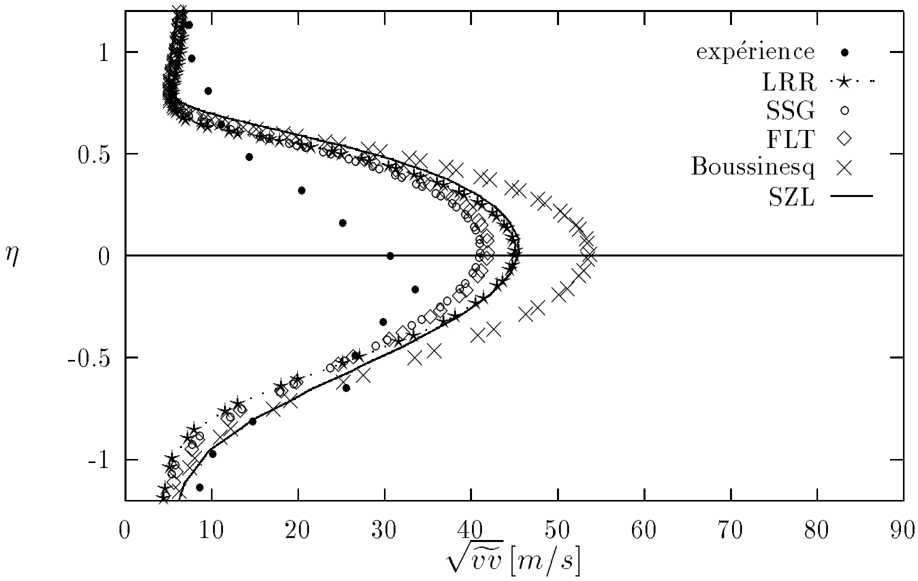


Figure 7.64: Profils de la tension normale $\widetilde{v''v''}$, $x = 250mm$, cas 3

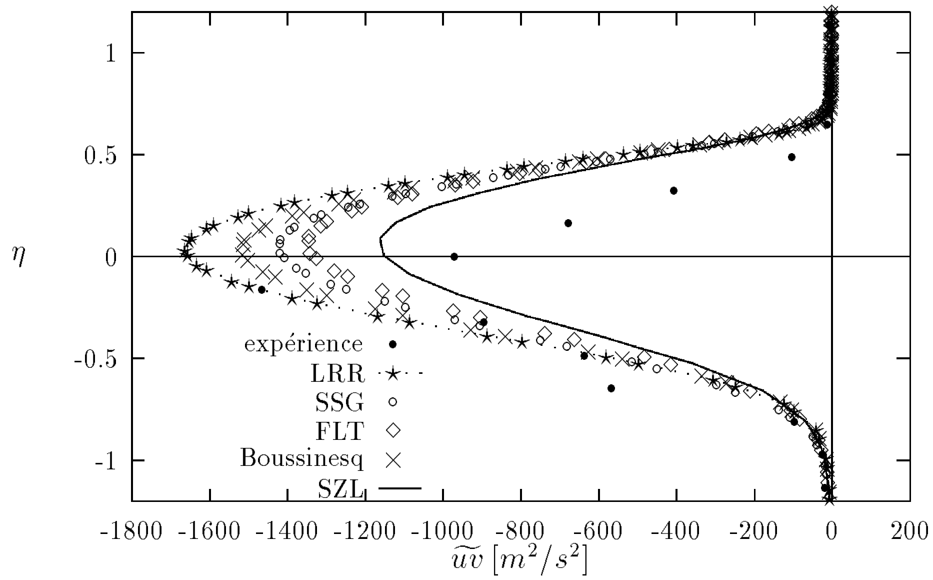


Figure 7.65: Profils de la tension tangentielle $\widetilde{u''v''}$, $x = 250mm$, cas 3

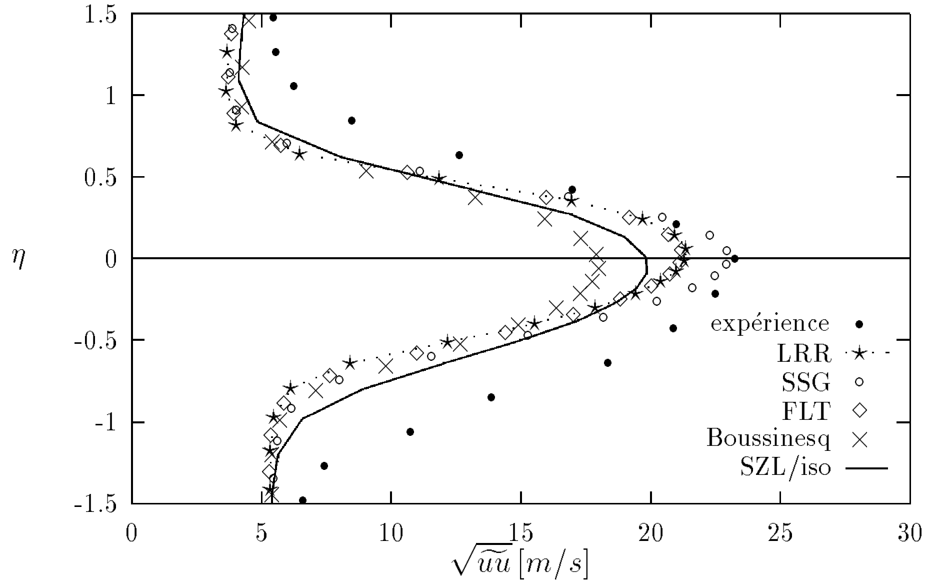


Figure 7.66: Profils de la tension normale $\widetilde{u''u''}$, $x = 250mm$, cas 1

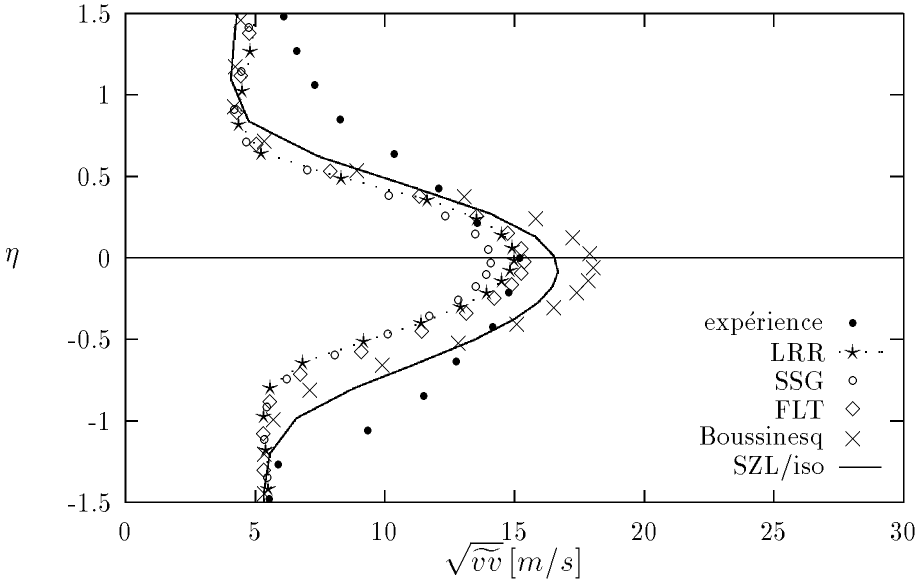


Figure 7.67: Profils de la tension normale $\widetilde{v''v''}$, $x = 250mm$, cas 1

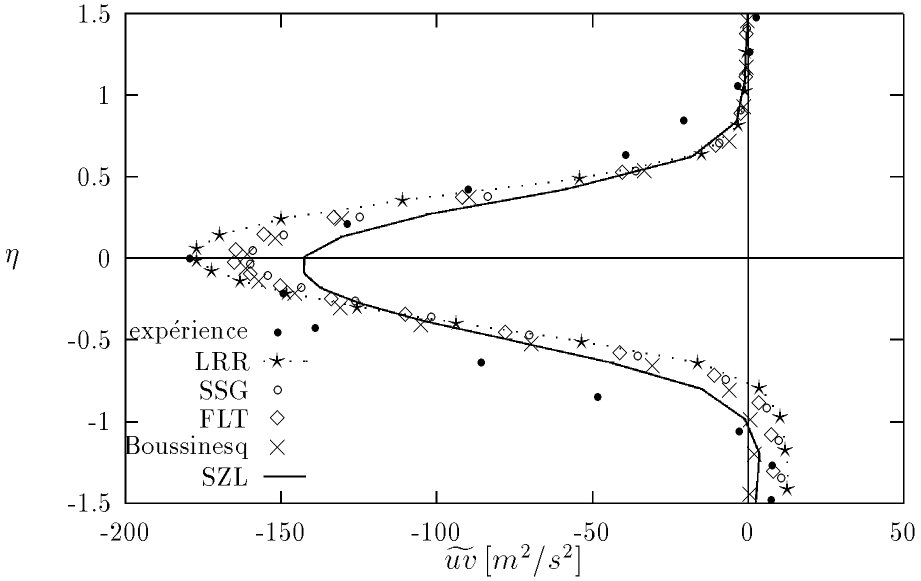


Figure 7.68: Profils de la tension tangentielle $\widetilde{u''v''}$, $x = 250mm$, cas 1

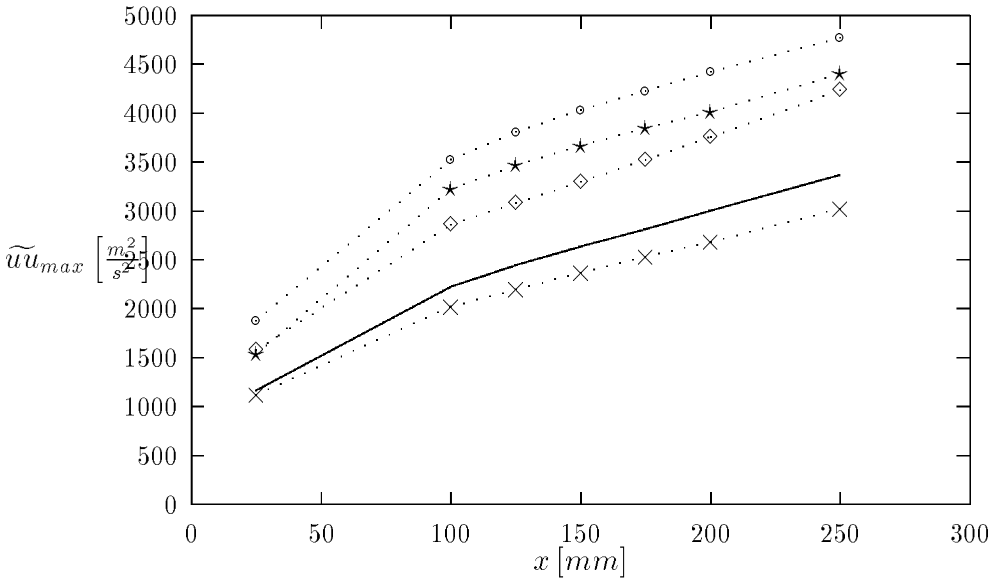


Figure 7.69: Evolution axiale des maxima de la tension $\widetilde{u''u''}$, cas 3

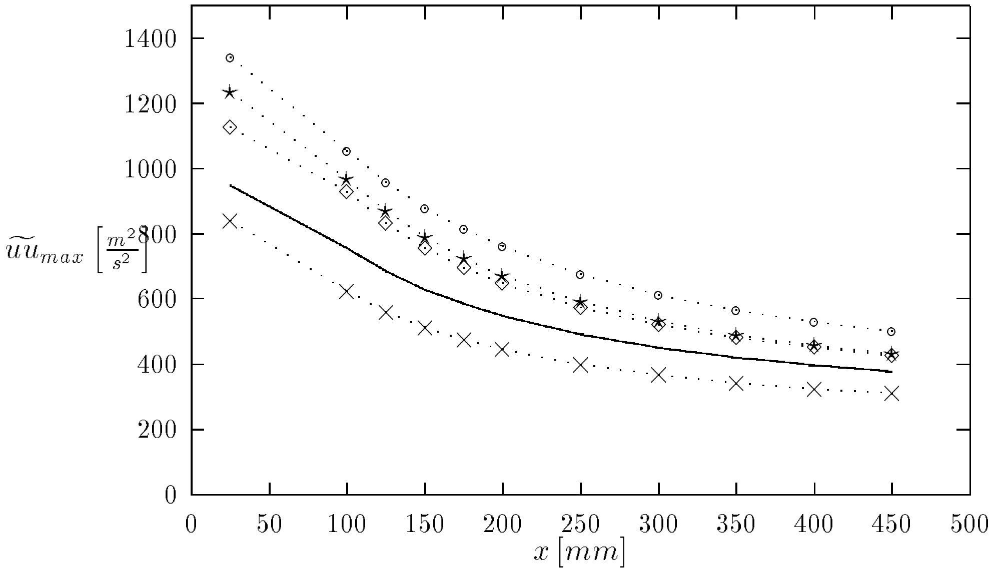


Figure 7.70: Evolution axiale des maxima de la tension $\widetilde{u''u''}$, cas 1

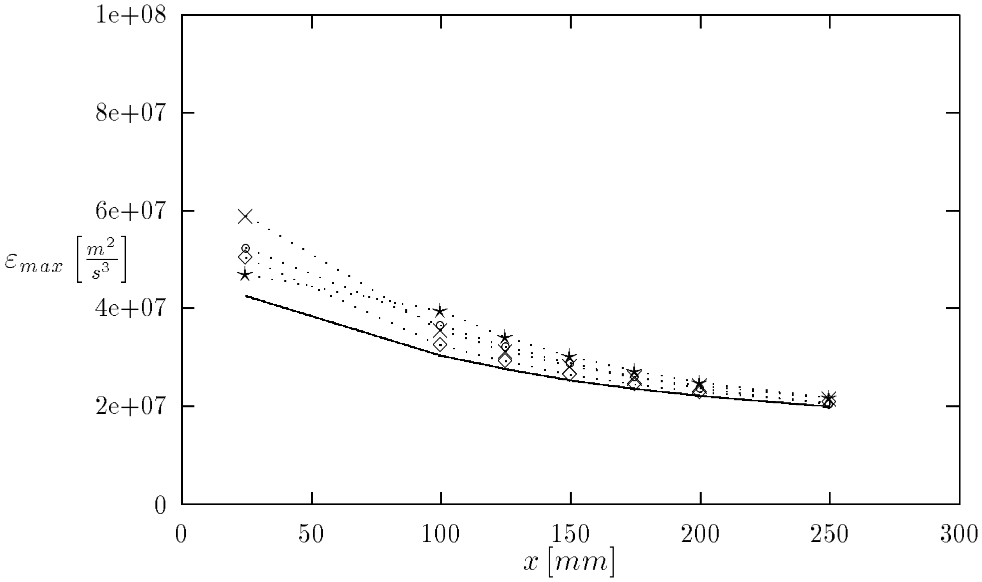


Figure 7.71: Evolution axiale des maxima de la dissipation ε, cas 3

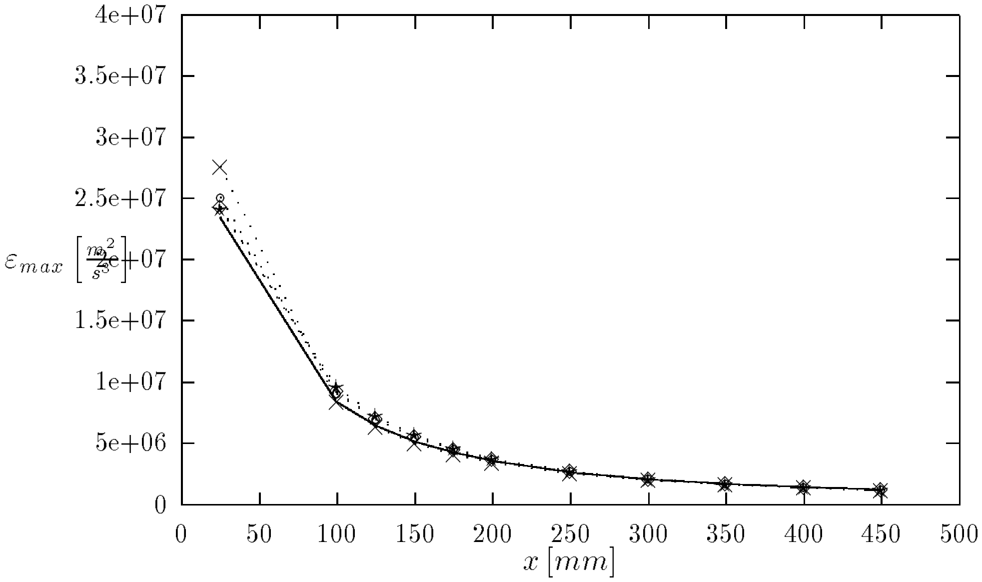


Figure 7.72: Evolution axiale des maxima de la dissipation ε, cas 1

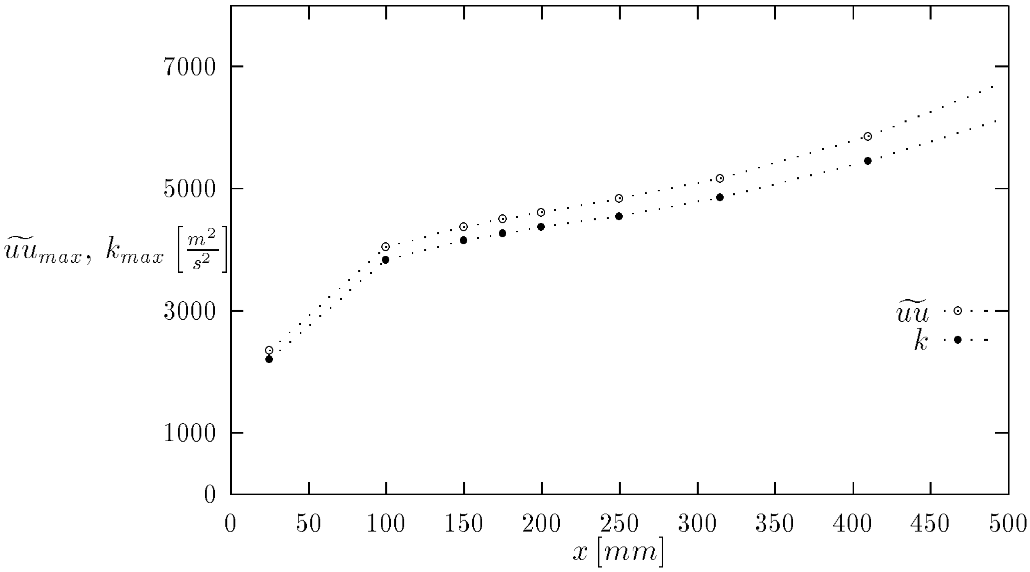


Figure 7.73: Evolution axiale des maxima de k et $\widetilde{uu}$, cas 3, domaine prolongé

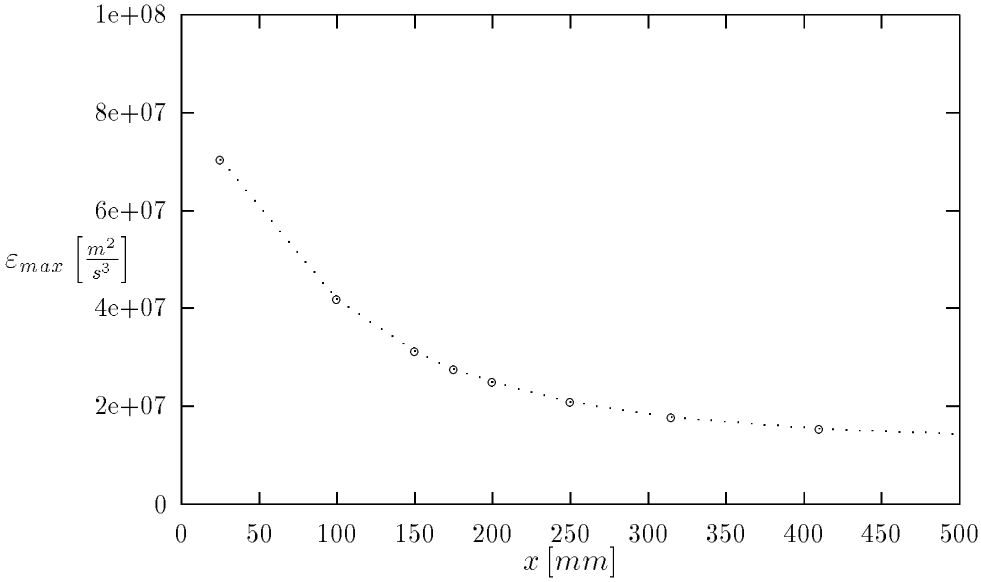


Figure 7.74: Evolution axiale des maxima de la dissipation ε, cas 3, domaine prolongé

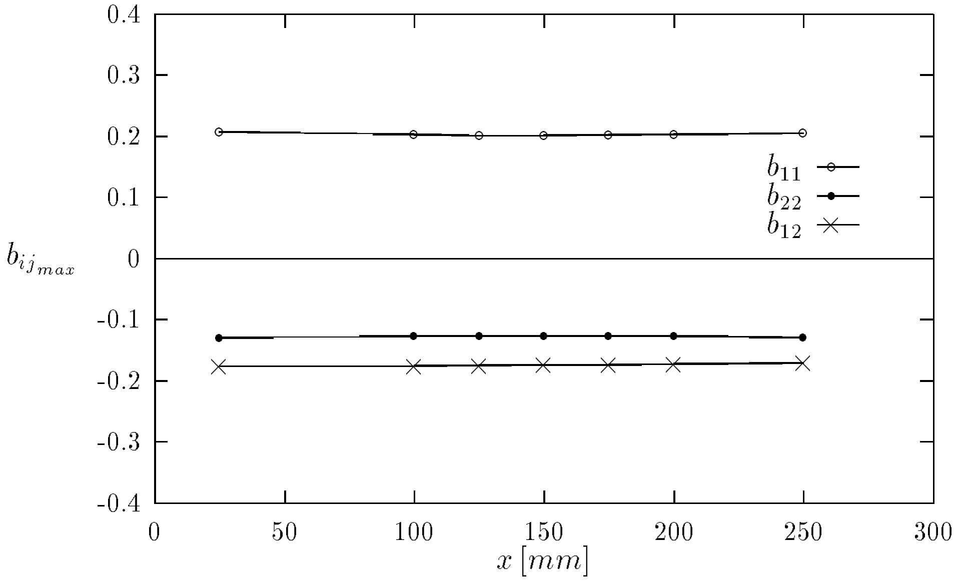


Figure 7.75: Evolution axiale des anisotropies associés aux maxima des tensions, calcul SSG, cas 3

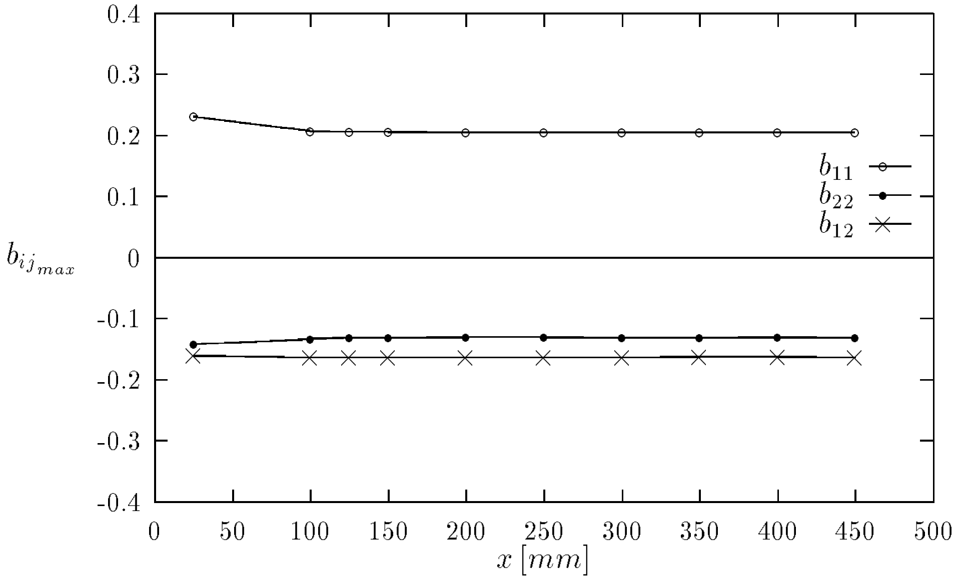


Figure 7.76: Evolution axiale des anisotropies associés aux maxima des tensions, calcul SSG, cas 1

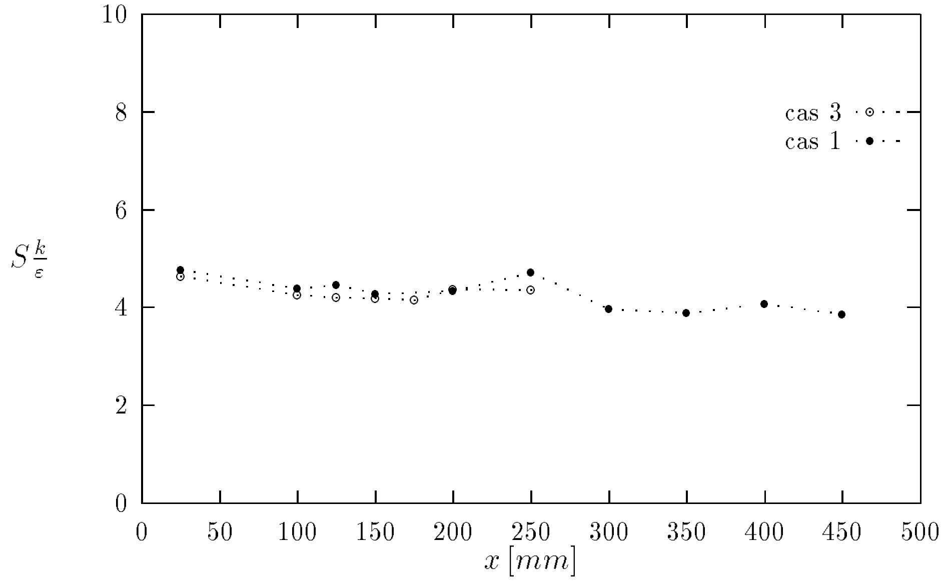


Figure 7.77: Evolution axiale du rapport des temps caractéristiques, calcul SSG, cas 1 et cas 3

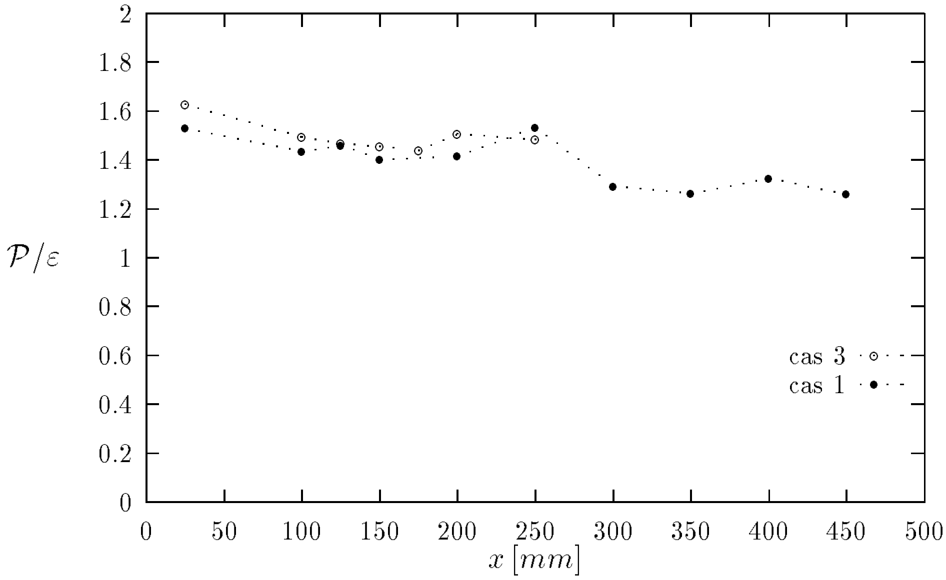


Figure 7.78: Evolution axiale du rapport entre production et dissipation, calcul SSG, cas 1 et cas 3

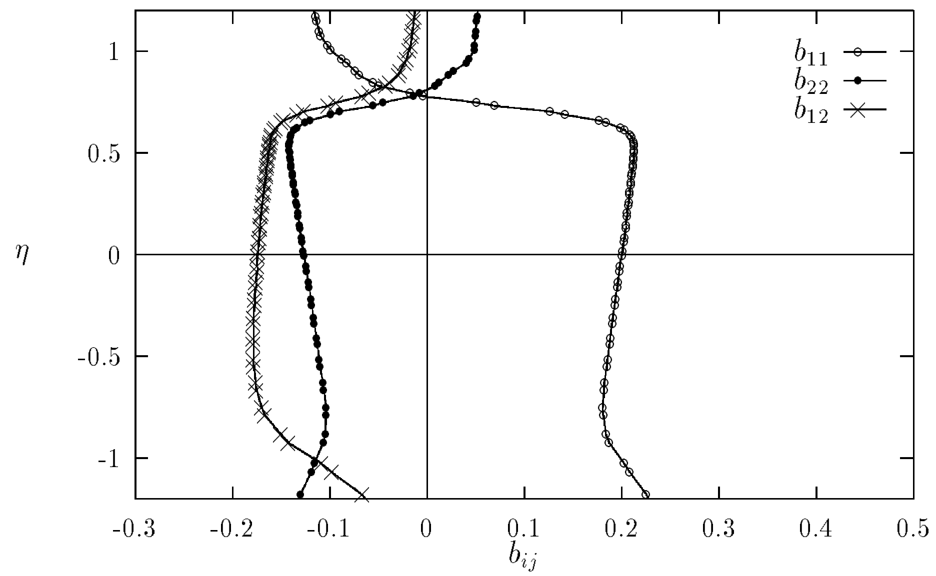


Figure 7.79: Profils de l'anisotropie à $x = 250\,mm$, calcul SSG, cas 3

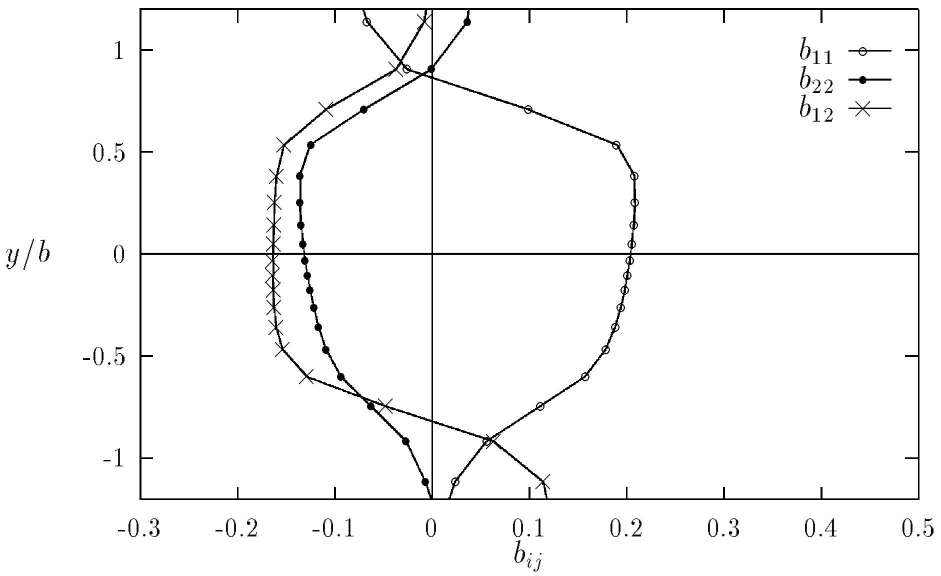


Figure 7.80: Profils de l'anisotropie à $x = 400\,mm$, calcul SSG, cas 1

Couche limite incompressible

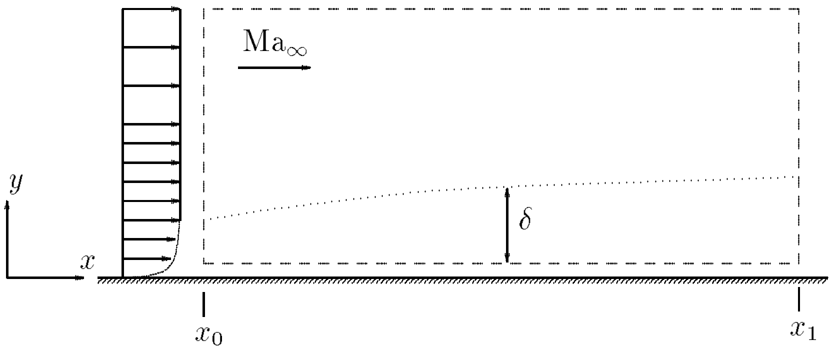


Figure 7.81: Domaine de calcul, couche limite incompressible

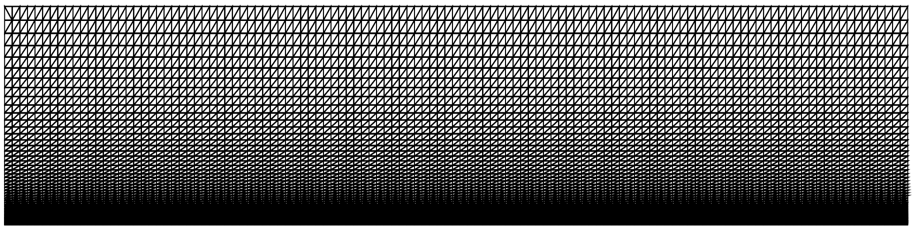


Figure 7.82: Maillage, couche limite incompressible

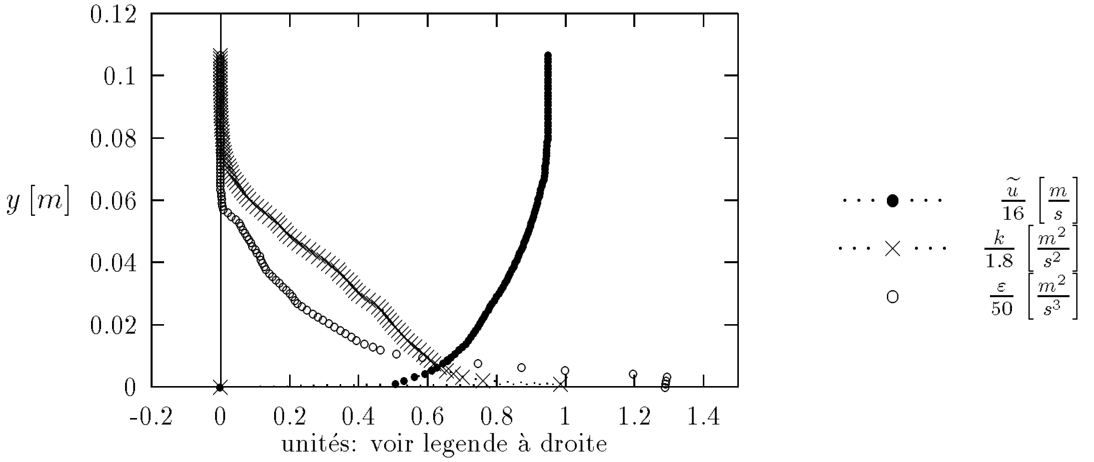


Figure 7.83: Valeurs à l'éntrée, couche limite incompressible

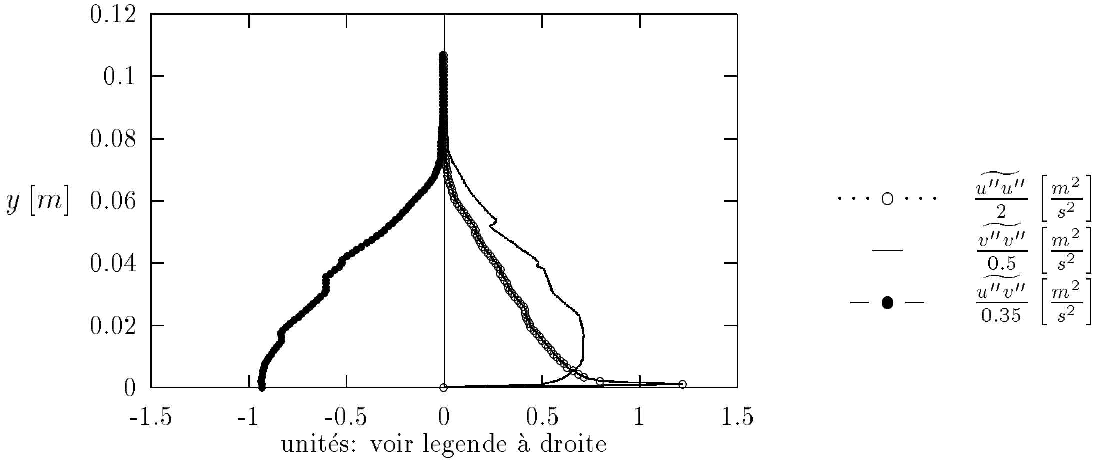


Figure 7.84: Valeurs à l'éntrée, couche limite incompressible

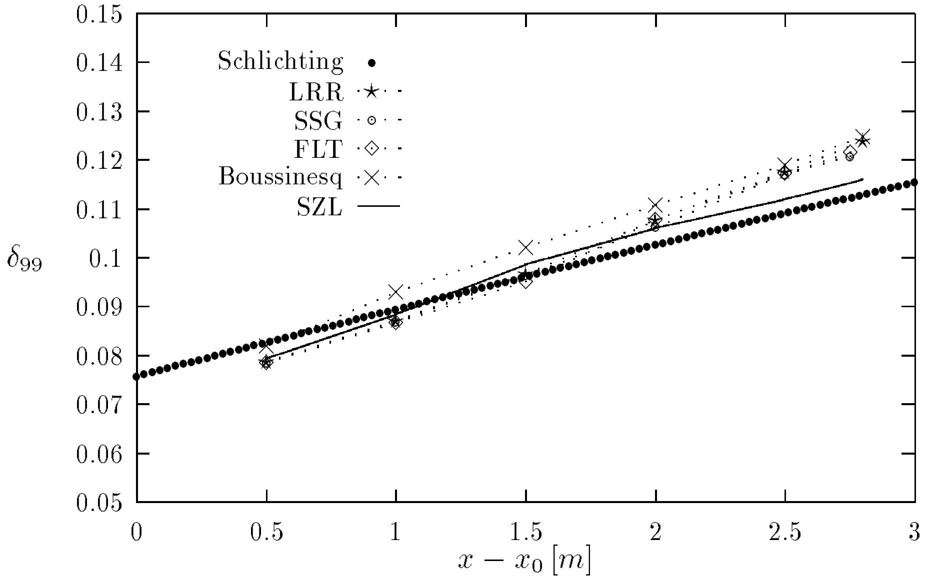


Figure 7.85: Evolution de l'épaisseur de la couche limite δ_{99}

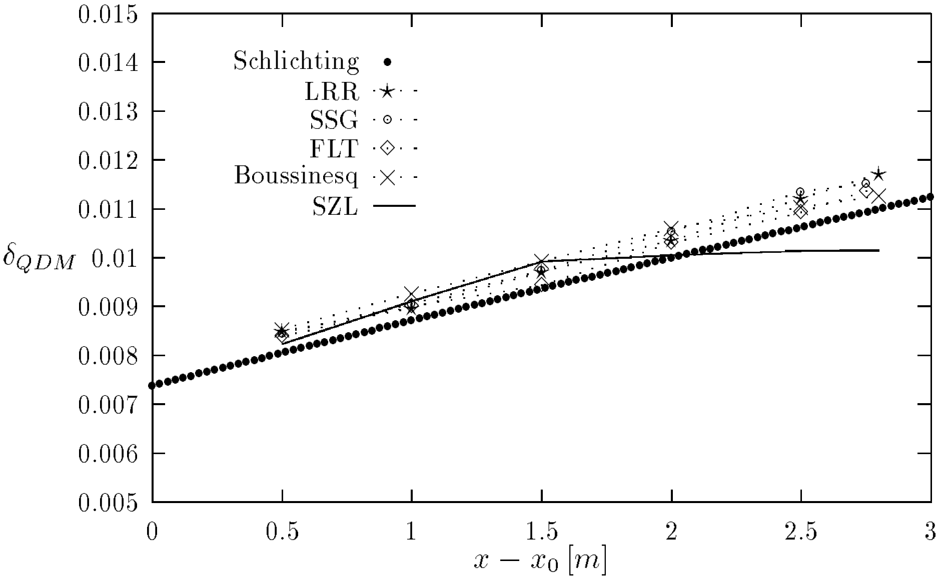


Figure 7.86: Evolution de l'épaisseur de quantité de mouvement δ_{QDM}

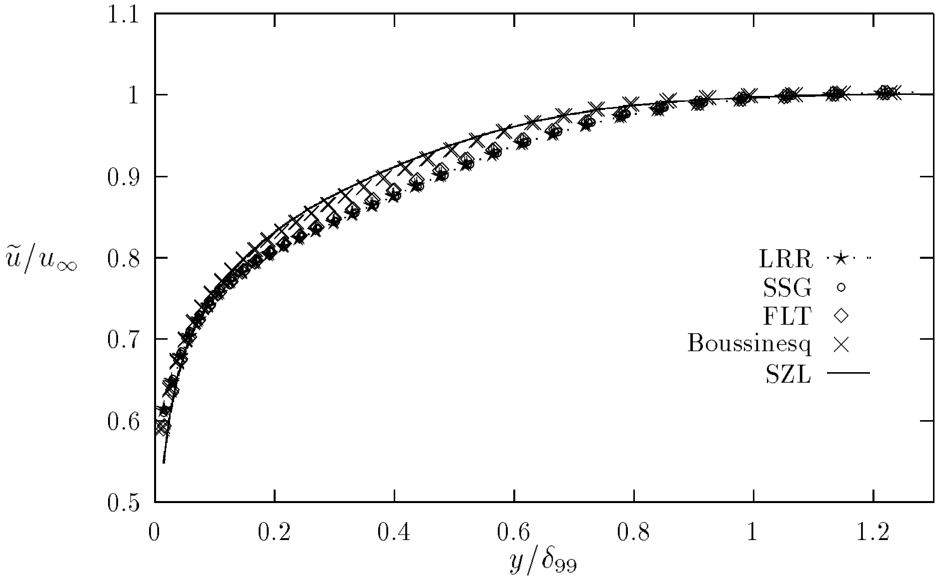


Figure 7.87: Profil transversal de la vitesse axiale $\widetilde{u}$ en fonction de y/δ_{99} à $x - x_0 = 2.8\,m$

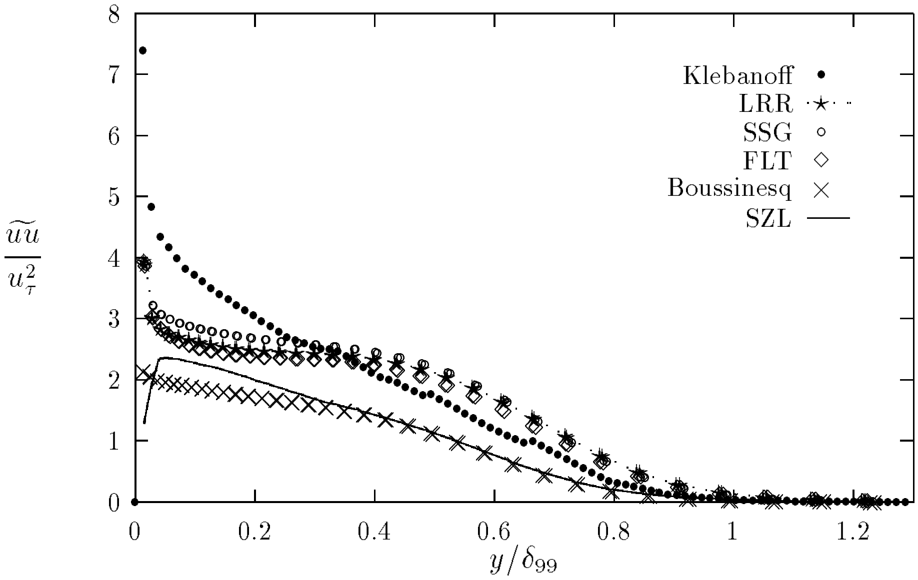


Figure 7.88: Profil transversal de la tension normale $\widetilde{uu}$ en fonction de y/δ_{99} à $x - x_0 = 2.8\,m$

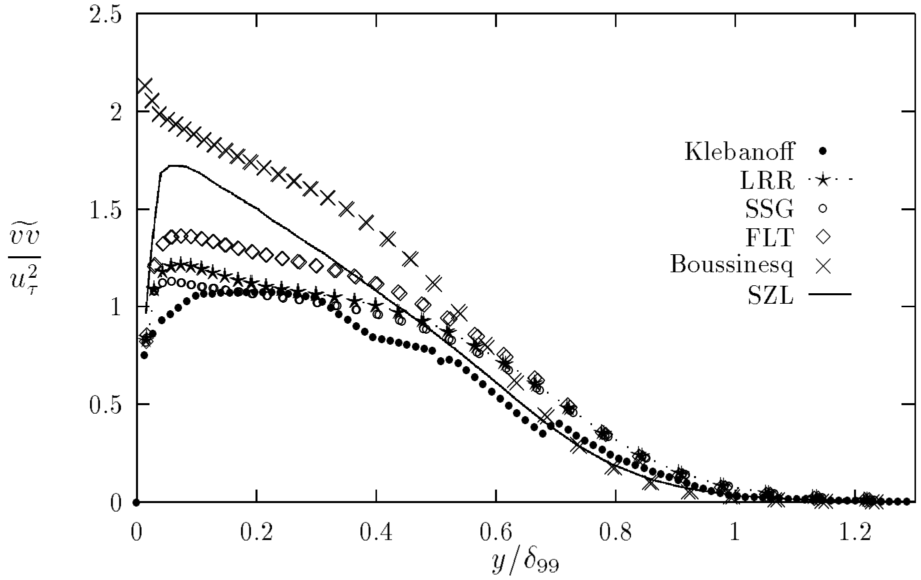


Figure 7.89: Profil transversal de la tension normale $\widetilde{vv}$ en fonction de y/δ_{99} à $x - x_0 = 2.8\,m$

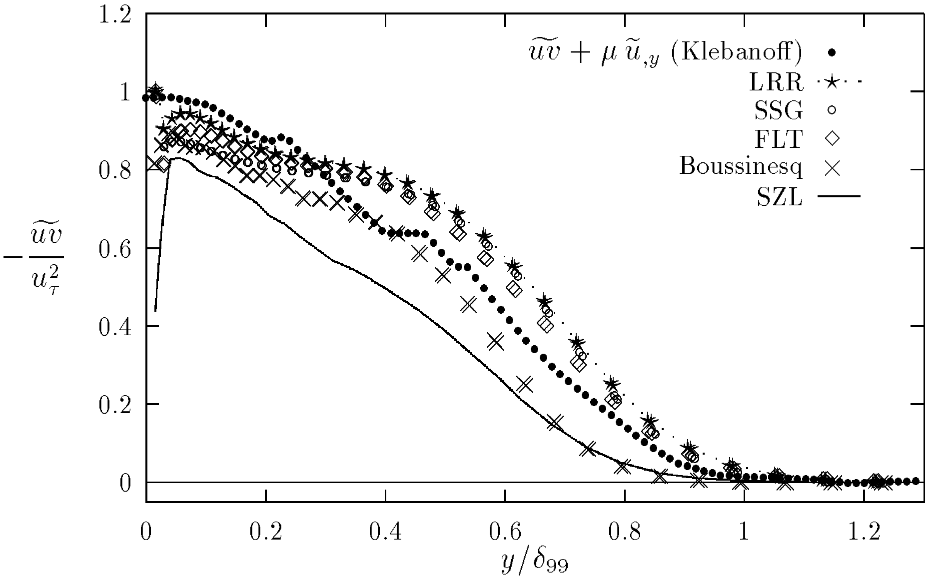


Figure 7.90: Profil transversal de la tension tangentielle $\widetilde{uv}$ en fonction de y/δ_{99} à $x - x_0 = 2.8\,m$

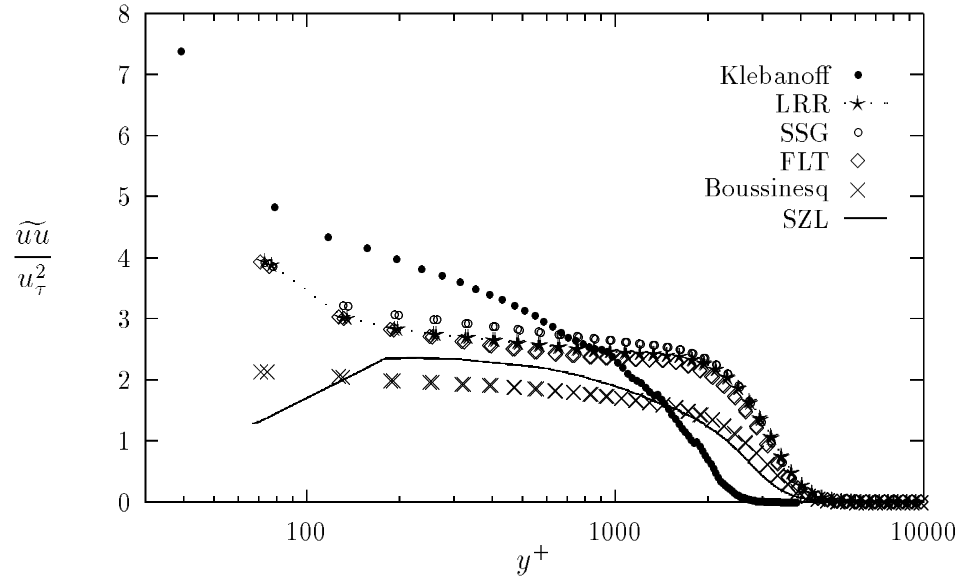


Figure 7.91: Profil transversal de la tension normale $\widetilde{uu}$ en fonction de y^+ à $x - x_0 = 2.8\,m$

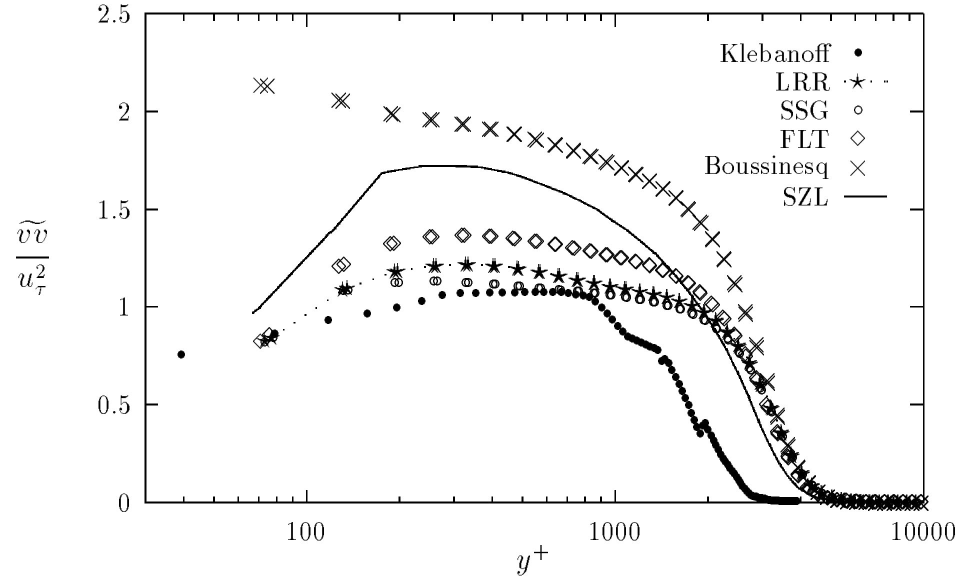


Figure 7.92: Profil transversal de la tension normale $\widetilde{vv}$ en fonction de y^+ à $x - x_0 = 2.8\,m$

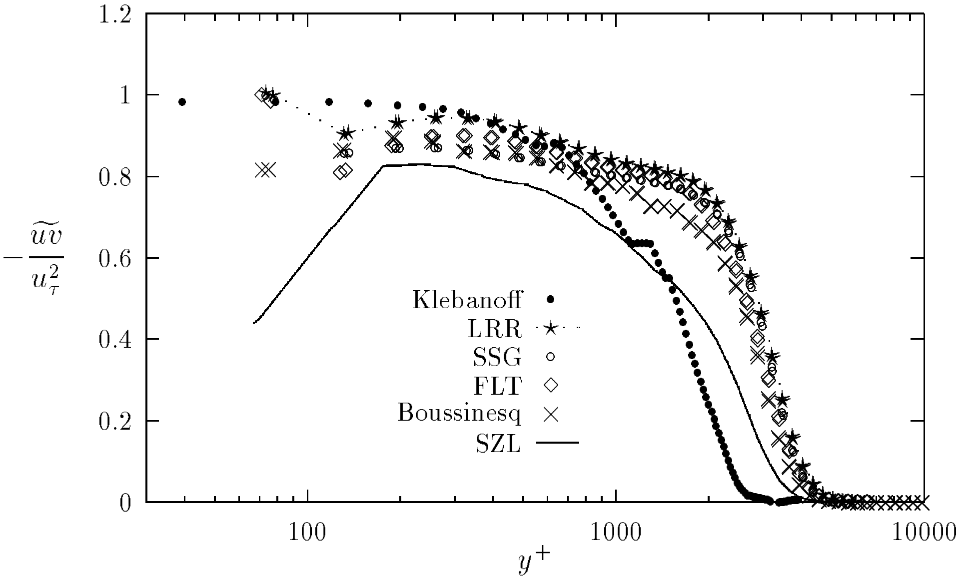


Figure 7.93: Profil transversal de la tension tangentielle $\widetilde{uv}$ en fonction de y^+ à $x - x_0 = 2.8\,m$

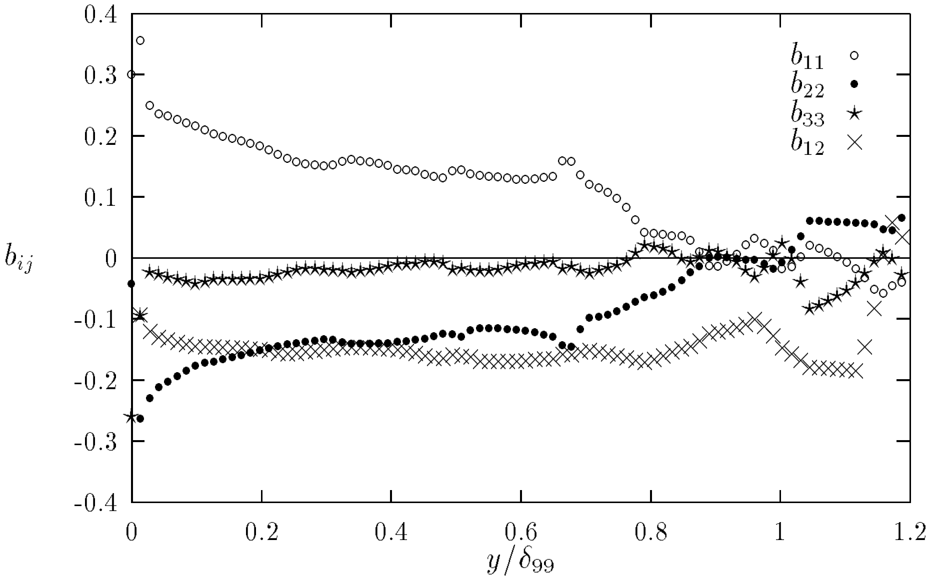


Figure 7.94: Profil transversal des composantes de l'anisotropie b_{ij}, valeurs expérimentales

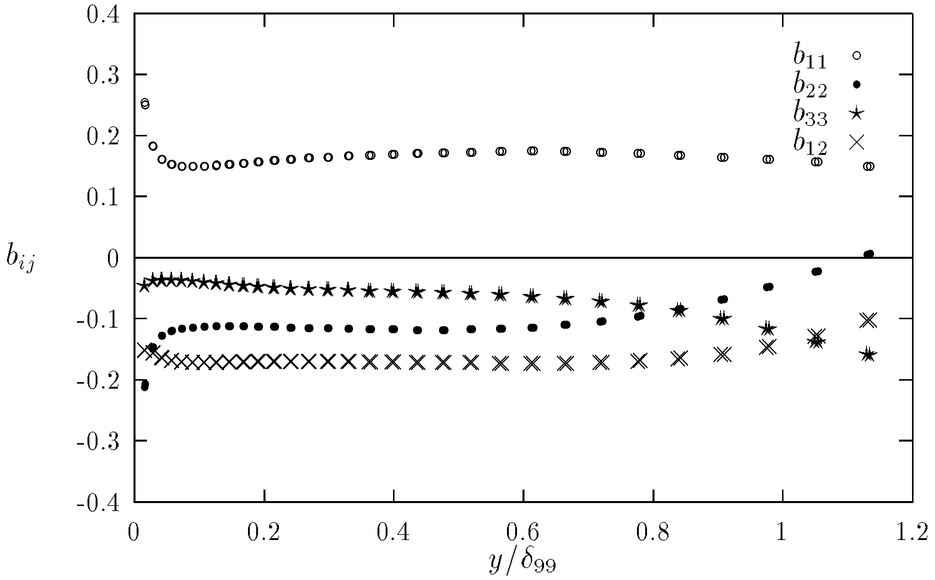


Figure 7.95: Profil transversal des composantes de l'anisotropie b_{ij}, calcul avec modèle LRR

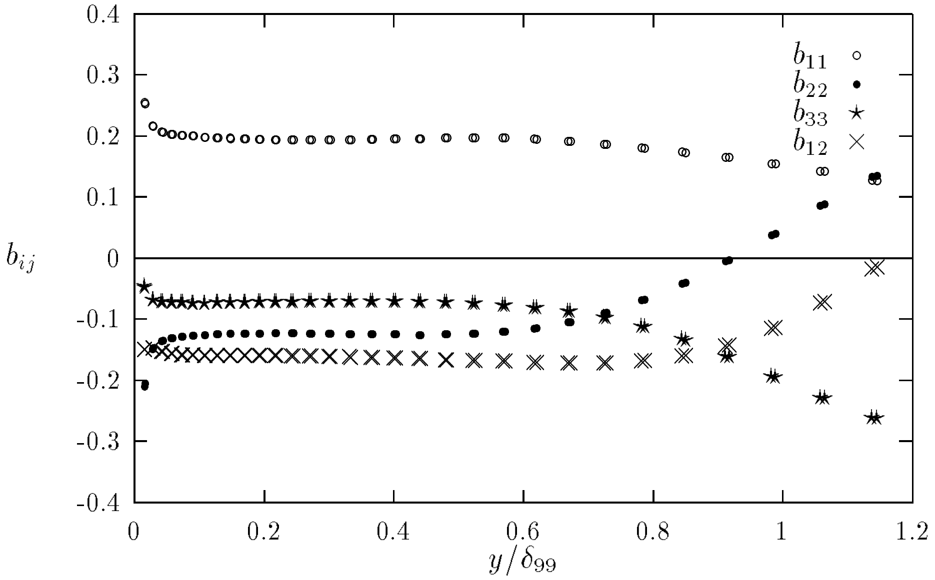


Figure 7.96: Profil transversal des composantes de l'anisotropie b_{ij}, calcul avec modèle SSG

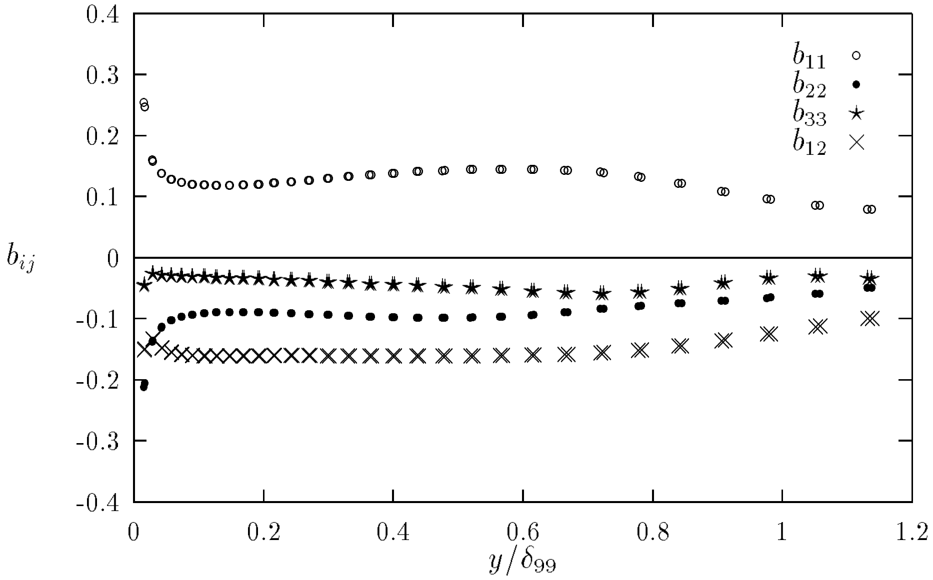


Figure 7.97: Profil transversal des composantes de l'anisotropie b_{ij}, calcul avec modèle FLT

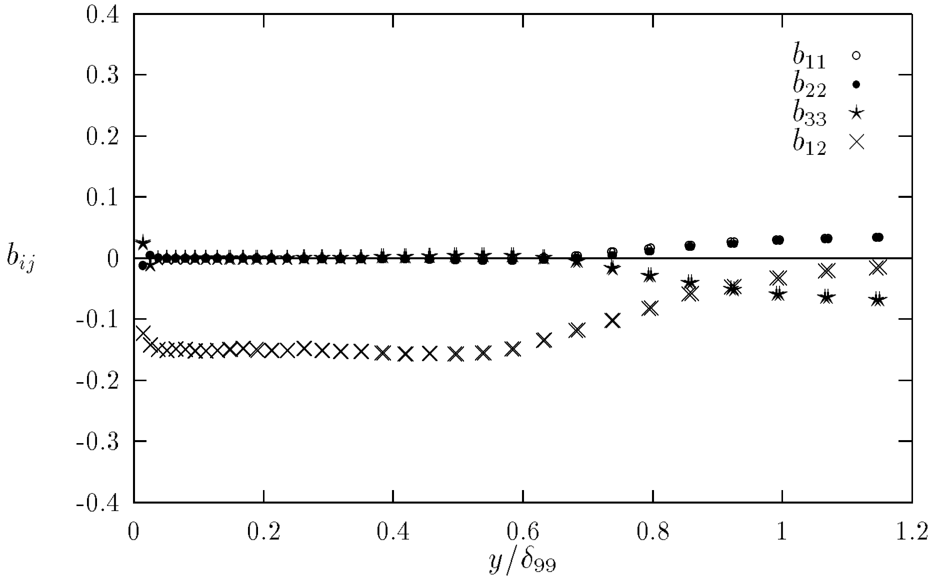


Figure 7.98: Profil transversal des composantes de l'anisotropie b_{ij}, calcul avec modèle Boussinesq

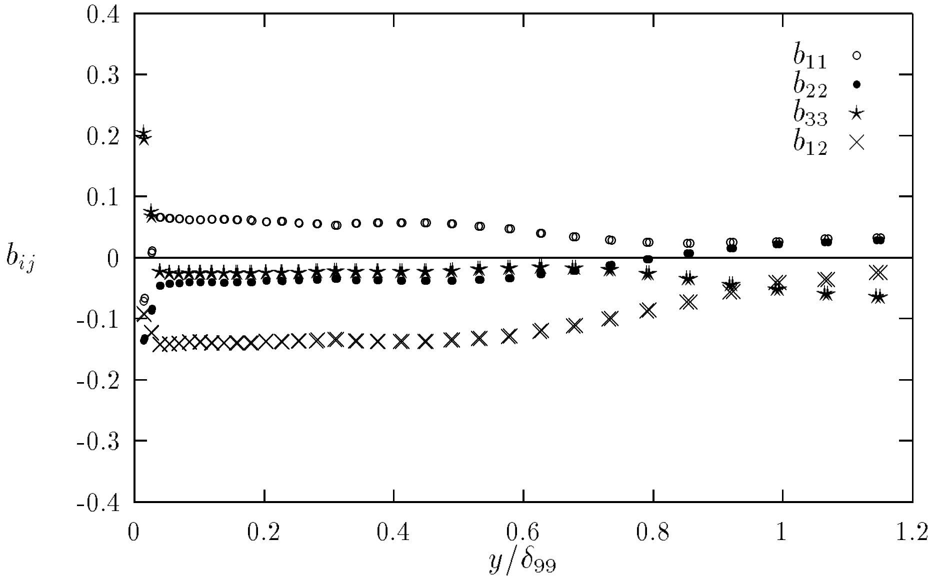


Figure 7.99: Profil transversal des composantes de l'anisotropie b_{ij}, calcul avec modèle SZL

Couche limite supersonique

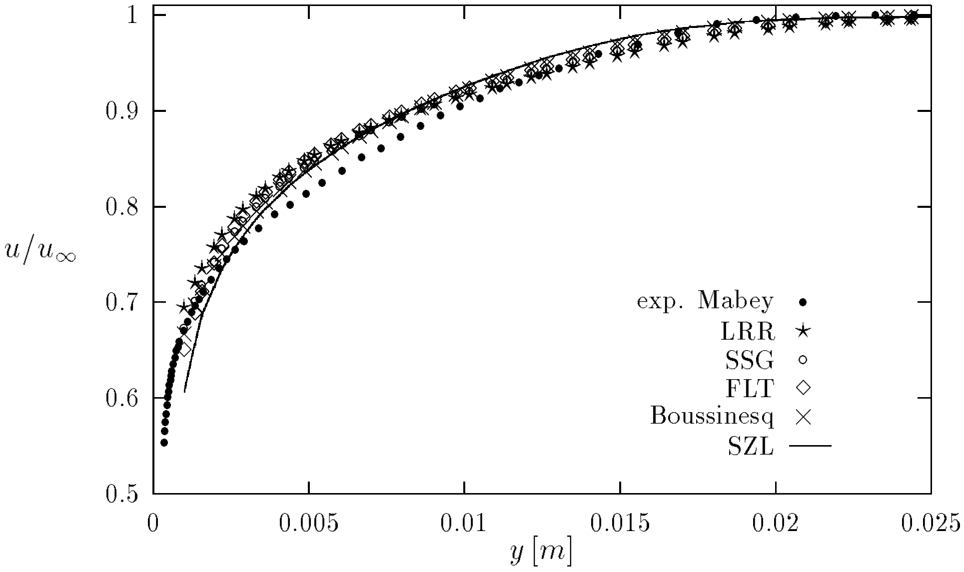


Figure 7.100: Profils de vitesse axiale à $x = 1.368\,m$ du bord d'attaque

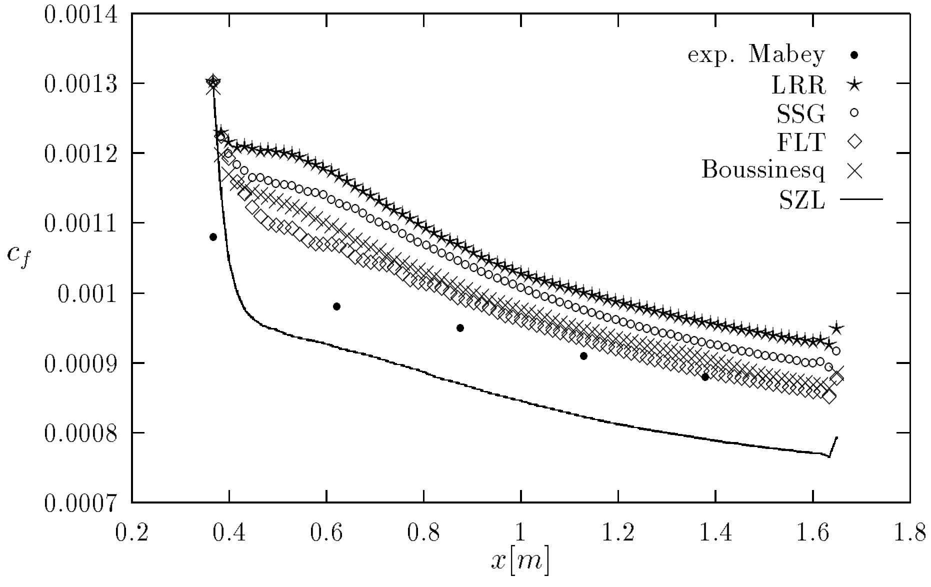


Figure 7.101: Evolution du coefficient de frottement

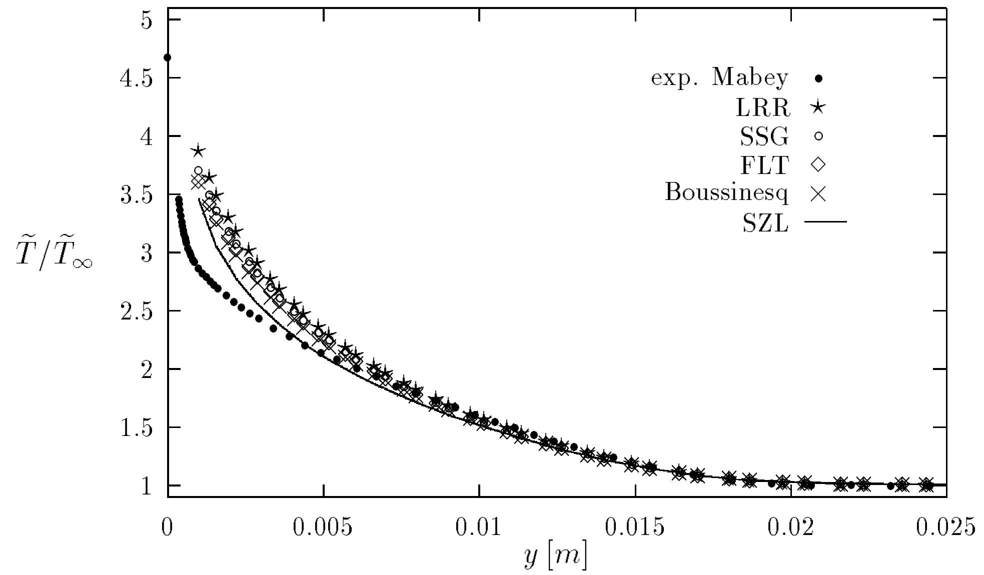


Figure 7.102: Profils de température statique à $x = 1.368\,m$ du bord d'attaque

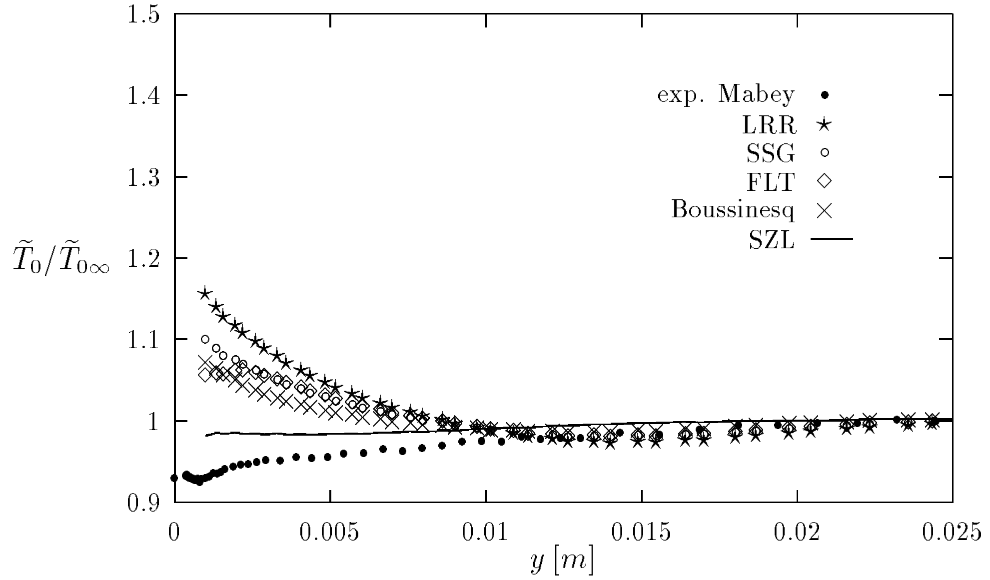


Figure 7.103: Profils de température totale à $x = 1.368\,m$ du bord d'attaque

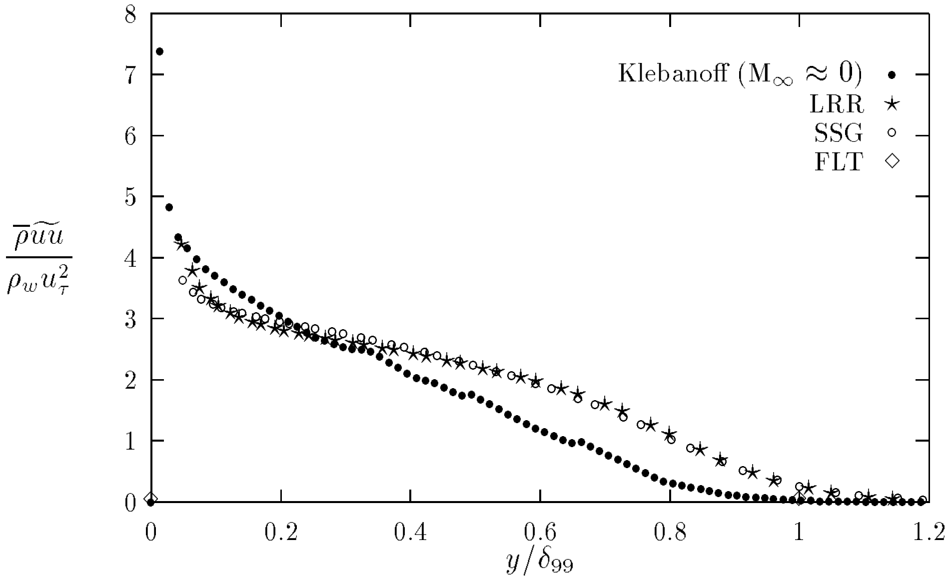


Figure 7.104: Profils de la tension normale $\overline{\rho}\widetilde{uu}$ à $x = 1.368\,m$ du bord d'attaque

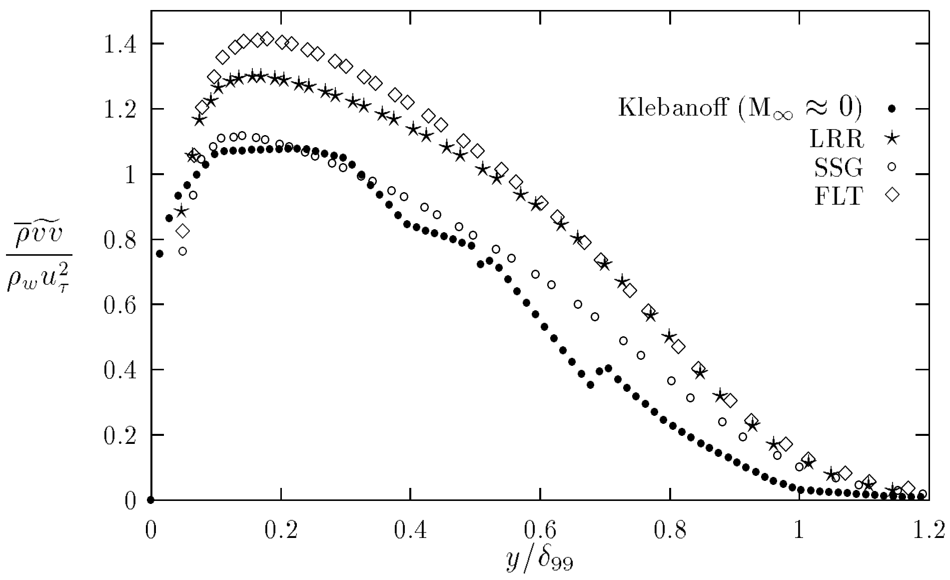


Figure 7.105: Profils de la tension normale $\overline{\rho}\widetilde{vv}$ à $x = 1.368\,m$ du bord d'attaque

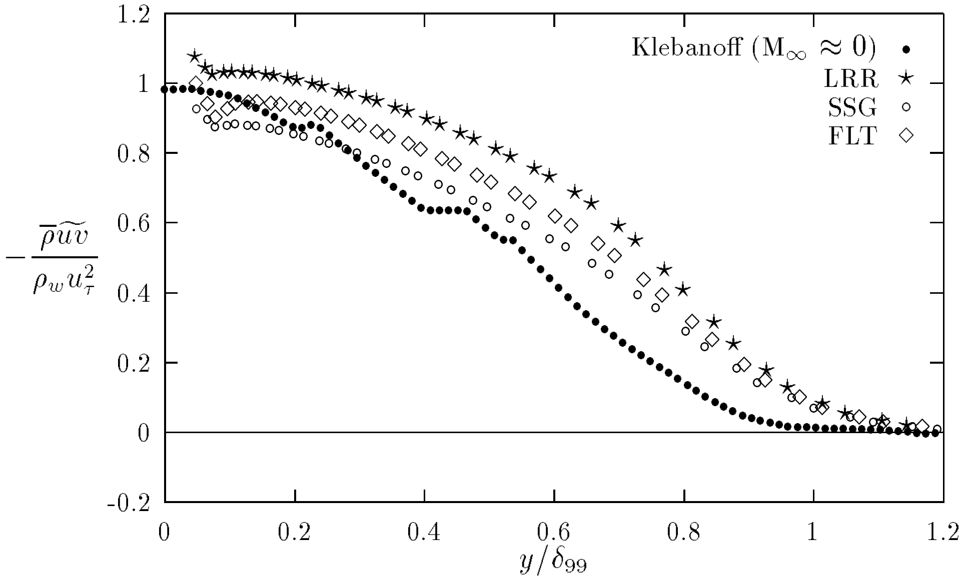


Figure 7.106: Profils de la tension tangentielle $\overline{\rho}\widetilde{uv}$ à $x = 1.368\,m$ du bord d'attaque

Annexe A

Les modèles de pression-déformation utilisés

Modèle LRR

Le modèle de Launder *et al.* [14] s'écrit

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 + \Pi_2 = \quad & -C_1\overline{\rho}\varepsilon b_{ij} - \frac{C_2+8}{11}\left(P_{ij} - \frac{1}{3}P_{kk}\delta_{ij}\right) \\
& -\frac{8C_2-2}{11}\left(D_{ij} - \frac{1}{3}P_{kk}\delta_{ij}\right) - \frac{30C_2-2}{55}\overline{\rho}k\widetilde{S}_{ij}
\end{aligned}
\quad . \qquad (A.1)
$$

où

$$
D_{ij} = -\overline{\rho}\widetilde{u_i''u_k''}\widetilde{u}_{k,j} - \overline{\rho}\widetilde{u_j''u_k''}\widetilde{u}_{k,i}, \qquad P_{ij} = -\overline{\rho}\widetilde{u_i''u_k''}\widetilde{u}_{j,k} - \overline{\rho}\widetilde{u_j''u_k''}\widetilde{u}_{i,k}
$$

et les constants prennent les valeurs

$$
C_1 = 3.0, \qquad C_2 = 0.4 \quad .
$$

Modèle SSG

Le modèle de Speziale *et al.* [18] s'écrit

$$
\begin{aligned}
\Pi_1 + \Pi_2 = \; & -\left(C_1\overline{\rho}\varepsilon + C_1^* P_{kk}\right) b_{ij} + C_2\overline{\rho}\varepsilon\left(b_{ik}b_{kj} - \tfrac{1}{3}II\delta_{ij}\right) \\
& + \left(C_3 - C_3^* II^{1/2}\right)\overline{\rho}k\left(\overline{S}_{ij} - \tfrac{1}{3}\overline{S}_{kk}\delta_{ij}\right) \\
& + C_4\overline{\rho}k\left(b_{ik}\overline{S}_{jk} + b_{jk}\overline{S}_{ik} - \tfrac{2}{3}b_{kl}\overline{S}_{kl}\delta_{ij}\right) \\
& + C_5\overline{\rho}k\left(b_{ik}\overline{\omega}_{jk} + b_{jk}\overline{\omega}_{ik}\right)
\end{aligned}
\qquad (A.2)
$$

Les constants prennent les valeurs

$C_1 = 3.4$, $C_1^* = 1.80$, $C_2 = 4.2$, $C_3 = 0.8$, $C_3^* = 1.3$, $C_4 = 1.25$, $C_5 = 0.4$.

Modèle FLT

Le modèle de Fu *et al.* [19] s'écrit

$$\begin{aligned}
\Pi_1 + \Pi_2 \; = \; & -C_1\overline{\rho}\varepsilon b_{ij} + C_2\overline{\rho}\varepsilon\left(b_{ik}b_{kj} - \frac{1}{3}II\delta_{ij}\right) + \frac{4}{5\overline{\rho}}k\left(\overline{S}_{ij} - \frac{1}{3}\overline{S}_{kk}\delta_{ij}\right) \\
& + \frac{6}{5}\overline{\rho}k\left(b_{ik}\overline{S}_{jk} + b_{jk}\overline{S}_{ik} - \frac{2}{3}b_{kl}\overline{S}_{kl}\delta_{ij}\right) + \frac{26}{15}\overline{\rho}k\left(b_{ik}\overline{\omega}_{jk} + b_{jk}\overline{\omega}_{ik}\right) \\
& + \frac{4}{5}\overline{\rho}k\left(b_{ik}b_{kl}\overline{S}_{jl} + b_{jk}b_{kl}\overline{S}_{il} - 2b_{ik}b_{lj}\overline{S}_{kl} - 3b_{kl}b_{ij}\overline{S}_{kl}\right) \\
& + \frac{4}{5}\overline{\rho}k\left(b_{ik}b_{kl}\overline{\omega}_{jl} + b_{jk}b_{kl}\overline{\omega}_{il}\right) - \frac{14}{5}\overline{\rho}k\left[8II_b\left(b_{ik}\overline{\omega}_{jk} + b_{jk}\overline{\omega}_{ik}\right)\right. \\
& \left. + 12\left(b_{ik}b_{kl}\overline{\omega}_{lm}b_{mj} + b_{jk}b_{kl}\overline{\omega}_{lm}b_{mi}\right)\right] . \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}$$

Les coefficients sont definis par

$$C_1 = -120II_b\sqrt{F} - 2\sqrt{F} + 2 , \quad C_2 = 144II_b\sqrt{F} ,$$

$$F = 1 + 9\,II_b + 27\,III_b ,$$

$$II_b = -\frac{1}{2}b_{ij}b_{ji} , \quad III_b = \frac{1}{3}b_{ij}b_{jk}b_{ki} .$$

Annexe B

Détermination des coefficients de la diffusion

Lele [90] a établi une condition de consistence physique qui peut servir à réduire le nombre des constantes dans un modèle de transport. Il observe que la vitesse caractéristique associée au mécanisme diffusif est finie. Pour des vitesses de diffusion quelconque, on peut bien construire un cas où il existe une dissipation ε dans une région où l'énergie de la turbulence est zéro ou à l'inverse. Cela étant une situation non-physique, Lele pose l'égalité des vitesses de diffusion de la dissipation et de l'énergie cinétique turbulente.

On considère une source plane dans le plan $[x, y]$ qui emet de la turbulence isotrope dans un fluide initialement au répos. La plupart des modélisations à deux équations ou au transport des composantes du tenseur s'écrivent dans ce cas:

$$\partial_t q^2 + \partial_z \left(-\alpha \frac{q^2}{\varepsilon} \frac{\partial q^2}{\partial z} \right) = -2\varepsilon \tag{B.1}$$

$$\partial_t \varepsilon + \partial_z \left(-\beta \frac{q^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) = -\Psi \frac{\varepsilon^2}{q^2} \quad , \tag{B.2}$$

où q^2 est l'intensité turbulent, $q^2 = 2k$, et la diffusion moléculaire a été negligée devant la contribution turbulente.

Les constantes dependent des modèles utilisés. Dans le cas présent d'un transport isotrope par gradient (3.10), il vient

$$\alpha = \frac{C_\mu}{4\sigma_{ij}}, \quad \beta = \frac{C_\mu}{4\sigma_\varepsilon}, \quad \Psi = 2C_{\varepsilon 2} \quad . \tag{B.3}$$

La résolution du système (B.1) et (B.2) après un temps initiale mène à la condition suivante pour l'égalité de la vitesse de diffusion [90]

$$\frac{\beta}{\alpha} = 6\left[\sqrt{\Psi^2+1} - \Psi\right] \quad . \tag{B.4}$$

Si on fixe la valeur de $C_{\varepsilon 2}$, qui détermine la decroissance de la turbulence isotrope, à la valeur standarde de $C_{\varepsilon 2} = 1.92$, il vient:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_\varepsilon} = 0.7684 \quad . \tag{B.5}$$

Lele propose de fixer β par reference au calcul des couches limites ce qui donne ensuite σ_{ij}. Dans le cadre d'un modèle k-ε, la valeur habituelle $\sigma_\varepsilon = 1.3$ donne $\sigma_{ij} = 0.9989$ qui est assez proche de la valeur standard ($\sigma_{ij} = 1.0$).

Une méthode pour déterminer la valeur de σ_ε en fonction des autres constantes a été proposée par Abid et Speziale [69]. Il s'agit d'une condition de consistence pour la prédiction de la zone logarithmique d'un écoulement pariétale en equilibre. Les auteurs developpent la condition pour un modèle avec une diffusion géneralisée, mais cela s'applique également au cas présent d'une diffusion isotrope. Dans le cas d'un fluide incompressible, l'équation pour la dissipation (3.17) s'écrit

$$0 = C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}\mathcal{P} - C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k} + \partial_y\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\partial_y(\varepsilon)\right) \quad , \tag{B.6}$$

car la convection est zéro et las gradients longitudinaux sont négligeable.

On introduit maintenant les hypothèses et définitions utilisées pour la zone logarithmique (voir chapitre 4.4.1):

$$\mathcal{P} = \varepsilon\,, \quad \nu_t = C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}\,, \quad \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa\, y}\,, \quad k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad . \tag{B.7}$$

Aprés manipulation algebrique, on obtient l'expression suivant,

$$\sigma_\varepsilon = \frac{\kappa^2}{\sqrt{C_\mu}\,(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1})} \quad . \tag{B.8}$$

Avec $C_\mu = 0.09$, $C_{\varepsilon 2} = 1.92$ et $C_{\varepsilon 1} = 1.44$, on calcule une valeur de $\sigma_\varepsilon = 1.225$ pour obtenir une constante de von Kàrmàn de $\kappa = 0.42$.

Ensuite, la condition de Lele (B.5) donne pour le nombre de Schmidt turbulent associé aux tensions une valeur de $\sigma_{ij} = 0.9413$.

Annexe C

Les matrices du système convectif complét

La matrice jacobienne associée aux flux convectif sous forme de consérvation du système (4.7) s'écrit

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{Q}} = J =$$

$$\left[\begin{array}{ccccc}
0 & n_x & n_y & 0 & 0 \\
n_x \Phi - u \vec{v}\vec{n} & \vec{v}\vec{n} + u n_x (2-\gamma) & u n_y - v n_x \Gamma & n_x \Gamma & \frac{n_x}{2}(3-\gamma) \\
n_y \Phi - v \vec{v}\vec{n} & v n_x - u n_y \Gamma & \vec{v}\vec{n} + v n_y (2-\gamma) & n_y \Gamma & -\frac{n_y \Gamma}{2} \\
\begin{array}{c} \vec{v}\vec{n}\Phi - \vec{v}\vec{n} H_t \\ -n_x \left(\widetilde{uu}u + \widetilde{uv}v\right) \\ -n_y \left(\widetilde{uv}u + \widetilde{vv}v\right) \end{array} & \begin{array}{c} n_x H_t - \vec{v}\vec{n}\Gamma u \\ +\widetilde{uu}n_x + \widetilde{uv}n_y \end{array} & \begin{array}{c} n_y H_t - \vec{v}\vec{n}\Gamma v \\ +\widetilde{uv}n_x + \widetilde{vv}n_y \end{array} & \vec{v}\vec{n}\gamma & \begin{array}{c} u n_x - \\ \frac{\vec{v}\vec{n}\Gamma}{2} \end{array} \\
-\widetilde{uu}\vec{v}\vec{n} & \widetilde{uu}n_x & \widetilde{uu}n_y & 0 & \vec{v}\vec{n} \\
-\widetilde{vv}\vec{v}\vec{n} & \widetilde{vv}n_x & \widetilde{vv}n_y & 0 & 0 \\
-\widetilde{ww}\vec{v}\vec{n} & \widetilde{ww}n_x & \widetilde{ww}n_y & 0 & 0 \\
-\widetilde{uv}\vec{v}\vec{n} & \widetilde{uv}n_x & \widetilde{uv}n_y & 0 & 0
\end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{ccc}
0 & 0 & 0 \\
-\frac{n_x \Gamma}{2} & -\frac{n_x \Gamma}{2} & n_y \\
\frac{n_y}{2}(3-\gamma) & -\frac{n_y \Gamma}{2} & n_x \\
\begin{array}{c} v n_y - \\ \frac{\vec{v}\vec{n}\Gamma}{2} \end{array} & -\frac{\vec{v}\vec{n}\Gamma}{2} & \vec{v}\vec{n} \\
\vec{v}\vec{n} & 0 & 0 \\
0 & \vec{v}\vec{n} & 0 \\
0 & 0 & \vec{v}\vec{n}
\end{array} \right] \tag{C.1}$$

La contribution de la partie non-conservative est représentée par la matrice

$$\overline{\overline{P}} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\,(n_x\,\widetilde{uu}\,u + n_y\,\widetilde{uv}\,u) & 2\,n_x\,\widetilde{uu} + 2\,\widetilde{uv}\,n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\,(n_x\,\widetilde{uv}\,v + n_y\,\widetilde{vv}\,v) & 0 & 2\,\widetilde{uv}\,n_x + 2\,n_y\,\widetilde{vv} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \begin{matrix} -\widetilde{uu}\,vn_x - \widetilde{uv}\,un_x \\ -\widetilde{uv}\,vn_y - \widetilde{vv}\,un_y \end{matrix} & \widetilde{uv}\,n_x + n_y\,\widetilde{vv} & n_x\,\widetilde{uu} + \widetilde{uv}\,n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{C.2}$$

Par définition (4.9), la matrice du système quasi-linéaire est la somme de la jacobienne J et de la contribution non-consérvative P.

Afin de simplifier les opérations algébriques, on transforme notre système qui est écrit en variables consérvatives $\vec{Q}$ en un système en variables primitives $\vec{U}$,

$$\begin{array}{rcccc} 0 & = & M^{-1}\cdot\partial_t\vec{Q} & + & M^{-1}\cdot A\cdot M\cdot M^{-1}\cdot\nabla\vec{Q} \\ & = & \partial_t\vec{U} & + & \tilde{A}\,\nabla\,\vec{U} \end{array} \quad , \tag{C.3}$$

avec

$$M = \frac{\partial\vec{U}}{\partial\vec{Q}}, \qquad \tilde{A} = M^{-1}\cdot A\cdot M\cdot \quad . \tag{C.4}$$

Les valeurs propres du système primitive sont identique à ceux du système originale. On choisit comme variables primitives le vecteur

$$\vec{U} = \left[\overline{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \overline{p}, \widetilde{u''u''}, \widetilde{v''v''}, \widetilde{w''w''}, \widetilde{u''v''}\right]^T \quad , \tag{C.5}$$

d'où la matrice de transformation

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{\widetilde{uu}}{2} + \frac{\widetilde{vv}}{2} + \frac{\widetilde{ww}}{2} & \rho\, u & \rho\, v & \frac{1}{\Gamma} & \frac{\rho}{2} & \frac{\rho}{2} & \frac{\rho}{2} & 0 \\ \widetilde{uu} & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ \widetilde{vv} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ \widetilde{ww} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ \widetilde{uv} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}, \qquad \text{(C.6)}$$

et son inverse

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \rho^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\left(u^2+v^2\right)\Gamma}{2} & -u\,\Gamma & -v\,\Gamma & \Gamma & -\frac{\Gamma}{2} & -\frac{\Gamma}{2} & -\frac{\Gamma}{2} & 0 \\ -\frac{\widetilde{uu}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\widetilde{vv}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 \\ -\frac{\widetilde{ww}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 \\ -\frac{\widetilde{uv}}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \end{bmatrix}. \qquad \text{(C.7)}$$

Aprés cette transformation, on obtient la matrice caractéristique du système primitive

$$\widetilde{A} =$$

$$\begin{bmatrix} \vec{v}\vec{n} & n_x\,\rho & n_y\,\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n_x\,\widetilde{uu}}{\rho} + \frac{\widetilde{uv}\,n_y}{\rho} & \vec{v}\vec{n} & 0 & \frac{n_x}{\rho} & n_x & 0 & 0 & n_y \\ \frac{n_y\,\widetilde{vv}}{\rho} + \frac{\widetilde{uv}\,n_x}{\rho} & 0 & \vec{v}\vec{n} & \frac{n_y}{\rho} & 0 & n_y & 0 & n_x \\ 0 & \rho\,n_x\,\widetilde{c}^2 & \rho\,n_y\,\widetilde{c}^2 & \vec{v}\vec{n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\left(n_x\,\widetilde{uu} + n_y\,\widetilde{uv}\right) & 0 & 0 & \vec{v}\vec{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\left(n_x\,\widetilde{uv} + n_y\,\widetilde{vv}\right) & 0 & 0 & \vec{v}\vec{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vec{v}\vec{n} & 0 \\ 0 & n_x\,\widetilde{uv} + n_y\,\widetilde{vv} & n_x\,\widetilde{uu} + n_y\,\widetilde{uv} & 0 & 0 & 0 & 0 & \vec{v}\vec{n} \end{bmatrix}, \qquad \text{(C.8)}$$

qui est considerablement plus simple que la matrice originale A.

Annexe D

Le solveur approché de Roe

Le point de départ pour une méthode de décomposition de differences de flux (*flux–difference splitting*) est la forme caractéristique du système monodimensionnel

$$\partial_t \vec{W} \,+\, \Lambda\,\partial_x \vec{W} \,=\, 0 \quad . \tag{D.1}$$

La discrétisation décentrée selon le signe des valeurs propres donne

$$\frac{\Delta\vec{W}}{\Delta t} + \Lambda^{+}\frac{\vec{W}_i - \vec{W}_{i-1}}{\Delta x} + \Lambda^{-}\frac{\vec{W}_{i+1} - \vec{W}_i}{\Delta x} = 0 \quad . \tag{D.2}$$

En remplacant les valeurs propres positives et negatives par

$$\Lambda^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\Lambda \pm |\Lambda|\right) \quad , \tag{D.3}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\vec{W}}{\Delta t} &+ \frac{1}{2}\Lambda\,\frac{\left(\vec{W}_{i+1} + \vec{W}_i\right) - \left(\vec{W}_i + \vec{W}_{i-1}\right)}{\Delta x} \\ &-\frac{1}{2}\,|\Lambda|\,\frac{\left(\vec{W}_{i+1} - \vec{W}_i\right) - \left(\vec{W}_i - \vec{W}_{i-1}\right)}{\Delta x} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{D.4}$$

Pour la retransformation en une formulation conservative,

$$\frac{\Delta\vec{Q}_i}{\Delta t} + \frac{\vec{F}_{i+1/2} - \vec{F}_{i-1/2}}{\Delta x} = 0 \quad , \tag{D.5}$$

en utilisant des identités

$$R\cdot\Lambda\cdot R^{-1} = A \tag{D.6}$$

$$R\cdot|\Lambda|\cdot R^{-1} = |A| \tag{D.7}$$

$$R\cdot\vec{W} = \vec{Q} \tag{D.8}$$

$$R\cdot\Delta\vec{W} = \Delta\vec{Q} \tag{D.9}$$

$$A\cdot\vec{Q} = \vec{F}\left(\vec{Q}\right) \quad , \tag{D.10}$$

on obtient la forme générale du *flux-difference splitting*

$$\vec{F}_{1+1/2} = \frac{1}{2}\left[\vec{F}_c\left(\vec{Q}_i\right) + \vec{F}_c\left(\vec{Q}_{i+1}\right) - \left|\hat{A}\right|\left(\vec{Q}_{i+1} - \vec{Q}_i\right)\right] \quad . \tag{D.11}$$

Roe [51] cherche une matrice $\hat{A}$ qui respecte la propriété conservative dans le cas discrèt

$$\Delta \vec{F} = \hat{A} \cdot \Delta \vec{Q} \quad , \tag{D.12}$$

et qui se réduit à la jacobienne dans la limite d'un état $\vec{Q}$ qui est constant

$$\hat{A} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{Q}} \qquad \text{si} \qquad \Delta \vec{Q} = 0 \quad . \tag{D.13}$$

Un bilan des équations de consérvation à travers une discontinuité donne

$$\int_{||} \left(\vec{F}_c - \vec{d}\vec{Q}\right)_1 + \left(\vec{F}_c - \vec{d}\vec{Q}\right)_2 \vec{n}\, \mathrm{d}\sigma = 0 \quad , \tag{D.14}$$

et pour le cas monodimensionnel

$$\left[\vec{F}_c\right] = \vec{d}\left[\vec{Q}\right] \quad , \tag{D.15}$$

où les crochets $[\cdot]$ désignent un saut de Rankine–Hugoniot et $\vec{d}$ est la vitesse de déplacement de la discontinuité. Par définition (D.12), les valeurs propres de la matrice $\hat{A}$ verifient la condition de saut.

Pour la construction de la matrice $\hat{A}$ de la façon de Roe [51] pour notre système qui inclut l'énergie turbulente k, on se place dans une situation monodimensionnelle. L'extension au cas 2D ou 3D ne change pas le résultat.

- En définissant un vecteur paramétrique

  $$\vec{z} = \sqrt{\bar{\rho}}\left[1, \tilde{u}, \widetilde{H}, k\right]^T \quad , \tag{D.16}$$

  on remarque que les variables $\vec{Q}^1$ et les flux $\vec{F}_c^1$ (donnés par (4.25)) sont des fonctions quadratiques de $\vec{z}$:

  $$\vec{Q}^1 = \begin{bmatrix} z_1^2 \\ z_1 z_2 \\ \frac{z_1 z_3}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma}\left[z_2^2/2 + z_1 z_4\right] \\ z_1 z_4 \end{bmatrix} \quad , \tag{D.17}$$

  $$\vec{F}_c^1 = \begin{bmatrix} z_1 z_2 \\ z_2^2 \frac{\gamma+1}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma}\left(z_1 z_3 - z_1 z_4\right) \\ z_3 z_2 \\ z_4 z_2 \end{bmatrix} \quad . \tag{D.18}$$

- Pour des fonctions quadratiques quelconques, il s'applique le théoréme des valeurs moyennes

$$\delta\,(a \cdot b)_{i+1/2} \;=\; \bar{a}_{i+1/2}\,\delta\,(b)_{i+1/2} \,+\, \bar{b}_{i+1/2}\,\delta\,(a)_{i+1/2} \quad , \qquad \text{(D.19)}$$

  où $\delta\,(a)_{i+1/2} = a_{i+1} - a_i$ est une variation discréte et $\bar{a}_{i+1/2} = (a_{i+1} + a_i)/2$ est la moyenne arithmétique.

- L'application à $\vec{Q}$ et $\vec{F}_c$ donne

$$\vec{Q}_{i+1} - \vec{Q}_i \;=\; \overline{\overline{B}}\;(\vec{z}_{i+1} - \vec{z}_i) \quad , \qquad \text{(D.20)}$$

  où

$$\overline{\overline{B}} \;=\; \begin{bmatrix} 2\overline{z}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{z}_2 & \overline{z}_1 & 0 & 0 \\ \frac{\overline{z}_3}{\gamma} + \overline{z}_4\frac{\gamma-1}{\gamma} & \overline{z}_2\frac{\gamma-1}{\gamma} & \frac{\overline{z}_1}{\gamma} & \overline{z}_1\frac{\gamma-1}{\gamma} \\ \overline{z}_4 & 0 & 0 & \overline{z}_1 \end{bmatrix} \quad , \qquad \text{(D.21)}$$

  et

$$\vec{F}_{i+1} - \vec{F}_i \;=\; \overline{\overline{C}}\;(\vec{z}_{i+1} - \vec{z}_i) \quad , \qquad \text{(D.22)}$$

$$\overline{\overline{C}} \;=\; \begin{bmatrix} \overline{z}_2 & \overline{z}_1 & 0 & 0 \\ (\overline{z}_3 - \overline{z}_4)\frac{\gamma-1}{\gamma} & \overline{z}_2\frac{\gamma+1}{\gamma} & \overline{z}_1\frac{\gamma-1}{\gamma} & -\overline{z}_1\frac{\gamma-1}{\gamma} \\ \overline{z}_1\frac{\gamma-1}{\gamma} & & & \\ 0 & \overline{z}_4 & 0 & \overline{z}_2 \end{bmatrix} \quad . \qquad \text{(D.23)}$$

- On substitue (D.20) dans (D.22) qui donne

$$\Delta\vec{F}_c \;=\; \overline{\overline{C}} \cdot \overline{\overline{B}}^{-1} \cdot \Delta\vec{Q} \quad . \qquad \text{(D.24)}$$

  Par comparaison avec (D.12) on a la définition

$$\hat{A} \;=\; \overline{\overline{C}} \cdot \overline{\overline{B}}^{-1} \quad . \qquad \text{(D.25)}$$

- On remarque que la matrice $\hat{A}$ qui est donnée par l'expression (D.25) correspond à la matrice jacobienne du système si on calcule les variables "primitives" par une moyenne ponderée par la masse volumique:

$$\hat{\varphi} \;\equiv\; \frac{\sqrt{\rho_i}\varphi_i + \sqrt{\rho_j}\varphi_j}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}, \qquad \varphi \;=\; \{\tilde{u}_i, \widetilde{H}, k\} \quad . \qquad \text{(D.26)}$$

  On remarque que la forme de la moyenne de Roe ne change pas en présence de l'énergie turbulente dans ce système réduit.

Annexe E

La diagonalisation du système réduit en trois dimensions

$$\vec{Q}^1 = \left[\overline{\rho}, \overline{\rho}\widetilde{u}, \overline{\rho}\widetilde{v}, \overline{\rho}\widetilde{w}, \overline{\rho}\widetilde{e}_T, \overline{\rho}k\right]^T \;, \quad Q^2 = \overline{\rho}\widetilde{u''u''},$$

$$Q^3 = \overline{\rho}\widetilde{v''v''}, \quad Q^4 = \overline{\rho}\widetilde{u''v''}, \quad Q^5 = \overline{\rho}\widetilde{u''w''}, \quad Q^6 = \overline{\rho}\widetilde{v''w''}, \quad Q^7 = \overline{\rho}\varepsilon$$

$$\vec{F}_c^1 = \begin{bmatrix} \overline{\rho}\vec{v} \\ \vec{v}\left(\overline{\rho}\vec{v} + \overline{p}\overline{\overline{I}}\right) \\ \vec{v}\left(\overline{\rho}\widetilde{e}_T + \overline{p}\right) \\ \vec{v}\overline{\rho}k \end{bmatrix}, \quad F_c^k\Big]_{k=2}^{7} = \vec{v}\,Q^k \quad . \tag{E.1}$$

$$R =$$

$$\begin{bmatrix}
n_x & n_y & n_z & \frac{1}{\widetilde{c}^2} & \frac{1}{\widetilde{c}^2} & 0 \\
\widetilde{u}n_x & \widetilde{u}n_y - \overline{\rho}n_z & \widetilde{u}n_z + \overline{\rho}n_y & \frac{\widetilde{u}+n_x\,\widetilde{c}}{\widetilde{c}^2} & \frac{\widetilde{u}-n_x\,\widetilde{c}}{\widetilde{c}^2} & 0 \\
\widetilde{v}n_x + \overline{\rho}n_z & \widetilde{v}n_y & \widetilde{v}n_z - \overline{\rho}n_x & \frac{\widetilde{v}+n_y\,\widetilde{c}}{\widetilde{c}^2} & \frac{\widetilde{v}-n_y\,\widetilde{c}}{\widetilde{c}^2} & 0 \\
\widetilde{w}n_x - \overline{\rho}n_y & \widetilde{w}n_y + \overline{\rho}n_x & \widetilde{w}n_z & \frac{\widetilde{w}+n_z\,\widetilde{c}}{\widetilde{c}^2} & \frac{\widetilde{w}-n_z\,\widetilde{c}}{\widetilde{c}^2} & 0 \\
\begin{matrix} n_x(q^2+k)+ \\ \overline{\rho}(\widetilde{v}n_z - \widetilde{w}n_y) \end{matrix} & \begin{matrix} n_y(q^2+k)+ \\ \overline{\rho}(\widetilde{w}n_x - \widetilde{u}n_z) \end{matrix} & \begin{matrix} n_z(q^2+k)+ \\ \overline{\rho}(\widetilde{u}n_y - \widetilde{v}n_x) \end{matrix} & \frac{\widetilde{H}}{\widetilde{c}^2} + \frac{\vec{\widetilde{v}}\vec{n}}{\widetilde{c}} & \frac{\widetilde{H}}{\widetilde{c}^2} - \frac{\vec{v}\vec{n}}{\widetilde{c}} & 1 \\
n_xk & n_yk & n_zk & \frac{k}{\widetilde{c}^2} & \frac{k}{\widetilde{c}^2} & 1
\end{bmatrix} , \tag{E.2}$$

$$R^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix}
\begin{array}{c} n_x(1-q^2\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2})+ \\ \frac{\widetilde{w}n_y-\widetilde{v}n_z}{\overline{\rho}} \end{array} & n_x\widetilde{u}\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2} & \begin{array}{c} \frac{n_z}{\overline{\rho}}+ \\ n_x\widetilde{v}\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2} \end{array} & \begin{array}{c} \frac{n_y}{\overline{\rho}}+ \\ n_x\widetilde{w}\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2} \end{array} & -n_x\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2} & n_x\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2} \\
\begin{array}{c} n_y(1-q^2\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2})+ \\ \frac{\widetilde{w}n_x-\widetilde{u}n_z}{\overline{\rho}} \end{array} & \begin{array}{c} \frac{-n_z}{\overline{\rho}}+ \\ n_y\widetilde{u}\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2} \end{array} & n_y\widetilde{v}\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2} & \begin{array}{c} \frac{n_x}{\overline{\rho}}+ \\ n_y\widetilde{w}\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2} \end{array} & -n_y\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2} & \frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2} \\
\begin{array}{c} n_z(1-q^2\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2})+ \\ \frac{\widetilde{u}n_y-\widetilde{v}n_x}{\overline{\rho}} \end{array} & \begin{array}{c} \frac{n_y}{\overline{\rho}}+ \\ n_z\widetilde{u}\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2} \end{array} & \begin{array}{c} \frac{-n_x}{\overline{\rho}}+ \\ n_z\widetilde{v}\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2} \end{array} & n_z\widetilde{w}\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2} & -n_z\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2} & n_z\frac{\Gamma}{\widetilde{c}^2} \\
\frac{q^2\Gamma}{2}-\frac{\widetilde{c}\vec{v}\vec{n}}{2} & \frac{n_x\widetilde{c}}{2}-\frac{\widetilde{u}\Gamma}{2} & \frac{n_y\widetilde{c}}{2}-\frac{\widetilde{v}\Gamma}{2} & \frac{n_z\widetilde{c}}{2}-\frac{\widetilde{w}\Gamma}{2} & \frac{\Gamma}{2} & \frac{-\Gamma}{2} \\
\frac{q^2\Gamma}{2}+\frac{\widetilde{c}\vec{v}\vec{n}}{2} & -\frac{n_x\widetilde{c}}{2}-\frac{\widetilde{u}\Gamma}{2} & -\frac{n_y\widetilde{c}}{2}-\frac{\widetilde{v}\Gamma}{2} & -\frac{n_z\widetilde{c}}{2}-\frac{\widetilde{w}\Gamma}{2} & \frac{\Gamma}{2} & \frac{-\Gamma}{2} \\
-k & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} . \tag{E.3}$$

Annexe F

Changement de repère à la paroi

La transformation entre le repère $[x, y, z]$ et le repère locale $[n, t, s]$ s'effectue par le changement de base

$$\tau_{nts} = A \cdot \tau_{xyz} \cdot A^{-1} \quad , \tag{F.1}$$

où A signifie la matrice jacobienne de la transformation, qui s'écrit

$$A = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ t_x & t_y & t_z \\ s_x & s_y & s_z \end{bmatrix} \quad . \tag{F.2}$$

En considérant que la déterminant $|A|$ de la rotation reste unitaire, on a pour l'inverse

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} t_y s_z - t_z s_y & -n_y s_z + n_z s_y & n_y t_z - n_z t_y \\ -t_x s_z + t_z s_x & n_x s_z - n_z s_x & -n_x t_z + n_z t_x \\ t_x s_y - t_y s_x & -n_x s_y + n_y s_x & n_x t_y - n_y t_x \end{bmatrix} \quad . \tag{F.3}$$

Avec les valeurs des tensions dans le repère locale,

$$\tau_{nts} = \overline{\rho}\, k \begin{bmatrix} \frac{37}{150} & -\sqrt{C_\mu} & 0 \\ -\sqrt{C_\mu} & \frac{353}{300} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{137}{300} \end{bmatrix} \quad , \tag{F.4}$$

il vient pour le cas tridimensionnel (en considérant $C_\mu = 0.09$):

$$\frac{\widetilde{u''u''}}{k} = \frac{37\, n_x\, t_y\, s_z}{150} - \frac{37\, n_x\, t_z\, s_y}{150} + \frac{3\, n_x\, n_y\, s_z}{10} - \frac{3\, n_x\, n_z\, s_y}{10} - \frac{3\, t_x\, t_y\, s_z}{10}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{3\,t_x\,t_z\,s_y}{10}-\frac{353\,t_x\,n_y\,s_z}{300}+\frac{353\,t_x\,n_z\,s_y}{300}+\frac{137\,s_x\,n_y\,t_z}{300}-\frac{137\,s_x\,n_z\,t_y}{300}\\
\frac{\widetilde{v''v''}}{k} &= -\frac{37\,t_x\,n_y\,s_z}{150}+\frac{37\,s_x\,n_y\,t_z}{150}-\frac{3\,n_x\,n_y\,s_z}{10}+\frac{3\,n_y\,n_z\,s_x}{10}+\frac{3\,t_x\,t_y\,s_z}{10}\\
& -\frac{3\,t_y\,t_z\,s_x}{10}+\frac{353\,n_x\,t_y\,s_z}{300}-\frac{353\,s_x\,n_z\,t_y}{300}-\frac{137\,n_x\,t_z\,s_y}{300}+\frac{137\,t_x\,n_z\,s_y}{300}\\
\frac{\widetilde{u''v''}}{k} &= -\frac{93\,n_y\,t_y\,s_z}{100}+\frac{21\,n_y\,t_z\,s_y}{100}+\frac{3\,n_y^2 s_z}{10}-\frac{3\,n_y\,n_z\,s_y}{10}-\frac{3\,t_y^2 s_z}{10}\\
& +\frac{3\,t_y\,t_z\,s_y}{10}+\frac{18\,t_y\,n_z\,s_y}{25}\\
\frac{\widetilde{u''w''}}{k} &= -\frac{21\,n_z\,t_y\,s_z}{100}+\frac{93\,n_z\,t_z\,s_y}{100}+\frac{3\,n_z\,n_y\,s_z}{10}-\frac{3\,n_z^2 s_y}{10}-\frac{3\,t_z\,t_y\,s_z}{10}\\
& +\frac{3\,t_z^2 s_y}{10}-\frac{18\,t_z\,n_y\,s_z}{25}\\
\frac{\widetilde{v''w''}}{k} &= \frac{21\,n_z\,t_x\,s_z}{100}-\frac{93\,n_z\,t_z\,s_x}{100}-\frac{3\,n_z\,n_x\,s_z}{10}+\frac{3\,n_z^2 s_x}{10}+\frac{3\,t_z\,t_x\,s_z}{10}\\
& -\frac{3\,t_z^2 s_x}{10}+\frac{18\,t_z\,n_x\,s_z}{25}\\
\frac{\widetilde{w''w''}}{k} &= \frac{37\,t_x\,n_z\,s_y}{150}-\frac{37\,s_x\,n_z\,t_y}{150}+\frac{3\,n_x\,n_z\,s_y}{10}-\frac{3\,n_y\,n_z\,s_x}{10}-\frac{3\,t_x\,t_z\,s_y}{10}\\
& +\frac{3\,t_y\,t_z\,s_x}{10}-\frac{353\,n_x\,t_z\,s_y}{300}+\frac{353\,s_x\,n_y\,t_z}{300}+\frac{137\,n_x\,t_y\,s_z}{300}\\
& -\frac{137\,t_x\,n_y\,s_z}{300} \qquad .
\end{aligned}
\tag{F.5}
$$