

Abbildung 13: Histogramm des Winkels α zwischen dem kleinskaligen Wirbelstärkevektor $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ und dem Interaktionsterm $\boldsymbol{\omega}^{(0)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{(1)}$, akkumuliert über 13 zeitlich aufeinanderfolgende Strömungsfelder mit jeweiligem Abstand t_{kol} .

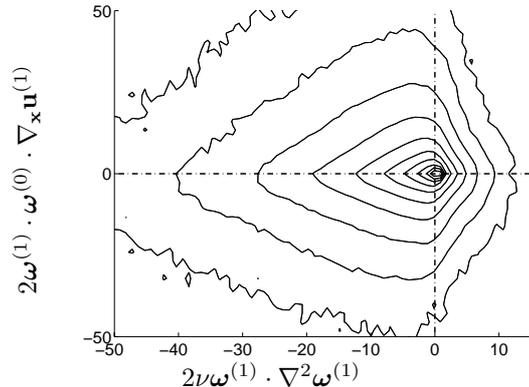


Abbildung 14: Zweidimensionales Histogramm des viskosen Terms $2\nu\boldsymbol{\omega}^{(1)} \cdot \nabla^2\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ und des Interaktionsterms $2\boldsymbol{\omega}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(0)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{(1)}$ der kleinskaligen Enstrophiegleichung für ein Feld der Serie 512_b. Beide Größen sind normalisiert mit ihrer Standardabweichung. Die Kontourlinien sind logarithmisch aufgeteilt und verlaufen monoton mit Maximum nahe dem Ursprung.

5 Zusammenfassung

In diesem Projekt wird ein neuer theoretischer Ansatz zur Erklärung der detaillierten Mechanismen verfolgt, die die turbulente Energiekaskade in einer voll ausgebildeten turbulenten Strömung aufrechterhalten. Die Schlüsselidee dieses Ansatzes beruht auf den in der Literatur veröffentlichten Beobachtungen, daß

1. ein turbulentes Energiespektrum nach dem Kolmogoroffschen $k^{-5/3}$ -Gesetz die Präsenz singularer Strukturen voraussetzt [22], und daß
2. ein kontinuierliches Energiespektrum nicht zwangsläufig bedeutet, daß auch lokal sämtliche im Spektrum vertretenen Längenskalen vertreten sind. Vielmehr kann ein stochastisches Ensemble skalenseparierter Ereignisse ebenfalls zu einem kontinuierlichen Spektrum führen.

Ausgehend hiervon wurde eine asymptotische Theorie für die Entwicklung kleinskaliger Störungen in einem größerskaligen Strömungshintergrund entwickelt. Diese Theorie ist insofern attraktiv als sie unabhängig von speziellen Annahmen über Isotropie, Homogenität, etc., der Strömungsturbulenz gelten sollte, und als sie ein sehr allgemeines deterministisches Bild der Entstehung kleinskaliger Fluktuationen in turbulenten Strömungen entwirft. Ziel des Projekts ist die Verifikation bzw. Widerlegung dieser Theorie. Die bisher durchgeführten Arbeitsschritte sollen hier nochmals kurz zusammengefaßt und kommentiert werden:

Zeitaufgelöste direkte numerische Simulationen Dem Anspruch der allgemeinen Gültigkeit der Theorie Rechnung tragend wurden mit homogen-isotroper Turbulenz und mit turbulenten Kanalströmungen zwei sehr unterschiedliche Strömungsfälle betrachtet. Um die Entstehung kleinskaliger Störungen im Detail verfolgen zu können, wurden zeitlich sehr hoch aufgelöste Simulationen benötigt. Für den Fall homogen-isotroper Turbulenz waren entsprechende Simulationsdaten vom Center for Turbulence Research (CTR) an der Stanford University angekündigt worden. Aus uns nicht bekannten Gründen konnten die Simulationen am CTR dann aber doch nicht umgesetzt

werden. Stattdessen stellte uns Dr. Alan Wray seinen Simulationscode für eigene Berechnungen zur Verfügung.

Im Rahmen der Projektarbeiten wurden also umfangreiche Datenbanken sowohl zu homogen-isotroper als auch zur Kanalturbulenz selbst erzeugt. Wir konnten dazu dankenswerterweise auf beträchtliche Computerressourcen am Konrad Zuse Zentrum für Informationstechnik, Berlin, (ZIB) zugreifen.

Die Portierung des Wrayschen Codes und die Erzeugung der Daten zur homogen-isotropen Turbulenz waren im ursprünglichen Arbeitsprogramm nicht vorgesehen, weshalb es zu beträchtlichen Verzögerungen im Vergleich zum ursprünglichen Zeitplan gekommen ist. Andererseits stehen nunmehr Simulationsdaten mit einer weltweit wahrscheinlich einmaligen zeitlichen Auflösung zur Verfügung. Die Dokumentation und Verfügbarmachung dieser Daten für weiterführende Forschungsarbeiten auch anderer Arbeitsgruppen ist Teil des Folgeantrags für das dritte Projektjahr.

Suchstrategien für „Kandidaten“ In den direkten Simulationsdaten sind lokale Strömungskonfigurationen aufzuspüren innerhalb derer sich kleinskalige Störungen gemäß der dem Projekt zugrundeliegenden Theorie entwickeln. Hierzu lassen sich zwei Klassen von Suchstrategien unterscheiden. Die erste Strategie besteht darin, zunächst eine möglichst abstrakte, von der Theorie unabhängige Zerlegung des Strömungsfeldes in klein- und großskalige Anteile vorzunehmen, und anschließend zu testen, ob diese Strömungsanteile sich kompatibel zur Theorie verhalten. Beim zweiten Ansatz werden möglichst viele Informationen der Theorie bereits genutzt, um die Skalenzerlegung vorzunehmen.

Der Vorteil der ersten Strategie ist ihre Allgemeinheit bzw. Vorurteilsfreiheit. Ihr Nachteil ist, daß eine abstrakte Skalenzerlegungen nicht unterscheidet, ob es sich bei einer kleinskaligen Struktur um eine der gesuchten Störungen in ihrer Wachstumsphase, oder um eine voll ausgebildete Struktur handelt, deren Amplitude bereits über das Gültigkeitsregime der asymptotischen Theorie hinausgegangen ist. Bei dieser Strategie ist die Suche nach Kandidaten sehr subtil.

Der Vorteil der zweiten Strategie ist, daß sie direkt auf das angenommene asymptotische Regime zuzuschneiden ist, und somit viel direkter auf die gesuchten Kandidaten führen sollte. Ihr Nachteil ist, daß die explizite Nutzung der zu überprüfenden Theorie selbst bei der Konstruktion von Analysemethoden letztlich die Aussagekraft der zu erhaltenden Ergebnisse schwächt. Es ist bei diesem Vorgehen nur schwer zu überprüfen, inwieweit die Konstruktion der Analysetechnik das Ergebnis schon präjudiziert.

In den bisherigen Arbeiten haben wir uns auf die erste Analysestrategie konzentriert und haben Fourier- und Wavelet-Zerlegungen zur Identifikation klein- und großskaliger Strömungsanteile eingesetzt.

Bisherige Ergebnisse Die im Bericht ausführlicher dargestellten Ergebnisse sind bisher zwar sämtlich kompatibel mit der postulierten Theorie. Jedoch konnte bisher umgekehrt auch noch kein überzeugender Nachweis für deren Gültigkeit geführt werden. Allerdings konnten wir, aufgrund des oben erläuterten Zeitverzugs im Zusammenhang mit der Simulation der homogen-isotropen Strömungsfälle, die eigentliche Analyse der Simulationsdaten auch noch nicht zum angestrebten Abschluß bringen (s. auch Arbeitsprogramm des Folgeantrags).

Wavelet-Analysemethoden Im Rahmen der oben erläuterten ersten Suchstrategie wird eine abstrakte Skalenzerlegung für die Strömungsdaten benötigt. Hierfür bieten sich moderne Wavelet-Methoden an. Es stellte sich allerdings heraus, daß die verfügbaren, in der Literatur dokumentierten Ansätze nur bedingt für die Zwecke dieses Projekts einsetzbar waren. Insbesondere fehlte eine Wavelet-Basis für endliche Intervalle, die eine energetische Interpretation der Wavelet-Amplituden erlaubt hätte. In Zusammenarbeit mit Dr. Jochen Fröhlich (Univ. Karlsruhe) konnte eine solche Wavelet-Basis für das Intervall im Rahmen dieses Projekts neu entwickelt werden. Diese Technik soll im dritten Projektjahr zum Einsatz kommen.

Fazit Es konnten umfangreiche, zeitlich hochaufgelöste direkte numerische Simulationen sowohl homogen-isotroper Turbulenz als auch von Kanalturbulenz (jeweils in drei Raumdimensionen) als Basis für die Projektarbeit erzeugt werden. Parallelisierte Software für die Simulationen sowie für Management und Analyse der umfangreichen Daten wurde bereitgestellt. Insbesondere konnte eine neue Wavelet-Basis für endliche Intervalle entwickelt werden, die sich für die Analyse direkter Simulationen turbulenter Kanalströmungen eignet. Erste Analysen der Simulationsdaten liefern zwar noch keinen eindeutigen Nachweis zur Gültigkeit der postulierten Theorie. Jedoch sind die bisherigen Ergebnisse sämtlich konsistent mit der Theorie, sodaß die Ausgangshypothese des Projekts sich bisher auch nicht widerlegen läßt.

Literatur

- [1] A. Chorin. *Vorticity and Turbulence*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.
- [2] J. Jiménez, A.A. Wray, P.G. Saffman, and R.S. Rogallo. The structure of intense vorticity in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 255:65–90, 1993.
- [3] J. Kim, P. Moin, and R. Moser. Turbulence statistics in a fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 177:133–166, 1987.
- [4] M. Uhlmann. The need for de-aliasing in a Chebyshev pseudo-spectral method. Technical Note No. 60, available under www.pik-potsdam.de/~uhlmann/projects.html, Potsdam Institute for Climate Impact Research, Potsdam, Germany, 2000.
- [5] R.D. Moser, J. Kim, and N.N. Mansour. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Phys. Fluids*, 11(4):943–945, 1999.
- [6] G.K. Batchelor. *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge U. Press, 1953.
- [7] U. Frisch. *Turbulence: The legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge U. Press, 1995.
- [8] M. Farge. Wavelet transforms and their applications to turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 24:395–457, 1992.
- [9] A. Grossmann and J. Morlet. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math. Anal.*, 15(4):723–736, 1984.
- [10] S.G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Trans. Pattern Analysis Mach. Intell.*, 11(7):674–693, 1989.
- [11] Y. Meyer. *Wavelets and operators*. Cambridge Univ. Press, 1992.
- [12] P.-G. Lemarié. Ondelettes à localisation exponentielle. *J. Math. pures et appl.*, 67:227–236, 1988.
- [13] B. Fischer and J. Prestin. Wavelets based on orthogonal polynomials. *Math. Comp.*, 66(220):1593–1618, 1997.
- [14] J. Fröhlich and M. Uhlmann. Wavelets based on Legendre polynomials. Technical Note No. 72, available under www.pik-potsdam.de/~uhlmann/projects.html, Potsdam Institute for Climate Impact Research, Potsdam, Germany, 2001.
- [15] C. Meneveau. Analysis of turbulence in the orthonormal wavelet representation. *J. Fluid Mech.*, 232:469–520, 1991.
- [16] K. Araki, K. Suzuki, K. Kishida, and S. Kishiba. Multiresolution approximation of the vector fields on T^3 . e-print on arXiv.org/abs/math-ph/9904015, 1999.

- [17] K. Kishida, K. Araki, S. Kishiba, and K. Suzuki. Local or nonlocal? Orthonormal divergence-free wavelet analysis of nonlinear interactions in turbulence. *Phys. Rev. Letters*, 83(26):5487–5490, 1999.
- [18] K. Kishida. *Analysis of turbulence in the orthonormal divergence-free wavelet representation*. PhD thesis, Hiroshima University, 2000.
- [19] M. Uhlmann. A parallel algorithm for the discrete orthogonal wavelet transform. Technical Note No. 68, available under www.pik-potsdam.de/~uhlmann/projects.html, Potsdam Institute for Climate Impact Research, Potsdam, Germany, 2000.
- [20] M. Farge, K. Schneider, and G. Pellegrino. Vortex tube extraction in three-dimensional turbulence using orthogonal wavelets. In C. Dopazo et al., editor, *Advances in Turbulence VIII*, Proc. 8th Eur. Turb. Conf., pages 797–800, Barcelona, Spain, 2000.
- [21] D.L. Donoho, I.M. Johnstone, G. Kerkycharian, and D. Picard. Wavelet shrinkage: Asymptopia? *J. R. Statist. Soc. B*, 57(2):301–369, 1995.
- [22] J.C. Vassilicos J.C.R. Hunt. Kolmogoroffs contributions to the physical understanding of small-scale turbulence and recent developments. *Proc. R. Soc. London, A*, 434:183–210, 1991.