Kleinskalige Instabilitäten als Bausteine der turbulenten Energiekaskade

DFG-Antrag auf Gewährung einer Sachbeihilfe

Arbeitsbericht für den 1.-24. Monat

Dr.-Ing. Markus Uhlmann, Prof. Dr.-Ing. Rupert Klein

Potsdam Institut für Klimafolgenforschung
Abteilung Data & Computation

und

FB Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin

29. Juli 2001

Zusammenfassung

Kolmogoroffs Theorie der „Energiekaskade“ besagt, daß die auf großen Skalen in eine turbulente Strömung eingespeiste Energie sukzessive auf immer kleinere Strukturen übertragen wird, um letztlich auf den kleinsten Skalen durch Reibung dissipiert zu werden. Eine Dimensionsanalyse für stationäre, homogene, isotrope Turbulenz liefert ein kontinuierliches Geschwindigkeits-Energiespektrum nach dem weithin akzeptierten Gesetz $E(k) \sim k^{-5/3}$. Zufriedenstellende Erklärungen existieren bis heute weder für den Energietransfermechanismus noch für die Details der Energiedissipation auf den kleinsten Längenskalen.
Ein Ensembel skalenseparierter Ereignisse kann ein kontinuierliches Spektrum bilden, wenn die an den Einzelereignissen beteiligten Längenmaße selbst stochastisch sind. Die Einzelereignisse sind dann trotz des kontinuierlichen Spektrums einer Mehrskalenasymptotik zugänglich. Eine solche zeigt, daß lokalisierte, drehungsfreie Geschwindigkeitsstörungen Wirbelstärke aus einem umgebenden Wirbelfeld abziehen und sich zu kleinskaligen, voll wirbelbehafteten Strukturen auswachsen können (s.u.). Als Arbeitshypothese wird angenommen, daß dieser Mechanismus sowohl den Energietransfer als auch, bei Einschluß der Reibung, die Energiedissipation erklären kann.
Das Ziel dieses Projekts ist es, diese Hypothese mit Hilfe gezielter Analysen zeitlich hoch aufgelöster direkter Simulationen turbulenter Strömungen zu verifizieren bzw. sie zu widerlegen.
In diesem Bericht fassen wir die im 1.-24. Monat der Projektlaufzeit durchgeführten Arbeiten. Diese umfassen insbesondere die Generierung einer für unsere Zwecke geeigneten Serie zeitlich hochaufgelöster direkter numerischer Simulationen homogen-isotroper- und Kanalturbulenz, die Entwicklung geeigneter Analysewerkzeuge zur Datenanalyse, sowie erste Ergebnisse im Hinblick auf die Bewertung der zentralen Hypothese des Projekts.

1 Theoretischer Ansatz

1.1 Die Rolle lokaler, kleinskaliger Instabilitäten

Die zentrale Idee des beantragten Projektes läßt sich anhand der folgenden vereinfachten Analyse erläutern. Wir betrachten die Navier-Stokes-Gleichungen inkompressibler Strömung konstanter Dichte:

$$\boldsymbol{v}_\tau + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} + \nabla p = \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \boldsymbol{v} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0\,. \quad (2)$$

Hierin sind $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}, \tau), p(\boldsymbol{\xi}, \tau)$ die Geschwindigkeits- und Druckfelder und $\boldsymbol{\xi}, \tau$ sind Orts- und Zeitkoordinaten. Der Nabla-Operator ∇ bezeichnet Ableitungen bezüglich $\boldsymbol{\xi}$.
Die hier postulierten skalenseparierten Ereignisse implizieren, daß sich die Strömung lokal anhand einer asymptotischen Entwicklung

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}, \tau; \varepsilon) = \boldsymbol{v}^{(0)}(\boldsymbol{\xi}, \tau) + \varepsilon \boldsymbol{v}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \tau) + \ldots \quad (3)$$

darstellen läßt. Dabei ist

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^{(0)}(\tau)) \quad (4)$$

eine gestreckte Ortskoordinate, die im Sinne einer Entwicklung vom Grenzschichttyp eine kleinskalige Umgebung eines zeitabhängigen Ortes $\boldsymbol{\xi}^{(0)}(\tau)$ auflöst. Wir suchen lokale, kleinskalige Ereignisse in Form von Störgeschwindigkeits feldern $\boldsymbol{v}^{(1)}$, die in der $\boldsymbol{x}$-Koordinate rasch abklingen.
Eine detailliertere Beschreibung dieses Ansatzes, der auch Reibungseinflüsse berücksichtigt, findet sich im beiliegenden ausführlichen Arbeitsbericht.

1.2 Skalierung des Reibungsterms

Unter dem Lösungsansatz (3) für das Geschwindigkeitsfeld entwickelt man den Reibungsterm zu

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\nabla^2\boldsymbol{v} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\left(\nabla^2_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{v}^{(0)} + \varepsilon\,(\frac{1}{\varepsilon^2}\nabla^2_{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{v}^{(1)} + \dots\right)\,. \tag{5}$$

Zunächst wird durch Vergleich der Terme in der Klammer auf der rechten Seite deutlich, daß die Reibungseffekte im betrachteten Regime vornehmlich die kleinskaligen Störungen betreffen. Für Störungen, die sich wie im Ansatz (3) angenommen, auf derselben Zeitskala entwickeln wie die Hintergrundströmung $\boldsymbol{v}^{(0)}$ muß gelten

$$\frac{1}{\varepsilon^2\mathrm{Re}} \le O(1) \qquad \text{für} \qquad \varepsilon \to 0\,, \tag{6}$$

da andernfalls die Störungen durch Reibungseffekte sehr schnell gedämpft würden. Im folgenden wird daher der gekoppelte Grenzübergang

$$\mathrm{Re} = \frac{1}{\varepsilon^2}\,\nu \qquad \text{mit} \qquad \nu = O(1) \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0 \tag{7}$$

betrachtet. Mit anderen Worten: Wir betrachten charakteristische Störungs-Längenskalen, für die die lokale Reynolds-Zahl $\varepsilon^2\mathrm{Re} = \nu = O(1)$ ist. Im Limes kleiner ν erhalten wir den reibungsfreien Grenzfall, der seinerzeit im Neuantrag zu diesem Projekt diskutiert wurde.

1.3 Gleichungen führender Ordnung in primitiven Variablen

Es zeigt sich, daß das die kleinskalige Störung umgebende Geschwindigkeitsfeld sich zunächst unabhängig von dieser Störung entwickelt. Das heißt, es gelten die Originalgleichungen für $\boldsymbol{v}^{(0)}$:

$$\boldsymbol{v}^{(0)}_\tau + \boldsymbol{v}^{(0)} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\ \boldsymbol{v}^{(0)} + \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\ p^{(0)} = 0\,, \tag{8}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \cdot \boldsymbol{v}^{(0)} = 0\,, \tag{9}$$

wobei $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}$ den Gradientenoperator bezüglich $\boldsymbol{\xi}$ bezeichnet. Insbesondere ist festzustellen, daß sich Reibungseffekte in der großskaligen Strömung führender Ordnung auf der betrachteten Zeitskala von einer typischen „eddy-turn-over time“dieser Strömung noch nicht bemerkbar machen. Die Reibungseffekte machen sich allerdings in den kleinskaligen Störungen bemerkbar, wie unten gezeigt wird.

1.4 Gleichungen führender Ordnung für die kleinskalige Struktur

Die zeitliche Entwicklung der Störgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}^{(1)}$ läßt sich sehr klar anhand der zugehörigen Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega}^{(1)} = \nabla\times\boldsymbol{v}^{(1)}$ herausarbeiten. Man findet zunächst aufgrund einer Sekulärbedingung im Sinne der Mehrskalenasymptotik eine Bewegungsgleichung für das Zentrum $\boldsymbol{\xi}^{(0)}(\tau)$:

$$\frac{d}{d\tau}\boldsymbol{\xi}^{(0)}(\tau) = \boldsymbol{v}^{(0)}(\boldsymbol{\xi}^{(0)}(\tau),\tau)\ . \tag{10}$$

Wie nicht anders zu erwarten, wird also die Störung konvektiv mit der großskaligen Hintergrundströmung transportiert. Die Wirbeltransportgleichung wird nun, unter Verwendung des mit (3) kompatiblen Ansatzes für die Wirbelstärke

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi},\tau;\varepsilon) = \boldsymbol{\omega}^{(0)}(\boldsymbol{\xi},\tau) + \boldsymbol{\omega}^{(1)}(\boldsymbol{x},\tau) + \varepsilon\boldsymbol{\omega}^{(2)}(\boldsymbol{x},\tau) + \dots\,, \tag{11}$$

entwickelt. Berücksichtigung der Bewegungsgleichung für das Störungszentrum (10) und der schon hergeleiteten Gleichungen (8), (9) für das Geschwindigkeitsfeld führender Ordnung liefert die modifizierte Wirbeltransportgleichung

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)}_\tau + \boldsymbol{v}^{(1)} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\ \boldsymbol{\omega}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(1)} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\ \boldsymbol{v}^{(1)} = \nu\,\nabla^2_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\omega}^{(1)} + R[\boldsymbol{\omega}^{(1)},\boldsymbol{v}^{(1)}]\,. \tag{12}$$

wobei $R[\boldsymbol{\omega}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(1)}]$ ein linearer Operator ist, der den Einfluß der Lösung führender Ordnung $(\boldsymbol{\omega}^{(0)}, \boldsymbol{v}^{(0)})$ auf die Störwirbelstärke repräsentiert:

$$R[\boldsymbol{\omega}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(1)}] = \boldsymbol{\omega}^{(1)} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\ \boldsymbol{v}^{(0)} - (\boldsymbol{x} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\ \boldsymbol{v}^{(0)}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\ \boldsymbol{\omega}^{(1)} + \boldsymbol{\omega}^{(0)} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\ \boldsymbol{v}^{(1)}\,. \tag{13}$$

Die ersten beiden Terme beschreiben die Streckung und Advektion der Wirbelstärke des kleinskaligen Feldes durch die Hintergrundströmung. Bemerkenswert ist der letzte Term, der umgekehrt die Streckung der Hintergrund-Wirbelstärke durch die Geschwindigkeitsstörung repräsentiert. Das Auftreten dieses Terms besagt, daß selbst eine zunächst *drehungsfreie* Störung ($\nabla_{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{v}^{(1)} \equiv 0$) über diesen Mechanismus kleinskalige Wirbelstärke generieren kann. Chorin argumentiert in [1], ein entscheidendes Charakteristikum von Turbulenz sei die Präsenz von Wirbelstärke. Unter diesem Aspekt ist der soeben diskutierte letzte Term in (12) ein auffälliger Kandidat bei der Suche nach den Ursachen der turbulenten Energiekaskade. Bei der Analyse der Resultate umfangreicher, zeitaufgelöster direkter numerischer Simulationen (s.u.) haben wir diesem Term besondere Aufmerksamkeit geschenkt, und ihn zur Formulierung von Detektionskriterien für Entstehungskeime kleinskaliger Instabilitäten herangezogen.
In diesem Projekt gehen wir der Hypothese nach, daß sich die Entstehung turbulenter Fluktuationen weitgehend universell mit Hilfe der hier diskutierten Anfachung kleinskaliger Störungen auf einem größerskaligen Hintegrund erklären läßt.

2 Erzeugung der Strömungsdaten durch Direktsimulation

Im Rahmen des vorliegenden Projektes sollen Daten von Strömungen in zwei verschiedenen Konfigurationen untersucht werden: homogen-isotrope Strömung und ebene Kanalströmung. Obwohl es sich in beiden Fällen um sehr einfache Geometrien handelt, bedingt der Wunsch nach effizienter Ausführung die Verwendung von zwei unterschiedlichen, spezialisierten Rechenprogrammen, welche im Folgenden skizziert werden sollen bevor wir die erzeugten Datenfelder selbst beschreiben.

2.1 Homogen-isotrope Strömung

2.1.1 Konfiguration

Wir betrachten die Bewegung eines inkompressiblen, isothermen Fluides. Das Integrationsgebiet ist dreifach periodisch. Die—nach anfänglicher künstlicher Anregung—resultierende turbulente Strömung ist statistisch gesehen homogen und isotrop in der Ortsvariablen. Nach analytischer Elimination des Drucktermes lauten hierfür die Impulsgleichungen im Fourierraum (mit $\hat{}$ versehene Größen sind Fourierkoeffizienten):

$$\partial_t \hat{u}_i(\mathbf{k}) + \nu k^2 \hat{u}_i(\mathbf{k}) = \widehat{(u_l u_j)}_{,j}(\mathbf{k}) \left(\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{k^2}\right) + \hat{f}(\mathbf{k}) \quad , \tag{14}$$

wobei u_i die Geschwindigkeitskomponenten bezeichnet, ν die Viskosität, $\mathbf{k}$ den Wellenzahlvektor und f eine arbiträre Volumenkraft. Letzterer Term hat die Aufgabe, die Strömung—welche keine mittlere Geschwindigkeit besitzt—künstlich mit Energie zu versorgen, um das Erreichen eines statistisch stationären Zustandes zu ermöglichen. Dies erfolgt dadurch, daß ständig in diejenigen Fouriermoden, welche in einem schmalen Frequenzband um einen vorgegebenen Wellenzahlmodulus k_p liegen, mittels einer modifizierten Viskosität auf deterministische Weise Energie—entsprechend der gesamten Dissipation—injiziert wird [2].
Die folgenden Größen werden in der anschliessenden Diskussion benötigt. Die spektrale Energiedichte einer Wellenzahl ist wie folgt definiert:

$$E(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{3} \hat{u}_i(\mathbf{k}) \cdot \hat{u}_i^*(\mathbf{k}) \quad , \tag{15}$$

wobei der Asterisk für die komplex Konjugierte steht. Zur Berechnung eines Spektrums wird in der Regel $E(\mathbf{k})$ über eine Kugelschale integriert ($k \equiv |\mathbf{k}|$):

$$E(k) = \frac{1}{\Delta k} \int_{k-\Delta k}^{k+\Delta k} E(\mathbf{k}) \mathrm{d}\mathbf{k} \tag{16}$$

Die globale Turbulenzintensität wird durch $q^2 = \int_k E(k)\mathrm{d}k$ gemessen, die Intensität der Geschwindigkeitsfluktuationen wird auch als $u' = \sqrt{2q^2/3}$ definiert. Die zeitliche Evolution der spektralen Energiedichte ist gegeben durch:

$$\partial_t E(\mathbf{k}) = T(\mathbf{k}) - 2\nu k^2 E(\mathbf{k}) \quad , \tag{17}$$

wobei $T(\mathbf{k})$ den nichtlinearen Transferterm darstellt. Folglich erhält man die gesamte Energiedissipation ε in homogenen Strömungen aus:

$$\varepsilon = \nu\, \omega'^{\,2} = 2\,\nu \int_0^\infty k^2\, E(k)\mathrm{d}k \quad . \tag{18}$$

Das integrale Längenmaß L, das Taylorsche Längemaß λ und die Kolmogoroffskala η berechnet man wie folgt:

$$L = \frac{\pi}{2\,u'^{\,2}} \int_0^\infty k^{-1}\, E(k)\mathrm{d}k\,, \quad \lambda^2 = 15\,\nu \frac{u'^{\,2}}{\varepsilon}\,, \quad \eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{(1/4)} \quad . \tag{19}$$

Davon abgeleitet werden die Zeitskala der großen Strukturen $T = L/u'$, die Kolmogoroffsche Zeitskala $t_{kol} = 1/\omega'$, und die Taylorsche Reynoldszahl $Re_\lambda = u'\,\lambda/\nu$.

2.1.2 Numerische Methode

Die ursprüngliche Version des Simulationsprogramm ist uns von A. Wray, NASA Ames, zur Verfügung gestellten worden. Darin findet direkt obige Formulierung (14) in primitiven Variablen Verwendung. Es handelt sich hierbei um ein Fourier-Pseudospektralverfahren, also um die endliche Reihenentwicklung mit $\exp(\pm I k_i x_i)$ und den diskreten Moden $k_i = 0, 1 \ldots N/2$, wobei *de-aliasing* mittels der 2/3-Regel durchgeführt wird. Die Zeititeration erfolgt durch ein Runge-Kutta Schema dritter Ordnung. Die durch lineare Analyse ermittelte, maximal erlaubte CFL Zahl beträgt in diesem Fall 2.

2.1.3 Parallelisierung

Dieses Rechenprogramm wurde von uns für die Nutzung auf einer CRAY T3E angepaßt und schrittweise optimiert. Die Parallelität wird *via* MPI unter FORTRAN durch ein *pencil*-Datenmodell realisiert, d.h. es wird zunächst die Anzahl der Prozessoren möglichst quadratisch faktorisiert und es werden dann in zwei Koordinatenrichtungen die Daten über dieses "Gitter" verteilt. Es ist also jeweils nur in einer Ortsrichtung die volle Vektorlänge der Daten lokal (d.h. ohne Kommunikation) zugänglich. Auf diese Weise wird einerseits mehr Kommunikation zwischen den Prozessoreinheiten notwendig (vier volle Datentransponierungen pro Zeitschritt), jedoch wird andererseits sichergestellt, daß lokale Speicherzugriffe ausschließlich auf benachbarte Addressen erfolgen.
Die Tabelle 1 gibt Aufschluß über die Performance des Simulationsprogrammes auf der CRAY T3E. Nach unserer Optimierung wird eine globale Rate von 73 Mflop pro PE erreicht. Die Fouriertransformationen liefern ca. 100 (*complex-to-complex*) bzw. 160 Mflop (*real-to-complex*), wobei das zweifache Kopieren der Daten inbegriffen ist. Diese Werte liegen etwas höher als vergleichbare Resultate des Programmes für die ebene Kanalströmung.

Region_name	Av. Time [sec]	Total Gflop	Performance / PE average Mflop	Max	Min	Number calls
c-to-c fft	47.64	0.821	102.57	102.96	102.13	25603
r-to-c fft	35.52	1.314	164.24	164.36	163.79	30721
complete code	171.17	0.585	73.11	73.54	72.93	1

Tabelle 1: Performance des Simulationsprogrammes für homogen-isotrope Strömung auf der CRAY T3E des ZIB, Berlin. Die Problemdimension ist $N = 128$, es wurden 8 PE's mit 450 MHz verwendet und 10 Zeitschritte ausgeführt.

2.1.4 Beschreibung der Zeitserien

In der Tabelle 2 sind einige Parameter der von uns durchgeführten Simulationen aufgelistet. Die Reihe `512_b` ist im weiteren wegen der relativ hohen Reynoldszahl $Re_\lambda = 146$ für uns von besonderem Interesse. Die Auflösung der kleinen Skalen ist hier als sehr gut zu bezeichnen ($\eta/\lambda_{min} = 0.596$, erfüllt insbesondere die Kriterien der Referenz [2] zur Analyse von kleinskaligen Strukturen) und gleichzeitig ist das Integrationsgebiet groß gegenüber den größen Skalen ($L/box = 0.18$).
Die Abbildung 1 zeigt die spektrale Verteilung der Energiedichte $E(k)$, der Dissipationsdichte $k^2E(k)$ und des Transfertermes $T(k)$, aufgetragen für ein Feld der Serie `512_b` nach Erreichen eines statistisch stationären Zustandes. Man kann einen kurzen Inertialbereich erkennen. Der Fluß der Energie im Wellenzahlraum ist etabliert: die Transferfunktion $T(k)$ ist überwiegend negativ für Skalen größer als das integrale Längemaß und sonst positiv.
Zur weiteren Verwendung haben wir Momentaufnahmen des Strömungsfeldes der Serie `512_b` in feiner zeitlicher Auflösung gespeichert: 260 Felder in einem zeitlichen Abstand von $\Delta t = 1\, t_{kol}$ und weitere 170 Felder in einem noch feineren zeitlichen Abstand von $\Delta t = 0.1\, t_{kol}$. Das somit erzeugte Datenvolumen umfasst ca. 430GB.

2.2 Ebene Kanalströmung

2.2.1 Konfiguration

Das Integrationsgebiet ist begrenzt von zwei parallelen, ebenen Wänden unendlicher Ausdehnung mit Abstand $2h$ (Abbildung 2). Die Strömung wird von einem mittleren Druckgradienten $P_{,x}$ angetrieben, welcher hier so eingestellt wird, daß der Massenfluß zeitlich konstant ist. Im statistisch stationären Zustand variiert das zeitliche Mittel der gesamten Schubspannung linear in wandnormaler Richtung zwischen den beiden (positiven und negativen) Randwerten $\pm\tau_w$. Man definiert daher ein Maß für die Geschwindigkeitsfluktuationen über die gesamte Breite des Kanals: $u_\tau = \sqrt{\tau_w}$. Nahe der Wand verhält sich die mittlere Geschwindigkeit linear mit dem Wandabstand, was zur Definition eines viskosen Längemaßes $\delta_\tau = \nu/u_\tau$ führt. Damit kann man die folgenden normierten Größen einführen:

$$x_i^+ = \frac{x_i u_\tau}{\nu}\,, \quad u_i^+ = \frac{u_i}{u_\tau}\,, \quad t^+ = \frac{t u_\tau^2}{\nu}\,, \quad Re_\tau = \frac{u_\tau h}{\nu}\,. \tag{20}$$

Man spricht auch von "Wandeinheiten". Nahe der Wand spielt δ_τ die Rolle der Kolmogoroffskala η. Andererseits übernimmt die Reynoldszahl basierend auf der Wandschubspannung, Re_τ, den Part der Reynoldszahl der großen Skalen.

case	N	k_p	ν	forcing	$\frac{t_{fin}}{T(t_{fin})}$	Re_λ	L/box	$\frac{\eta}{\lambda_{min}}$
`128_a`	128^3	6	0.0039	$\surd$	27.2	44.6	0.0665	0.246
`256_a`	256^3	13	0.0007	–	1.73	22.0	0.0914	0.766
`256_b`	256^3	5	0.0033	$\surd$	5.14	51.0	0.0794	0.488
`256_c`	256^3	5	0.0016	$\surd$	10.12	68.8	0.0762	0.347
`512_a`	512^3	8	0.0013	$\surd$	11.5	57.8	0.0430	0.490
`512_b`	512^3	2	0.0005	$\surd$	6.4	146.0	0.1800	0.596

Tabelle 2: Parameter unserer Serie von Simulationen homogen-isotroper Turbulenz: Anzahl der Freiheitsgrade N, *peak* Wellenzahl k_p des Anfangsspektrums und gleichzeitig Zentrum der Energieinjektion im Wellenzahlraum, Viskosität ν, künstliche Einspeisung von Energie (ja/nein), anfängliche Zeitspanne für die Etablierung eines realistischen Strömungszustandes $t_{fin}/T(t_{fin})$ gemessen in integralen Zeiteinheiten, Taylorsche Reynoldszahl Re_λ, Verhältnis des integralen Längenmaßes zur linearen Dimension des Integrationsgebietes L/box, Verhältnis der Kolmogoroffschen Längenskala zur kleinsten numerisch auflösbaren Wellenlänge η/λ_{min}.

2.2.2 Numerische Methode

Das Lösungsschema basiert auf dem Verfahren der Referenz [3]. Es wird eine Formulation der Navier-Stokes Gleichungen in Abhängigkeit der folgenden Variablen benutzt: wandnormale Wirbelstärke ω_y, Laplaceoperator angewandt auf die wandnormale Geschwindigkeitskomponente $\varphi \equiv \nabla^2 v$; hiermit wird der Druckterm aus den Gleichungen eliminiert. Die resultierende Gleichung vierter Ordnung für die Variable φ wird zwecks Implementierung der adäquaten Randbedingungen für die Geschwindigkeit v in zwei Gleichungen zweiter Ordnung überführt.
In den beiden Koordinatenrichtungen, welche durch statistische Homogenität des turbulenten Strömungsfeldes gekennzeichnet sind (axiale Richtung und Spannweitenrichtung), werden die Variablen in Fourierreihen entwickelt. In der wandnormalen Richtung führen wir eine Entwicklung mit Tschebycheff Polynomen durch. Die Methode ist pseudospektral und benutzt klassisches *de-aliasing* für die Fourierreihen, jedoch—wie üblich—wird in der wandnormalen Richtung kein *de-aliasing* angewandt. Einige Anmerkungen zum Thema Tschebycheffmethode und *de-aliasing* liegen in Form eines Berichtes vor [4].
Die Zeitintegration des Systems erfolgt in semi-impliziter Weise mit Hilfe eines Runge-Kutta Schemas dritter Ordnung und impliziter Diskretisierung der Reibungsterme. Folglich ist zu jedem Runge-Kutta Unterschritt und für jede Kombination von Fouriermoden ein einfaches Helmholtzproblem (ω_y) und ein Paar biharmonischer Helmholtzprobleme (φ, v) in wandnormaler Richtung zu lösen. Dies erfolgt mittels einer Tschebyscheff-Tau Methode, welche zu tridiagonalen, linearen Gleichungssystemen führt.

2.2.3 Parallelisierung

Das ursprüngliche Simulationsprogramm wurde von J. Jiménez, U. Politécnica Madrid, zur Verfügung gestellt und ebenfalls für den Betrieb auf der CRAY T3E optimiert. Hier kommt ein *slice* Datenmodell zum Einsatz, wobei die Daten nur in einer Koordinatenrichtung "geschnitten" sind (entweder y oder z), also als Bündel von Ebenen jedem Prozessor zur Verfügung stehen. Die Interprozessorkommunikation beschränkt sich somit auf zwei Transponierungen pro Zeitschritt.
Zur parallelen Performance ist anzumerken, daß bei der größten behandelten Problemdimension ($600 \times 385 \times 600$ Freiheitsgrade) ein nahezu idealer *speed-up* von 2 erreicht wird, wenn 256 Prozessoreinheiten anstatt 128 verwendet werden.

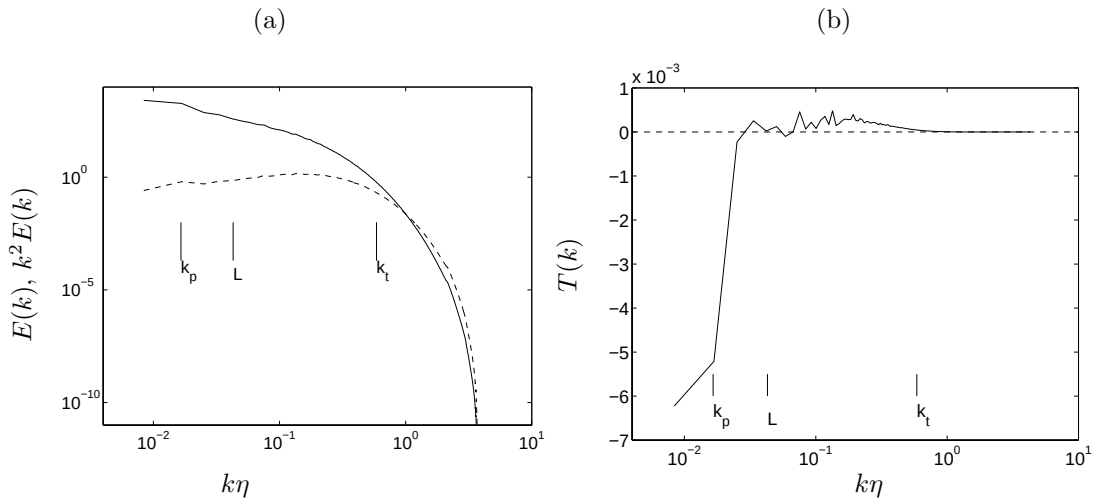

Abbildung 1: (a) Dreidimensionales Energiespektrum $E(k)$ (——) und Dissipationsspektrum $k^2E(k)$ (----), normalisiert nach Kolmogoroff. (b) Spektrum des nicht-linearen Energietransfers $T(k)$. Die vertikalen Markierungen geben in beiden Fällen die Wellenzahlen der Energieeinspeisung k_p, des integralen Längenmaßes L und des Skalenfilters k_t aus § 4.1.1 an. Es gilt ausserdem: $k_{max} = \sqrt{3}N/2 = 2\pi/\lambda_{min}$.

2.2.4 Beschreibung der Zeitserien

Die vorliegenden Zeitreihen wurden jeweils mit einem Anfangsfeld gestartet, welches realistisch korrelierte Turbulenz aus vorherigen Studien enthielt, jedoch bei teilweise abweichender Reynoldszahl und/oder unterschiedlicher ursprünglicher Boxgröße. Daher war eine—wenn auch relativ kurze—anfängliche Adaptation nötig (sichtbar durch starke Schwankungen in den momentanen Werten der Wandschubspannung) bevor wir die Aufzeichnung der Statistik starten konnten. Bei Konvergenz der Statistik (außer im Fall `kmmhires` wegen begrenzter Ressourcen) wurde mit der Erzeugung von Momentanaufnahmen des Strömungsfeldes mit zeitlicher Auflösung von $\Delta t^+ = 1$ begonnen.
Tabelle 3 zeigt die wichtigsten Parameter der durchgeführten Simulationen. Dabei entsprechen die ersten drei Fälle `kmm`, `kim395` und `kim590` im wesentlichen den Simulationen der Referenzen [3, 5]. Im Fall `kim590fi` wurde die örtliche Auflösung vom `kim590` deutlich erhöht. Die gleiche, hohe Anzahl von Freiheitsgraden wurde schließlich im Fall `kmmhires` bei relativ niedriger Reynoldszahl $Re_\tau = 190$ verwendet, was zur extrem geringen Gitterweite von 2.0,1.6,1.1 Wandeinheiten

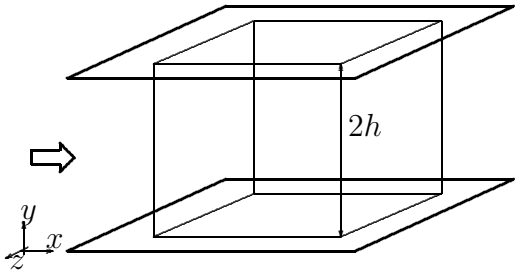

Abbildung 2: Schema der Konfiguration der ebenen Kanalströmung.

case	Re_τ	Re_b	L_x	L_z	$N_x \times N_y \times N_z$	Δ_x^+	Δ_z^+	Δ_y^+
`kmm`	180	2925	$3\pi h$	πh	192× 97×128	8.8	4.4	5.9
`kim395`	395	6876	$2\pi h$	πh	256×193×256	10.0	6.5	6.5
`kim590`	590	10972	$2\pi h$	πh	384×257×384	9.7	4.8	7.2
`kim590fi`	590	10972	$2\pi h$	πh	600×385×600	6.1	3.0	4.8
`kmmhires`	190	2970	$2\pi h$	πh	600×385×600	2.0	1.1	1.6

Tabelle 3: Parameter der Simulationsreihen der ebenen Kanalströmung: Reynoldszahl basierend auf der Wandschubspannungsgeschwindigkeit Re_τ und basierend auf der Massenflußgeschwindigkeit Re_b, Größe des Integrationsgebietes L_i, Anzahl der Moden N_i (vor dem *de-aliasing*), Gittergröße in Wandeinheiten Δ_i^+. Dabei ist Δ_y^+ die maximale vertikale Gitterweite nahe der Mittellinie. Die verwendeten Gauss-Lobatto Gitterpunkte sind durch $y_j^+ = (1-\cos(\pi j/(N_y-1)))\, Re_\tau$ gegeben.

in den drei Koordinatenrichtungen führt. In den letztgenannten drei Fällen `kim590, kim590fi` und `kmmhires` wurden jeweils 250 Datenfelder gespeichert, was einem Datenvolumen von 575GB entspricht.
Die Abbildung 3 zeigt an einer Momentanaufnahme der Geschwindigkeitsfluktuationen in Strömungsrichtung des Falles `kim590fi`, daß *streak*-artige Strukturen unterschiedlicher Größenordnung sowohl in der Pufferzone als auch in der logarithmischen Zone vorhanden sind.

3 Diskrete Wavelets für die Datenanalyse

In der Turbulenzforschung wird häufig die Fourieranalyse als Formalismus sowohl für theoretische Ansätze [e.g. 6, 7] als auch im Bereich der Analyse von Daten aus Direktsimulationen oder Laborexperimenten eingesetzt. Aufgrund der Tatsache, daß sich die Basisfunktionen unendlich im Raum fortsetzen, ist die Signifikanz einer solchen Projektion im Falle von Signalen mit ausgezeichneten lokalisierten Strukturen von verschiedenen Autoren in Frage gestellt worden [e.g. 8]. Die Anwesenheit von kleinskaligen, intensiven Wirbelwürmchen ("worms") in turbulenten Strömungen verschiedenen Typs scheint dieses Argument zu unterstützen.
Verwendet man hingegen Wavelets, also lokalisierte, oszillierende Funktionen als Basisfunktionen, so hat man gleichzeitig—im Rahmen der Unschärferelation—Zugang zu Skalen- und Ortsinformation des Signals. Die Hoffnung ist hier, daß die Waveletbasis an den Charakter des turbulenten Strömungsfeldes—vorstellbar als ein System von kohärenten Strukturen—besser angepaßt ist als es globale Basisfunktionen sein können. Auf diese Weise hätten vorgenommene Filteroperationen eine Wirkung, die sowohl im Skalen- als auch im Ortsraum beschränkt ist.
Da im vorliegenden Projekt der Begriff der "Skala" eine zentrale Rolle spielt, scheint es uns natürlich, das Potential des Waveletansatzes zu nutzen und Waveletbasen zur Datenanalyse und -filterung—alternativ zur klassischen Fourier- bzw. orthogonalen Polynomialanalyse—zu verwenden. In der Praxis tritt jedoch eine Anzahl von ungeklärten Problemen auf, welche mit der Waveletzerlegung von realen Felddaten zusammenhängen: die Behandlung eines beschränkten Gebietes, die Transformation von divergenzfreien Vektorfeldern, die effiziente Implementierung des Algorithmus. Nach einer kurzen Einführung in den Waveletformalismus werden wir in den folgenden Abschnitten versuchen, erste Antworten auf die erwähnten Teilprobleme zu geben. Schon jetzt sollte erwähnt werden, daß nach unserer Kenntnis keine Waveletbasis existiert, welche den gesamten, von uns gestellten Forderungskatalog nach Orthogonalität, Divergenzfreiheit, Dreidimensionaliät, Intervalltauglichkeit, optimaler Lokalisierung im Orts- und Skalenraum und schneller Berechnung erfüllt. Darüberhinaus ist weitere Arbeit im Berich der Auswertung der Koeffizienten zu leisten, um das gesamte Potential dieser Methode auszuschöpfen.

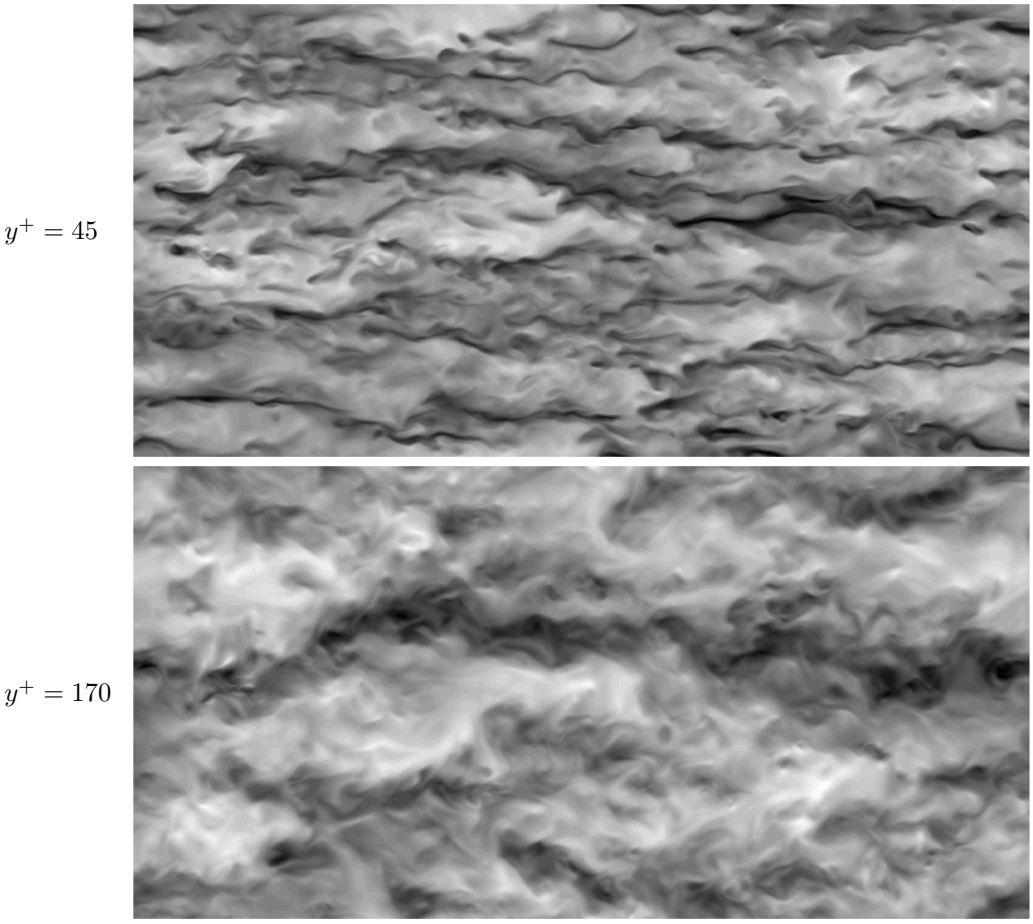

Abbildung 3: Visualisierung der momentanen Geschwindigkeitsfluktuationen in Stromrichtung für den Fall `kim590fi` bei $Re_\tau = 590$ in zwei wandparallelen Ebenen mit Wandabstand $y^+ = \{45, 170\}$. Man erkennt *streak*-artige Strukturen mit deutlich unterschiedlichen Größenordnungen in der Pufferzone und der logarithmischen Zone. Die mittlere Strömung ist von links nach rechts. Die Grauschattierung ist linear von schwarz ansteigend zu weiß.

3.1 Grundlagen der diskret-orthogonalen Waveletzerlegung

Die Waveletanalyse wurde ursprünglich als kontinuierliche Transformation eingeführt [9] und erst später als eine orthonormale Zerlegung von Funktionsräumen entwickelt [10, 11]. Im vorliegenden Projekt bedienen wir uns ausschließlich der diskret-orthogonalen Waveletzerlegung, da diese einen Satz von nicht-redundanten Koeffizienten liefert und somit das in unserem Fall ohnehin schon sehr umfangreiche Datenvolumen nicht zusätzlich aufbläht. Des weiteren sind auf diese Weise Filteroperationen und partielle Rekonstruktionen möglich. Schließlich existiert mit dem Mallat Algorithmus eine schnelle Rechenmethode für die Transformation. Als Nachteil von diskreten Wavelets läßt sich einerseits die relativ grobe, dyadische Skalenaufteilung und zum anderen die Nichtexistenz von komplexen Waveletfunktionen anführen.
Eine Multiresolutionsanalyse (MRA) für Funktionen in $L^2(\mathbb{R})$ wird aus den folgenden zwei Zutaten konstruiert: einer "Skalierungsfunktion" φ mit $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \mathrm{d}x = 1$ und einer "Waveletfunktion" ψ mit $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi \mathrm{d}x = 0$. Definiert man die dyadischen Translationen i und Dilationen j einer Funktion $g(x)$

wie folgt:

$$g_{ji}(x) = 2^{j/2}\, g(2^j x - i)\,, \qquad j, i \in \mathbb{Z} \quad , \tag{21}$$

so gelten für die von φ und ψ gebildeten skalierten/verschobenen Funktionen (mit dem Skalarprodukt $< a, b > \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} ab\mathrm{d}x$) die folgenden Orthonormalitätseigenschaften :

$$< \varphi_{ji}, \varphi_{jl} > \;=\; \delta_{il}\,, \tag{22a}$$
$$< \psi_{ji}, \psi_{ml} > \;=\; \delta_{il}\,\delta_{jm}\,, \tag{22b}$$
$$< \varphi_{ji}, \psi_{ml} > \;=\; 0\,, \qquad (m \geq j)\,. \tag{22c}$$

Die Theorie garantiert dann, daß die folgende Zerlegung in einen glatten Anteil bis zur Skala 2^{-J} und zusätzliche Detailinformationen für jede Skala 2^{-j} $(j \leq J)$ konvergiert:

$$f(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} c_{Ji}\varphi_{Ji}(x) + \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{j\geq J} d_{ji}\psi_{ji}(x)\,, \quad \text{mit} \quad c_{ji} =< f, \varphi_{ji} >\,, \quad d_{ji} =< f, \psi_{ji} > \,. \tag{23}$$

Bemerkungen:

- Einem Koeffizienten können nun folgende Merkmale eindeutig zugeordnet werden: (i) Position $2^{-j}\cdot i$; (ii) Skala 2^{-j}; (iii) Energieanteil d_{ji}^2 (wegen Orthogonalität gilt eine Parsevalsche Formel).
- Die Analyse läßt sich bis auf Details direkt auf den periodischen Fall $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ übertragen, nicht jedoch auf das Interval (siehe § 3.2).
- Es existieren in der Literatur verschiedene Paare φ, ψ mit jeweils ähnlichen Lokalisierungseigenschaften. Im folgenden verwenden wir im periodischen Fall Splinewavelets vierter Ordnung, welche im Ortsraum exponentiell abklingen [12].
- Die explizite Berechnung der Transformation von N diskreten Datenwerten $f(x_k)$ erfolgt nach Mallat [10] durch sukzessive Konvolutionen mit von φ und ψ abgeleiteten Tiefpass- und Bandpassfiltern h, g für jede Skala, von der Kleinsten an aufwärts. Der Rechenaufwand skaliert mit $\mathcal{O}(N\log_2(N))$.

Eine MRA in mehreren Dimensionen kann durch das Tensorprodukt von mehreren eindimensionalen Analysen konstruiert werden, wobei eine Richtungseigenschaft (mit dem Index $0 \leq q \leq 7$) über die Kombination von Skalierungs- und Waveletfunktionen erzeugt wird:

$$\psi_{ji}^q(\mathbf{x}) = \Phi_{ji}^\xi(x)\cdot\Phi_{ji}^\eta(y)\cdot\Phi_{ji}^\zeta(z) \quad \text{mit} \quad \Phi_{ji}^\chi(x_i) = \begin{cases} \phi_{ji}(x_i) & \text{für} \quad \chi = 0 \\ \psi_{ji}(x_i) & \text{für} \quad \chi = 1 \end{cases} \tag{24}$$

und $q = \xi + 2\eta + 4\zeta$.

3.2 Wavelets für das Intervall

Unter besonderen Umständen können Daten auf einem Intervall näherungsweise als periodisch betrachtet werden oder mit Methoden für die reelle Achse behandelt werden. In beiden Fällen werden jedoch in der Regel aufgrund der Unstetigkeit an der Intervallgrenze Artefakte bei der Wavelettransformation erzeugt. Solche sind für uns inakzeptabel, da im Falle der ebenen Kanalströmung die hochaktive und daher interessante Zone in direkter Nachbarschaft zur Grenze liegt. Aus diesem Grunde benötigen wir für die Analyse jener Strömungsfelder eine Waveletbasis für $L^2([a,b])$.
Fischer und Prestin [13] haben gezeigt, wie man prinzipiell durch geschickte Kombination von orthogonalen Polynomen eine Waveletbasis für $L^2([-1,1])$ konstruiert. Die von ihnen explizit angegebene Basis besitzt jedoch die Orthogonalitätseigenschaften in bezug auf ein Skalarprodukt $< a, b >_w \equiv \int_{-1}^{1} abw\mathrm{d}x$ mit einem Gewicht $w(x) \neq 1$. Letzteres ist wiederum vom Standpunt der

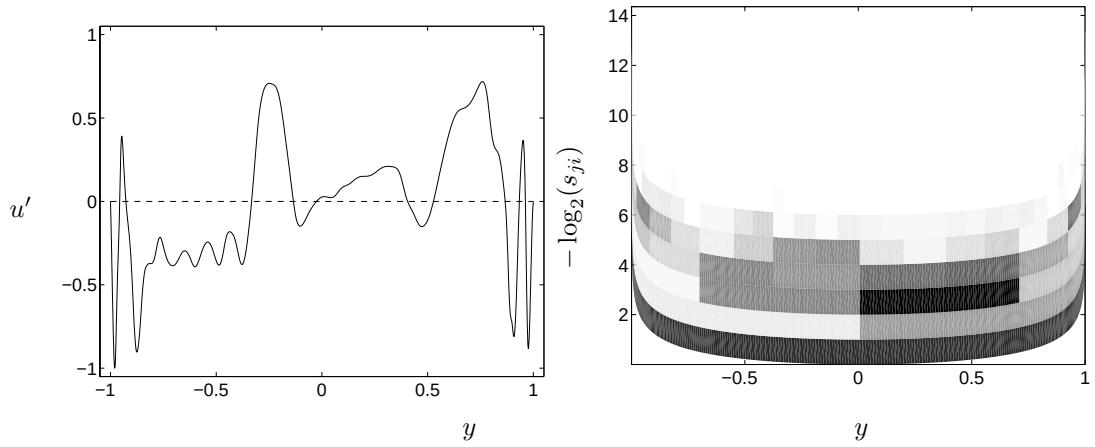

Abbildung 4: Das linke Bild zeigt momentane Geschwindigkeitsfluktuationen in Strömungsrichtung aus der Simulation `kim590fi`, aufgetragen entlang der wandnormalen Richtung y. Rechts sieht man eine Darstellung der Amplitude der Waveletkoeffzienten der entsprechenden Transformation mittels Legendrewavelets. Die Schattierung variiert linear von weiss (Nullwert) zu schwarz (Maximalwert). Die Abszisse gibt die Position im Intervall an, die Ordinate das Inverse der Skala s_{ji} in logarithmischer Einteilung. Dabei ist zu beachten, daß hier die physikalische Skala nicht nur vom Skalenindex j abhängt, sondern auch von der Position i.

Interpretation der Koeffizienten her unerwünscht, da hier eine Zuordnung zwischen Amplitude und Beitrag zur Gesamtenergie des Signales schwierig ist.
Unter Beteiligung von J. Fröhlich, U. Karlsruhe, haben wir eine auf Legendrepolynomen aufbauende Basis konstruiert [14], welche orthonormal mit Gewicht $w(x) = 1$ ist und daher intuitive Energieargumente zuläßt. Da dieser Typ von Wavelet noch nicht vollständig ausgereift ist, müssen bisher zwei Nachteile in Kauf genommen werden:

- Die Lokalisierung im Ortstraum ist nicht optimal: die Legendrewavelets klingen mit $\mathcal{O}(x^{-1})$ relativ langsam ab.
- Noch liegt kein schneller Algorithmus für die Transformation vor, welche daher den Aufwand $\mathcal{O}(N^2)$ verlangt.

In Anwendungen der neuen Transformation auf Testsignale und reale Daten aus dem ebenen Kanal haben wir festgestellt, daß sie sich durchaus zur Analyse eignet. Die Abbildung 4 zeigt z.B. ein momentanes Geschwindigkeitsprofil der Simulation `kim590fi` (cf. Tabelle 2). Die Position und Skala der starken Gradienten nahe beider Intervallgrenzen lassen sich im abgebildeten Koeffizientenschema deutlich ablesen. Eine quantitative Aussage über die Energieverteilung als Funktion der Skala an verschiedenen Orten läßt sich aus dem lokalen Waveletspektrum gewinnen (Abbildung 5). Dies ist ein Ergebnis, welches mittels globaler Basisfunktionen nicht erzielt werden kann und erlaubt im ebenen Kanal das Auftragen von wandnormalen Energiespektra für verschiedene Wandabstände. So läßt sich in der Abbildung 5 erkennen, daß der Peak des Energiespektrums bei Annäherung an die Kanalwand zu kleineren wandnormalen Skalen wandert.

3.3 Divergenzfreie Vektorwavelets

In der Regel interessieren wir uns bei unserer Analyse für Vektorgrößen (Geschwindigkeit, Wirbelstärke, etc.). Verwendet man allerdings skalare Wavelets zur Transformation jeder einzelnen Komponente eines Vektorfeldes, so ergeben sich Konflikte mit der Inkompressibilitätsbedingung des Fluides:

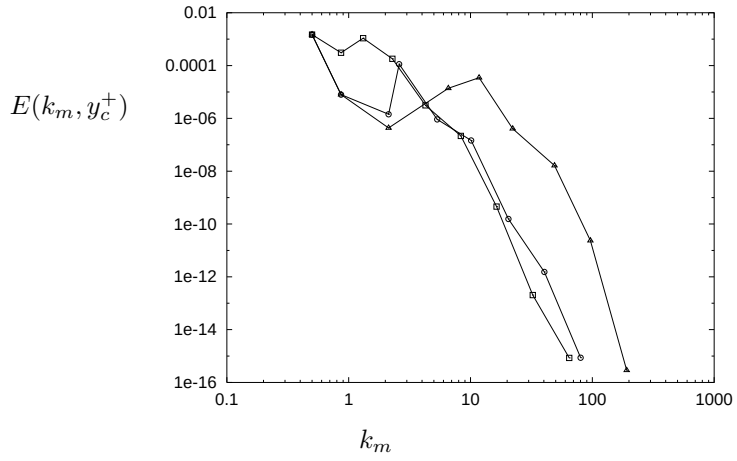

Abbildung 5: Lokales Waveletkoeffizientenspektrum $E(k_m, y_c^+)$ der Transformation aus Abbildung 4 als Funktion des Inversen der Skala $k_m = 1/s_{ij}$ an den folgenden wandnormalen Positionen: $\square$, $y_c^+ = 531$; $\circ$, $y_c^+ = 236$; $\triangle$, $y_c^+ = 35$.

- Soll ein Vektorfeld gefiltert oder partiell rekonstruiert werden, so ist das resultierende Feld im allgemeinen nicht divergenzfrei, wenn jede Komponente individuell behandelt wird. Prägt man umgekehrt die Divergenzfreiheit explizit auf, indem man lediglich zwei Komponenten manipuliert und die Dritte im Ortsraum aus der Kontinuitätsbedingung bestimmt, kann man das gewünschte Filterkriterium nicht einhalten (z.B. nach Skalenfilterung von Geschwindigkeiten u, v wird die zur Divergenzfreiheit notwendige Komponente w in der Regel Anteile aus allen Skalen enthalten). Eine Filterung unter Verwendung von skalaren Wavelets ist daher nur für skalare Größen (Energie, Enstrophie) sinnvoll.
- Zur detaillierten Untersuchung der nichtlinearen Transferterme (Advektion, Wirbelstreckung) in der Waveletformulierung ist es notwendig, daß die Darstellung des Geschwindigkeits- bzw. Wirbelstärkenvektors für jede Mode einzeln divergenzfrei ist [15]. Ist dies nicht der Fall, so können lediglich über Skala und Ort gemittelte Transferausdrücke bestimmt werden und nicht die gewünschten expliziten Interaktionen zwischen einzelnen Moden.

Als Alternative können Waveletvektorfunktionen verwendet werden, welche per Konstruktion divergenzfrei sind. Eine solche Möglichkeit wurde kürzlich in den Referenzen [16–18] aufgezeigt. Dabei wird ein divergenzfreies Vektorfeld aus dem Produkt eines klassischen, skalaren Waveletfeldes $\psi_{ji}^q(\mathbf{x})$ und einer sog. spiralförmigen Welle $\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{k},s}(\mathbf{x})$ erzeugt:

$$\boldsymbol{\psi}_\lambda(\mathbf{x}) \equiv \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \hat{\psi}_{ji}^q(\mathbf{k})\, \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{k},s}(\mathbf{x}) \quad , \tag{25}$$

mit

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{k},s}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{h}(\mathbf{k},s)\cdot \mathrm{e}^{2\pi I\mathbf{kx}}\,, \qquad \mathbf{h}(\mathbf{k},s) \equiv \begin{cases} -\mathbf{e}_r(\mathbf{k} & s=0 \\ \dfrac{\mathbf{e}_\vartheta(\mathbf{k}) \pm I\mathbf{e}_\varphi(\mathbf{k})}{\sqrt{2}} & s=\pm \end{cases} \tag{26}$$

als Funktion der Einheitsvektoren eines sphärischen Koordinatensystemes im Fourierraum $\{\mathbf{e}_r(\mathbf{k}),\ \mathbf{e}_\vartheta(\mathbf{k}),\ \mathbf{e}_\varphi(\mathbf{k})\}$. Für das resultierende Wavelet bezeichnet das Subskript λ einen Index aus der Indexmenge Λ:

$$\lambda\in\Lambda: \quad \Lambda = \left\{ j,i,q,s;\ j\in\mathbb{Z},\ i\in(\mathbb{Z}/2^j\mathbb{Z})^3,\ 1\le q\le 7,\ s\in\{+,-\}\right\} \quad . \tag{27}$$

Die Transformation eines divergenzfreien Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^3$ lautet nun:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda \boldsymbol{\psi}_\lambda(\mathbf{x}) \,, \qquad f_\lambda = \int \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\psi}_\lambda(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} \,. \tag{28}$$

Divergenzfreiheit gilt für jede einzelne Waveletmode,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_\lambda(\mathbf{x}) = 0 \qquad \forall \quad \lambda \in \Lambda \,, \tag{29}$$

denn der Vektor $\mathbf{h}$ erfüllt die Bedingung für Divergenzfreiheit im Fourierraum $I\mathbf{k} \cdot \mathbf{h}_\pm(\mathbf{k}) = 0$.
Der Algorithmus zur Bestimmung der Koeffizienten ist hier nicht wesentlich aufwendiger als im skalaren Fall und benutzt lediglich die ohnehin schon zur Verfügung stehende schnelle Fouriertransformation und die schnelle Wavelettransformation:

(i) FFT vorwärts $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \longrightarrow \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k})$,

(ii) Skalarprodukt $\mathbf{h}_s^*(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k})$,

(iii) FFT rückwärts $\mathbf{h}_s^*(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}) \longrightarrow u_s(\mathbf{x})$,

(iv) schnelle (skalare) Wavelettransformation $f_\lambda =< u_s, \psi_{ji}^q >$.

Auf diese Weise werden aus $3N^3$ diskreten Funktionswerten $2N^3$ Koeffizienten gewonnen und das Wissen, daß wegen der Divergenzfreiheit alle Koeffizienten mit $s = 0$ verschwinden.
Wir haben die divergenzfreie Methode in Verbindung mit den erwähnten, sehr glatten Splinewavelets vierter Ordnung implementiert und getestet. Die Lokalisierung, d.h. das räumliche und spektrale Abklingverhalten der ursprünglichen skalaren Basis, wird durch das Produkt mit der spiralförmigen Welle nicht beeinträchtigt. Daher bleiben wichtige Eigenschaften erhalten:

- Die Kompressionsrate für ein Datenfeld der homogen-isotropen Stömung, d.h. der Anteil der Koeffizienten, der benötigt wird, um einen gegebenen Anteil der Energie des Signals zu reproduzieren, ist ähnlich im vektoriellen und skalaren Fall.
- Die Filterung von Vektorfeldern in bezug auf Skala führt ebenfalls zu ähnlichen Ergebnissen, d.h. zu wiedererkennbaren räumlichen Strukturen. Ein Beispiel hierfür ist in der Abbildung 6 gegeben.

Hierbei sollte erwähnt werden, daß die skalare Methode in beiden o.g. Fällen unakzeptabel große Werte der Divergenz erzeugt, sowohl im Maximalwert als auch in der quadratischen Norm.

3.4 Effiziente Implementierung für Multiprozessormaschinen

Die Problemdimensionen aus den Tabellen 2 und 3 zeigen, daß auch die Analyse unserer Daten extreme Ressourcen verlangt. Eine parallele Ausführung der Nachbearbeitungsschritte und insbesondere der Wavelettransformation auf Multiprozessormaschinen ist daher in der Praxis notwendig.
Wir haben einen Algorithmus entworfen, der es erlaubt, eine dreidimensionale, periodische MRA effizient auf eine Anzahl von $n_p = 2^p$ Prozessoren verteilt durchzuführen [19]. Hierzu teilen wir die Datenfelder mittels des o.g. *slice* Datenmodells an die beteiligten Prozessoren auf, mit Schnitten entlang der z- oder der y-Koordinate. Während der schnellen Transformation müssen auf diese Weise die Daten pro Stufe j zwei Mal zwischen den Prozessoren transponiert werden. Die weiteren Merkmale der parallelen Methode sind die folgenden:

- Die Transponierung erfolgt in ähnlicher Weise, wie sie für die Simulation der ebenen Kanalströmung implementiert wurde (siehe § 2.2.3).
- Im Laufe des Skala für Skala operierenden Mallat Algorithmus wird ein Punkt erreicht, an dem n_p größer als die Datenlänge in der an die Prozessoren verteilten Richtung wird. Von diesem Moment an muß die Anzahl der aktiven Prozessoren mit jedem weiteren Schritt um einen Faktor zwei verringert werden. Außerdem müssen die aktuellen Daten an die benachbarten Prozessoren übergeben werden.

(a) (b)

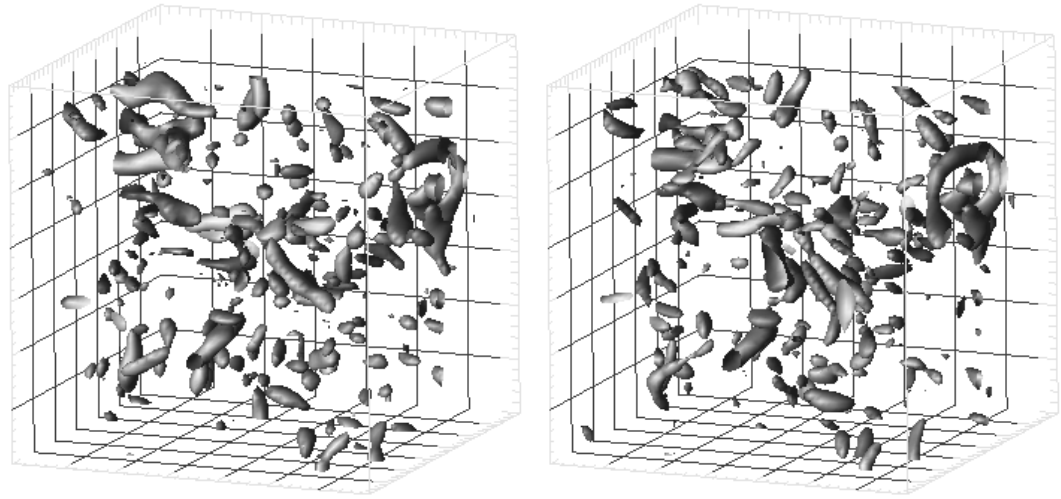

Abbildung 6: Rekonstruierte Felder nach Skalenfilterung im Waveletraum mit einem Bandpassfilter, welcher nur die Längenskala $s_j/\lambda = 0.678$ zurückhält. Das Strömungsfeld hat eine Taylorsche Reynoldszahl von $Re_\lambda = 20$ und 64^3 Freiheitsgrade. Die Abbildungen zeigen jeweils Oberflächen der Enstrophie bei einem Wert der dem Vierfachen der Standardabweichung entspricht. (a) Die Komponenten der Wirbelstärke sind einzeln skalar wavelettransformiert und gefiltert worden, wobei lokale Werte der Divergenz mit einem Vielfachen der Enstrophie entstehen. (b) Als Basis wurden die divergenzfreien Waveletvektoren nach [16], hier basierend auf Splinewavelets, benutzt.

- Aufgrund der variablen Anzahl aktiver Prozessoren akkumulieren die verschiedenen Prozesse im Laufe ihrer Lebenszeit unterschiedlich große Anteile am Resultat. Daher ensteht eine Unausgewogenheit im Speicheraufwand, welche jedoch nur von der Anzahl der Prozessoren abhängt

$$\Delta N = (n_p^2 - 1)\frac{7}{3} + 1$$

  und in der Praxis unerheblich ist. Zum Auffinden von Koeffizienten mit gegebenem Satz von Indizes wurde ein effizientes Such- und Kommunikationsschema gefunden.

Die beschriebene Methode der Parallelisierung der diskreten Wavelettransformation erreicht also eine Reduzierung des Speicheraufwandes, welche sich nahezu proportional zur Anzahl der Prozessoren verhält. Darüberhinaus skaliert die Ausführungszeit trotz der Variation der Anzahl beteiligter Prozessoren sehr gut mit dem Parameter n_p. Die Abbildung 7 zeigt hierzu beispielhaft den *speed-up* Faktor für eine Transformation eines Datenfeldes mit 256^3 Moden und bis zu 32 beteiligten Prozessoren.

4 Analyse der DNS Daten

Es ist unser Ziel, anhand der erzeugten Strömungsfelder die Relevanz der in § 1 vorgestellten Mehrskalenanalyse für die Funktionsweise der turbulenten Energiekaskade zu untersuchen. Zu diesem Zweck haben wir versucht, Ereignisse im Sinne der oben beschriebenen "kleinskaligen Instabilitäten" aufzuspüren, welche nach den Voraussagen der Theorie in der Lage sind, über große Skalendifferenzen hinweg Wirbelstärke zu transferieren. Als Leitfaden dienen uns dabei die

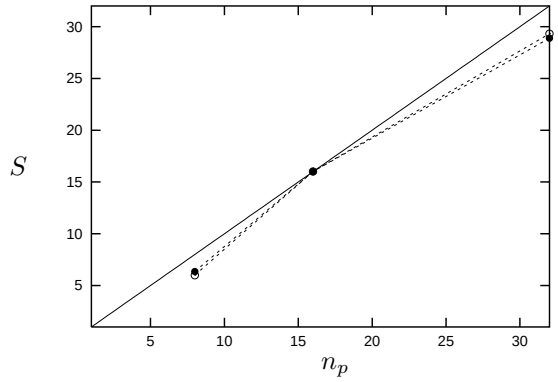

Abbildung 7: Paralleler *speed-up* Faktor $S(n_p) \equiv \Delta t(1)/\Delta t(n_p)$ für die Summe aus einer schnellen dreidimensionalen Wavelettransformation und der inversen Transformation bei einer Problemdimension von 256^3. ——— , idealer *speed-up*; •, Ausführung auf einem IBM SP2 System mit 66 MHz RS6000 Knoten; ∘, CRAY T3E System mit DEC Alpha EV5.6 Knoten mit Taktfrequenz 600MHz.

asymptotischen Gleichungen selbst, deren Terme wir näher untersucht und zur Definition eines Suchkriteriums verwendet haben. In diesem Zusammenhang benötigen wir eine Zerlegung des Strömungsfeldes in verschiedene Skalenanteile, welche zunächst diskutiert werden soll bevor wir die Auswertung der Mehrskalengleichungen präsentieren. An dieser Stelle sollte erwähnt werden, daß wir uns bis zum gegenwärtigen Zeitpunkt ausschließlich auf die Analyse der Daten der homogen-isotropen Strömung konzentriert haben und dazu—falls nicht explizit gegenteilig erwähnt—die Daten der Serie `512_b` herangezogen haben.

4.1 Zerlegung der Datenfelder

Die Mehrskalenasymptotik basiert auf der Annahme lokal skalenseparierter Ereignisse. Da wir *a priori* die Form der beteiligten Strukturen nicht kennen, haben wir eine Methodik gewählt, bei der das Strömungsfeld aus der DNS rein formal in zwei Anteile zerlegt wird, welche den beiden Feldern führender Ordnung aus der Asymptotik zugeordnet werden. Hierzu stehen uns die Fourieranalyse und die Waveletmethode zur Verfügung.

4.1.1 Filterung im Fourierraum

Wir verwenden einen scharfen Filter im Wellenzahlraum, um ein Feld $f(\mathbf{x})$ wie folgt zu zerlegen:

$$\hat{f}^{>}(\mathbf{k}) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad |\mathbf{k}| < k_t \\ \hat{f}(\mathbf{k}) & \text{else} \end{cases} \quad , \qquad \hat{f}^{<}(\mathbf{k}) = \hat{f}(\mathbf{k}) - \hat{f}^{>}(\mathbf{k}) \, . \tag{30}$$

Der Schwellenwert des Filters hat dabei den Wertebereich des Betrages des Wellenzahlvektors der Fourierexpansion, $0 \leq k_t \leq N\sqrt{3}/2$, und wurde zur Analyse der Serie `512_b` in der Regel auf den Wert $k_t = 70$ gesetzt, was einer Wellenlänge $\lambda_t = 10.65\eta$ entspricht. Außerdem haben wir k_t im Bereich $30 \leq k_t \leq 110$ variiert, was den Gegenstand unserer Aussagen qualitativ nicht beinflußt hat. Die Separation des Feldes erfolgt also im Dissipationsbereich des Spektrums (siehe Abb. 1). Die Enstrophie beider Anteile $\boldsymbol{\omega}^{>}$, $\boldsymbol{\omega}^{<}$ für eine Momentaufnahme aus der Serie `512_b` ist in Abbildung 8 dargestellt. Es ist zu erkennen, daß die intensiven Wirbelwürmchen in diesem Zusammenhang dem großskaligen Anteil des Feldes angehören.

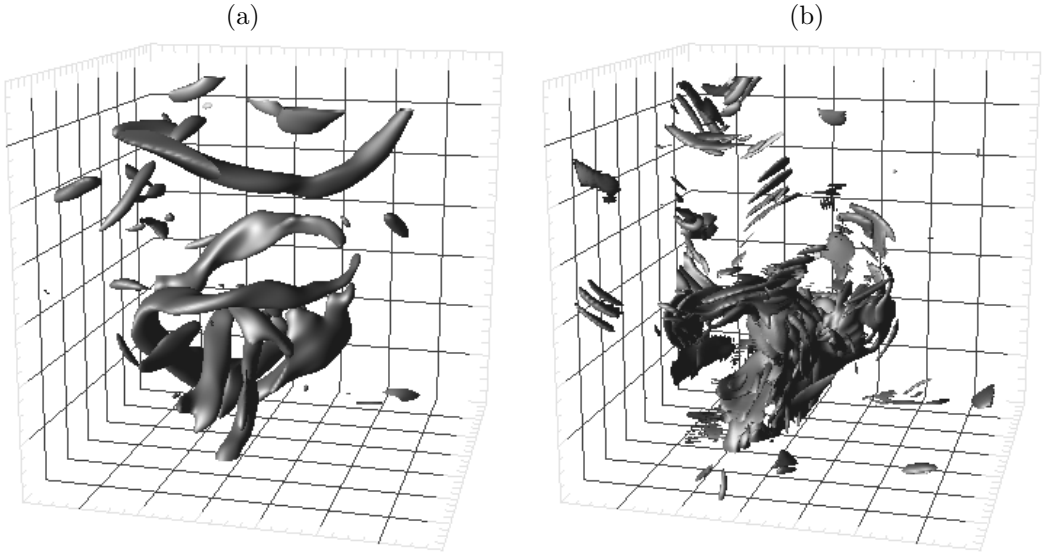

Abbildung 8: Resultat der Zerlegung eines Strömungsfeldes aus der Serie `512_b` mittels scharfem Fourierfilter mit einem Schwellenwert von $k_t\eta = 0.59$ (d.h. $\lambda_t/\eta = 10.65$). (a) Großskaliger Anteil $|\boldsymbol{\omega}^<|$; (b) kleinskaliger Anteil $|\boldsymbol{\omega}^>|$. In beiden Fällen wird das Vierfache der Standardabweichung des jeweiligen Feldes gezeigt. Der dargestellte Ausschnitt aus dem Feld hat eine Kantenlänge von 125η.

4.1.2 Filterung im Waveletraum

Analog zum Wellenzahlfilter im Fourierraum kann eine Skalenfilterung mittels Wavelettransformation durchgeführt werden, indem die in Gleichung (23) definierten Koeffizienten einer MRA wie folgt sortiert werden:

$$d_{ji}^{>} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad j < j_t \\ d_{ji} & \text{else} \end{cases} \quad , \qquad d_{ji}^{<} = d_{ji} - d_{ji}^{>} \, . \tag{31}$$

Die zum Filterparameter j_t gehörige physikalische Längenskala s_j kann aus $s_j = 2^{-j}2\pi$ ermittelt werden. In der Abbildung 9 ist zu erkennen, daß diese globale Skaleneinteilung im Waveletraum bei entsprechender Wahl der Filterposition zu einem ähnlichen Ergebnis wie der klassische Fourierfilter führt.
Eine alternative Zerlegung bietet der Waveletamplitudenfilter (*wavelet truncation*), welcher eine nichtlineare Operation im Koeffizientenraum darstellt:

$$d_{ji}^{\wedge} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad |d_{ji}| < d_t \\ d_{ji} & \text{else} \end{cases} \quad , \qquad d_{ji}^{\vee} = d_{ji} - d_{ji}^{\wedge} \, , \tag{32}$$

und dabei die intensiven ($d_{ji}^{\wedge}$) von den schwachen Koeffizienten ($d_{ji}^{\vee}$)trennt. Der Schwellenwert der Amplitude wird hierbei sinnvollerweise mit der Standardabweichung des Funktionswertes verknüpft [20, 21]. Die Abbildung 10 zeigt das Resultat der Zerlegung aus dem obigen Beispiel mit 11% der gesamten Koeffizienten enthalten im Anteil $d_{ji}^{\wedge}$. Auch hier werden ähnliche räumliche Strukturen wie mit den vorangehenden Methoden erzeugt.
Da die drei vorgestellten Methoden in diesem Fall der globalen Filterung zu vergleichbaren Ergebnissen führen, haben wir im weiteren die einfachste Variante, den Fourierfilter, verwendet.

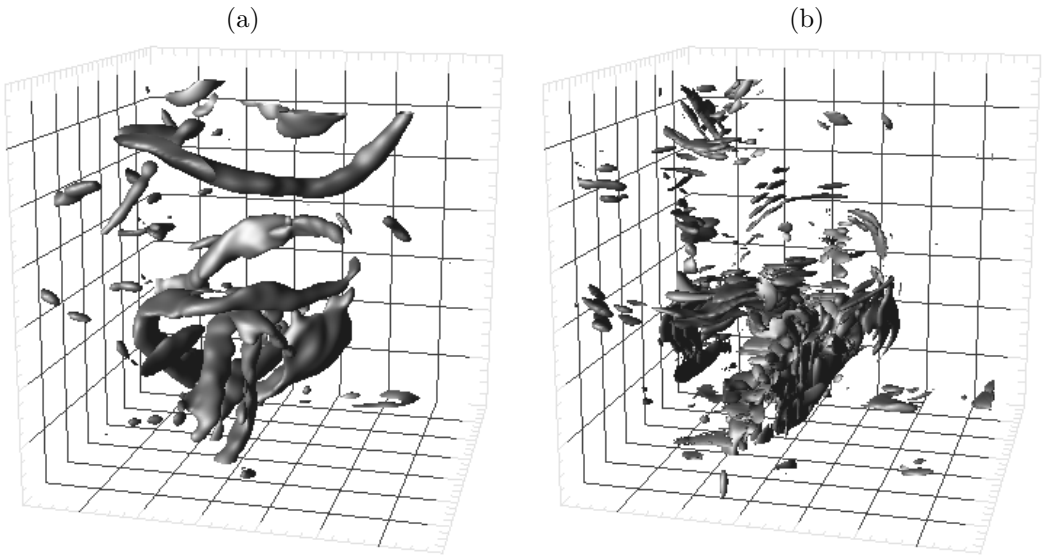

Abbildung 9: Wie Abbildung 8, jedoch wurde die Skalenzerlegung mittels Wavelettransformation und einem Filterparameter $j_t = 6$ (d.h. $s_j/\eta = 11.65$) vorgenommen.

4.2 Die Beiträge zur modifizierten Wirbeltransportgleichung

Zur Auswertung der Terme der modifizierten Wirbeltransportgleichung (12) werden die Wirbelstärke- und Geschwindigkeitsvektoren nach (30) in $\mathbf{u} = \mathbf{u}^> + \mathbf{u}^<$ und $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^> + \boldsymbol{\omega}^<$ zerlegt (dabei lassen sich der Filter- und der Rotationsoperator vertauschen). Die jeweiligen Anteile werden wie folgt mit den Feldgrößen führender Ordnung aus der asymptotischen Analyse identifiziert:

$$(\cdot)^< = (\cdot)^{(0)}\,, \qquad (\cdot)^> = (\cdot)^{(1)}\,. \tag{33}$$

Es interessiert uns insbesondere der Wirbelstreckungsterm des kleinskaligen Feldes durch den großskaligen Anteil (letzter Term der rechten Seite von (13)), welchen wir im folgenden als SSC (*small-scale creation*) Term bezeichnen werden, da prinzipiell durch diesen Mechanismus auch in Abwesenheit von kleinskaliger Wirbelstärke solche generiert werden kann.
Die Abbildung 11 zeigt ein zweidimensionales Histogramm der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zwischen dem Betrag des SSC Termes und der kleinskaligen Wirbelstärke $|\boldsymbol{\omega}^{(1)}|$. Die größte Wahrscheinlichkeit haben demnach finite Wirbelstärken und geringe Werte des SSC. Andererseits sind auf der Achse $|\boldsymbol{\omega}^{(1)}| = 0$ die Wahrscheinlichkeiten durchaus größer Null. Es besteht also die Möglichkeit für die oben angesprochenen Ereignisse der *ab initio* Erzeugung von kleinskaliger Wirbelstärke.
Die Verteilung im Ortsraum der intensiven Werte des SSC ist in Abbildung 12 dargestellt. Die bevorzugten Positionen sind offensichtlich sehr stark mit den *worms* korreliert. Die Oberflächen mit dem Vierfachen der Standardabweichung des SSC bilden dabei zusammenhängende Strukturen von nur wenigen Kolmogorofflängen.
Ob der untersuchte Term SSC wirklich zum Wachstum von $|\boldsymbol{\omega}^{(1)}|$ beiträgt, kann anhand der (skalaren) Gleichung für die Wirbelintensität untersucht werden, welche nach der Vorschrift $\partial_t(\boldsymbol{\omega}^{(1)})^2 = 2\boldsymbol{\omega}^{(1)} \cdot \partial_t \boldsymbol{\omega}^{(1)}$, also durch Projektion von (12) auf den Vektor $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ gewonnen wird. Ein Histogramm der Projektion des SSC Termes, d.h. des Winkels α gebildet mit der kleinskaligen Wirbelstärke, ist in Abbildung 13 zu sehen. Die Verteilung hat ein schwach ausgeprägtes Maximum am neutralen Punkt ($\alpha = 0$) und ist nahezu symmetrisch in bezug auf anfachende ($\alpha > 0$) und dämpfende ($\alpha < 0$) Wirkung durch den SSC Term.

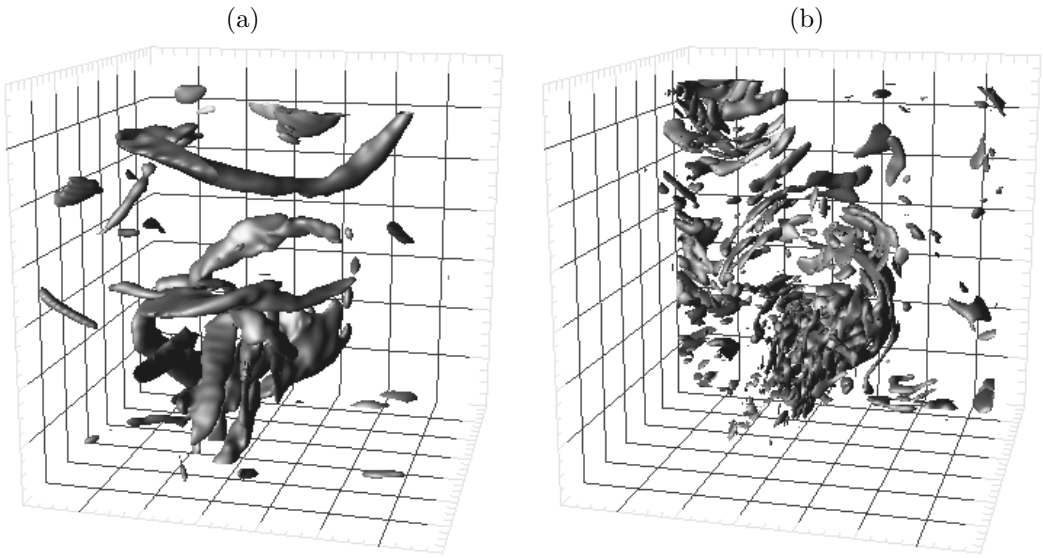

Abbildung 10: Wie Abbildung 8, jedoch wurde eine nicht-lineare Zerlegung nach der Amplitude der Waveletkoeffizienten mit einem Filterparameter $d_t = 10\sqrt{<\boldsymbol{\omega}^2>}\log_1 0(N^3)$ vorgenommen. Die Kompressionseigenschaften sind derart, daß mit 11% der Koeffizienten 99.04% der Energie dargestellt werden.

Da sich unsere Strömungsfelder bei geringer Reynoldszahl entwickeln, sollten Viskositätseffekte in Betracht gezogen werden. Abbildung 14 zeigt dazu ein zweidimensionales Histogramm der gemeinsamen Verteilung des Streckungstermes SSC und des Reibungstermes $2\nu\boldsymbol{\omega}^{(1)} \cdot \nabla^2\boldsymbol{\omega}^{(1)}$. Es ist zu erkennen, daß nahe der Achse $2\nu\boldsymbol{\omega}^{(1)} \cdot \nabla^2\boldsymbol{\omega}^{(1)} = 0$ Ereignisse existieren, für die der SSC Term gegenüber der viskosen Dämpfung überwiegt. Interessanterweise gibt es auch finite Wahrscheinlichkeiten im Quadranten I des Diagrammes, wo der Reibungsterm zur Anfachung der kleinskaligen Wirbelstärke beiträgt.

4.3 Suche nach kleinskaligen Instabilitäten

Die vorangegangenen statistischen Untersuchungen der kleinskaligen Wirbeltransportgleichung und insbesondere des SSC Termes sind konsistent mit den von der Theorie postulierten Instabilitäten und deuten auf ihre Existenz hin. In diesem Abschnitt versuchen wir, diese Ereignisse explizit im Ortsraum aufzuspüren und ihre Entwicklung in der Zeit zu verfolgen. Zu diesem Zweck haben wir einen Satz von (logisch "und" verknüpften) Kriterien zusammengestellt.

(i) $\cos(\alpha) > 0$

Es werden nur Orte in Betracht gezogen, an denen der SSC Term tatsächlich eine Anfachung des kleinskaligen Feldes bewirkt.

(ii) $\left(\boldsymbol{\omega}^{(1)}\right)^2 \leq \omega_h$

Die Wirbelstärke des kleinskaligen Feldes wird nach oben begrenzt, d.h. wir suchen nach den Instabilitäten in ihrer Entstehungsphase zu einem Zeitpunkt, an dem das kleinskalige Feld möglicherweise lokal beinahe irrotationell ist. In der Praxis wurde im Bereich unterhalb von einem Prozent der Standardabweichung gesucht.

(iii) $\dfrac{2\boldsymbol{\omega}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(0)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}^{(1)}}{\left(\boldsymbol{\omega}^{(1)}\right)^2} \geq s_l$

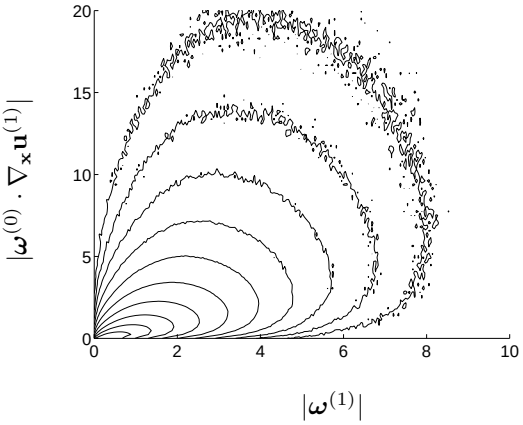

Abbildung 11: Zweidimensionales Histogramm der kleinskaligen Wirbelintensität $|\boldsymbol{\omega}^{(1)}|$ und des Interaktionstermes $|\boldsymbol{\omega}^{(0)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{(1)}|$ für ein Feld der Serie `512_b`. Beide Größen sind normalisiert mit ihrer Standardabweichung. Die Kontourlinien sind logarithmisch aufgeteilt und verlaufen monoton mit Maximum nahe dem Ursprung.

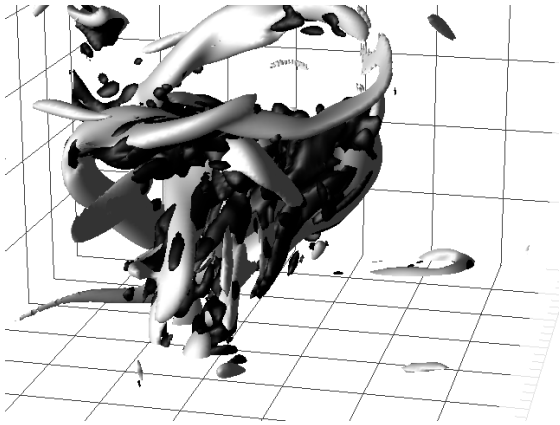

Abbildung 12: Isooberflächen der gesamten Wirbelintensität $|\boldsymbol{\omega}|$ (helle Schattierung) und des Interaktionstermes $|\boldsymbol{\omega}^{(0)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{(1)}|$ (dunkle Schattierung). Gezeigt ist der zentrale Ausschnitt des Feldes aus Abbildungen 8 bis 10 bei einem Wert, der dem Vierfachen der Standardabweichung des jeweiligen Feldes entspricht.

Der Effekt des SSC Termes hat einen Mindestbetrag s_l, welcher auf ein Vielfaches seiner Standardabweichung gesetzt wurde.

(iv) $2\boldsymbol{\omega}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(0)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{(1)} + 2\nu \boldsymbol{\omega}^{(1)} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{\omega}^{(1)} \geq 0$

Der viskose Term ist entweder ebenfalls anfachender Natur oder—wenn dämpfend—zumindest nicht stärker als der SSC Mechanismus.

(v) $$\frac{\left(\boldsymbol{\omega}^{(1)}\right)^2}{2\boldsymbol{\omega}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(0)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{(1)} + 2\nu \boldsymbol{\omega}^{(1)} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{\omega}^{(1)}} \geq t_l$$

Hiermit wird die approximative Zeitskala, welche der Summe der Phänomene der Wirbelstreckung und der Reibung zugeordnet werden kann, nach unten begrenzt. Um eine realistische Chance zu haben, die aufgefundenen Ereignisse in der Zeit verfolgen zu können, sollte diese Zeitskala nicht kleiner sein als das Intervall zwischen den zur Verfügung stehenden Strömungsfeldern. Wir haben daher $t_l = t_{kol}$ gesetzt.

Angewandt auf die Felder der Zeitserie `512_b` werden mit der Auslese durch die Kriterien (i)-(v) jeweils ca. 200 Gitterpunkte (von insgesamt $(3/2 \cdot 512)^3$) gefunden. Wir haben diese "Kandidaten" in der Zeit verfolgt und festgestellt, daß sie nicht wie erwartet näherungsweise mit der Geschwindigkeit des großskaligen Feldes transportiert werden. Die Visualisierung ergab, daß diese Orte vielmehr von Schritt zu Schritt quasi zufällig verteilt ersche

Literatur

[1] A. Chorin. *Vorticity and Turbulence.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.

[2] J. Jiménez, A.A. Wray, P.G. Saffman, and R.S. Rogallo. The structure of intense vorticity in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 255:65–90, 1993.

[3] J. Kim, P. Moin, and R. Moser. Turbulence statistics in a fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 177:133–166, 1987.

[4] M. Uhlmann. The need for de-aliasing in a Chebyshev pseudo-spectral method. Technical Note No. 60, available under `www.pik-potsdam.de/~uhlmann/projects.html`, Potsdam Institute for Climate Impact Research, Potsdam, Germany, 2000.

[5] R.D. Moser, J. Kim, and N.N. Mansour. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Phys. Fluids*, 11(4):943–945, 1999.

[6] G.K. Batchelor. *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge U. Press, 1953.

[7] U. Frisch. *Turbulence: The legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge U. Press, 1995.

[8] M. Farge. Wavelet transforms and their applications to turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 24:395–457, 1992.

[9] A. Grossmann and J. Morlet. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math. Anal.*, 15(4):723–736, 1984.

[10] S.G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Trans. Pattern Analysis Mach. Intell.*, 11(7):674–693, 1989.

[11] Y. Meyer. *Wavelets and operators*. Cambridge Univ. Press, 1992.

[12] P.-G. Lemarié. Ondelettes à localisation exponentielle. *J. Math. pures at appl.*, 67:227–236, 1988.

[13] B. Fischer and J. Prestin. Wavelets based on orthogonal polynomials. *Math. Comp.*, 66(220):1593–1618, 1997.

[14] J. Fröhlich and M. Uhlmann. Wavelets based on Legendre polynomials. Technical Note No. 72, available under `www.pik-potsdam.de/~uhlmann/projects.html`, Potsdam Institute for Climate Impact Research, Potsdam, Germany, 2001.

[15] C. Meneveau. Analysis of turbulence in the orthonormal wavelet representation. *J. Fluid Mech.*, 232:469–520, 1991.

[16] K. Araki, K. Suzuki, K. Kishida, and S. Kishiba. Multiresolution approximation of the vector fields on T^3. e-print on `arXiv.org/abs/math-ph/9904015`, 1999.

[17] K. Kishida, K. Araki, S. Kishiba, and K. Suzuki. Local or nonlocal? Orthonormal divergence-free wavelet analysis of nonlinear interactions in turbulence. *Phys. Rev. Letters*, 83(26):5487–5490, 1999.

[18] K. Kishida. *Analysis of turbulence in the orthonormal divergence-free wavelet representation*. PhD thesis, Hiroshima University, 2000.

[19] M. Uhlmann. A parallel algorithm for the discrete orthogonal wavelet transform. Technical Note No. 68, available under `www.pik-potsdam.de/~uhlmann/projects.html`, Potsdam Institute for Climate Impact Research, Potsdam, Germany, 2000.

[20] M. Farge, K. Schneider, and G. Pellegrino. Vortex tube extraction in three-dimensional turbulence using orthogonal wavelets. In C. Dopazo et al., editor, *Advances in Turbulence VIII*, Proc. 8th Eur. Turb. Conf., pages 797–800, Barcelona, Spain, 2000.

[21] D.L. Donoho, I.M. Johnstone, G. Kerkyacharian, and D. Picard. Wavelet shrinkage: Asymptopia? *J. R. Statist. Soc. B*, 57(2):301–369, 1995.

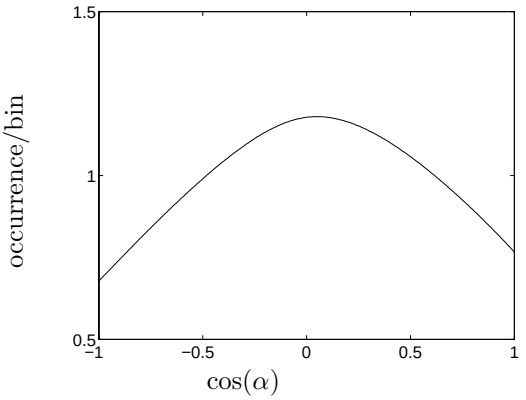

Abbildung 13: Histogramm des Winkels α zwischen dem kleinskaligen Wirbelstärkevektor $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ und dem Interaktionsterm $\boldsymbol{\omega}^{(0)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{(1)}$, akkumuliert über 13 zeitlich aufeinanderfolgende Strömungsfelder mit jeweiligem Abstand t_{kol}.

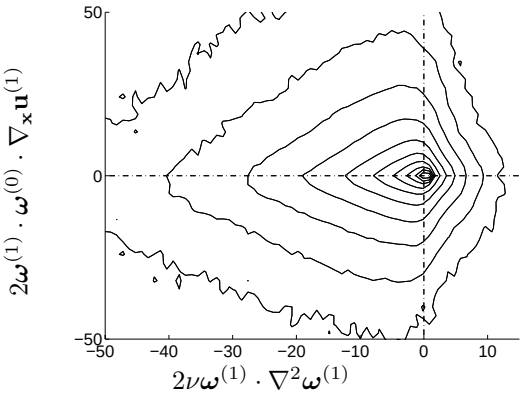

Abbildung 14: Zweidimensionales Histogramm des viskosen Termes $2\nu\boldsymbol{\omega}^{(1)} \cdot \nabla^2\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ und des Interaktionstermes $2\boldsymbol{\omega}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(0)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{(1)}$ der kleinskaligen Enstrophiegleichung für ein Feld der Serie `512_b`. Beide Größen sind normalisiert mit ihrer Standardabweichung. Die Kontourlinien sind logarithmisch aufgeteilt und verlaufen monoton mit Maximum nahe dem Ursprung.